GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXIII **N.° 88-89** JULHO-DEZ. 1962

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXIII—N.º 88-89 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ.—1962

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Nuevos operadores relacionados con el operador «elasticidad»

por *Alberto Sáez Fernández de Toro* y *José Gallego-Diaz*

Definiciones.

Sea $U = U(x, y, z)$ una función uniforme, definida en una cierta región del espacio y sean x, y, z, las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto P, cualquiera, de dicha región. Suponemos, también, que U no se anula en P y que admite derivadas parciales primeras.

Por consiguiente, estarán definidas en P las elasticidades parciales primeras de U, que serán designadas con la siguiente notación:

$$\mathcal{E}_x(U) = \frac{x}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \mathcal{E}_y(U) = \frac{y}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y};$$
$$\mathcal{E}_z(U) = \frac{z}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Sea $\vec{F} = \vec{i}\, X + \vec{j}\, Y + \vec{k}\, Z$ un vector cuyas componentes son funciones de las coordenadas de P y que están sujetas a las mismas restricciones que U.

Definiremos el vector **gradiente elastico** de $U(x, y, z)$, como sigue:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \vec{i} \cdot \mathcal{E}_x(U) + \vec{j} \cdot \mathcal{E}_y(U) + \vec{k} \cdot \mathcal{E}_z(U).$$

Definiremos el escalar **divergencia elastica de** $\vec{F}(x, y, z)$ como sigue:

$$\text{Die}\, \vec{F} = \mathcal{E}_x(X) + \mathcal{E}_y(Y) + \mathcal{E}_z(Z)$$

y definiremos el vector **rotacional elastico de** $\vec{F}(x, y, z)$ así:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\, \vec{F} = \vec{i}\,[\mathcal{E}_y(Z) - \mathcal{E}_z(Y)] +$$
$$+ \vec{j}\,[\mathcal{E}_z(X) - \mathcal{E}_x(Z)] + \vec{k}\,[\mathcal{E}_x(Y) - \mathcal{E}_y(X)].$$

Las anteriores definiciones podrían haber sido presentadas en forma sintética, introduciendo, previamente, el siguiente operador vectorial

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{i}\, \mathcal{E}_x + \vec{j}\, \mathcal{E}_y + \vec{k}\, \mathcal{E}_z$$

en donde: E_x, E_y, E_z son los operadores elasticidad parcial primera respecto de x, y, z, respectivamente.

Entonces, se puede escribir:

$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \vec{\mathcal{E}}\, U$

$\text{Die}\, \vec{F} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{F}$ (producto escalar)

$\overrightarrow{\text{Roe}}\, \vec{F} = \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{F}$ (producto vectorial)

Relación entre $\overrightarrow{Gre}\, U$ *y* $\overrightarrow{Grad}\, U$.

Consideremos el afinor diagonal $\mathcal{T}$, cuya expresión en función de las díadas unidad sea la siguiente:

$$\mathcal{T} = x\,\vec{i}\,\vec{i} + y\,\vec{j}\,\vec{j} + z\,\vec{k}\,\vec{k}.$$

La matriz de dicho afinor es:

$$\|\mathcal{T}\| = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{Vmatrix}$$

y los elementos de la diagonal no son otra cosa que las coordenadas de P.

Formemos el producto escalar:

$$\mathfrak{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

en donde:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{i}\, \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\, \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\, \frac{\partial U}{\partial z}$$

Resulta:

$$\mathfrak{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = X \vec{i}\, (\vec{i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U) + y \vec{j}\, (\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U) + \\ + Z \vec{k}\, (\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U)$$

Y, por consiguiente:

$$\mathfrak{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{i}\, x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\, y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\, z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Recordando la definición de Gre U, se observa que se verifica la relación:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \mathfrak{T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} = \mathfrak{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

designando por $\mathfrak{A}$ el afinor diagonal:

$$\mathfrak{A} = \frac{x}{U}\, \vec{i}\, \vec{i} + \frac{y}{U}\, \vec{j}\, \vec{j} + \frac{z}{U}\, \vec{k}\, \vec{k}$$

cuya matriz es:

$$\| \mathfrak{A} \| = \begin{Vmatrix} \dfrac{X}{U} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Y}{U} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{Z}{U} \end{Vmatrix}$$

Es de subrayar que, por ser $\mathfrak{T}$ un afinor diagonal, puede permutarse el orden de los factores y escribir:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} \cdot \mathfrak{T} = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \mathfrak{A}$$

Elasticidad segun una direccion.

La elasticidad de $U(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ y según la dirección y el sentido del vector:

$$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$

podremos definirla así:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(U) = \frac{x}{U} \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{y}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \\ + \frac{z}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma$$

Es evidente que el concepto de «elasticidad según una dirección» coincide con el de «elasticidad parcial primera» en el caso de que $\vec{n}$ coincida con uno de los tres versores fundamentales.

Se podrá escribir:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(U) = \mathcal{E}_x(U) \cos \alpha + \mathcal{E}_y(U) \cos \beta + \\ + \mathcal{E}_z(U) \cos \gamma = \vec{n} \cdot \mathcal{E}\, U = \vec{n} \cdot \mathfrak{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \\ = \vec{n} \cdot \mathfrak{T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U}$$

Y teniendo presente que $\mathfrak{A}$ es un afinor diagonal:

$$\vec{n} \cdot \mathfrak{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \mathfrak{A} \cdot \vec{n}$$

y por consiguiente:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(u) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} \cdot \mathfrak{T} \cdot \vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} \vec{t}$$

en donde hemos designado por $\vec{t}$ al vector transformado del $\vec{n}$ por la aplicación del afinor $\mathfrak{T}$:

$$\vec{t} = \mathfrak{T} \cdot \vec{n} = \vec{i}\, x \cos \alpha + \vec{j}\, y \cos \beta + \vec{k}\, z \cdot \gamma$$

Puesto que: $\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \mathfrak{A}\, \overrightarrow{\text{Grad}}\, U$, se verificará:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(u) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{Gre}}\, U$$

y, por consiguiente, la elasticidad de U según la dirección y el sentido de $\vec{n}$ no es otra cosa que la proyección del gradiente elástico de U sobre el eje definido por n. Evidentemente, esta propiedad hubiera podido servir como definición de «elasticidad según una dirección».

En el caso de que $\vec{n}$ fuera perpendicular a $\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\, U$, se cumple:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(U)=0$$

o sea:

$$x\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+y\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+z\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma=0$$

y si, en tal caso, consideramos un desplazamiento elemental, a partir de P, definido por:

$$\overrightarrow{ds}=\vec{n}\cdot ds=\vec{i}\cdot dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$$

se verificará:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds};\ \cos\beta=\frac{dy}{ds};\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

y, por consiguiente:

$$x\frac{\partial U}{\partial x}dx+y\frac{\partial U}{\partial y}dy+z\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

Si las componentes del desplazamiento elemental $(dx,\ dy,\ dz)$ satisfacen la relación anterior, la elasticidad de U en la dirección del desplazamiento es nula y podremos decir que dicho desplazamiento se efectúa sobre una «Superficie de Elasticidad Nula».

El valor máximo de la $\mathcal{E}_{\vec{n}}(U)$ en el punto P, se producirá cuando $\vec{n}$ sea paralelo y del mismo sentido que $\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\, U$, para lo cual ha de cumplirse:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}}=\frac{\cos\beta}{\frac{y}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{z}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

En tal caso, las componentes de un desplazamiento elemental paralelo a $\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\, U$ deberan satisfacer al sistema:

$$\frac{dx}{x\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{dy}{y\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{dz}{z\frac{\partial U}{\partial z}}$$

que son, pues, las ecuaciones diferenciales de las «*Líneas de Máxima Elasticidad*». Evidentemente, las referidas líneas son las trayectorias ortogonales de las antes citadas «*Superficies de Elasticidad Nula*».

Potencial elastico.

Diremos que $\Psi=\Psi(x,y,z)$ es el potencial elástico de $\vec{F}=\vec{i}\,X+\vec{j}\,Y+\vec{k}\,Z$ cuando se verifique:

$$\vec{F}=\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi$$

$$\text{O sea: }\begin{cases} X=\mathcal{E}_x(\Psi)=\dfrac{x}{\Psi}\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\\[2mm] Y=\mathcal{E}_y(\Psi)=\dfrac{y}{\Psi}\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}.\\[2mm] Z=\mathcal{E}_z(\Psi)=\dfrac{z}{\Psi}\cdot\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}\end{cases}$$

En tal caso, llamando $\overrightarrow{ds}$ a un vector elemental tangente a una curva en un punto genérico de la misma, la circulación elemental de $\vec{F}$ sobre dicha curva será:

$$d\mathcal{C}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi\cdot\vec{n}\,ds=\mathcal{E}_{\vec{n}}(\Psi)\,ds$$

Y la circulación por unidad de longitud será: $\frac{d\mathcal{C}}{ds}=\mathcal{E}_{\vec{n}}(\Psi)$ es decir, igual a la elasticidad del potencial según la dirección de la tangente a la curva.

Teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi=\mathcal{T}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}$$

se verificará:

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}&=\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi\,\overrightarrow{ds}=\overrightarrow{ds}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi=\\ &=\overrightarrow{ds}\cdot\mathcal{T}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}\,\mathcal{T}\,\overrightarrow{ds}=\\ &=\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}(\vec{i}\,x\,dx+\vec{j}\,y\,dy+\vec{k}\,z\,dz)=\\ &=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx\frac{x}{\Psi}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\frac{y}{\Psi}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}dz\cdot\frac{z}{\Psi}.\end{aligned}$$

Es evidente que la circulación elemental de $\vec{F}$ a lo largo de una curva situada sobre una superficie de elasticidad nula (de Ψ) es cero, y que lo mismo ocurrirá con la circulación a lo largo de una trayectoria no elemental situada sobre una de dichas superficies.

Calculemos ahora $\text{Die}\,\vec{F}$, en la hipótesis de existir «Potencial Elástico»

$$\text{Die}\,\vec{F} = \text{Die}\,\overrightarrow{\text{Gre}}\,\Psi =$$

$$= \mathcal{E}^2_{xx}(\Psi) + \mathcal{E}^2_{yy}(\Psi) + \mathcal{E}^2_{zz}(\Psi)$$

en donde: $\mathcal{E}^2_{xx}(\Psi)$ es la elasticidad parcial segunda respecto de x dos veces y análogamente las demás.

Recordando que:

$$\text{Die}\,\vec{F} = \mathcal{E}\cdot\vec{F}$$

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\,\Psi = \mathcal{E}\,\Psi$$

será posible también escribir:

$$\text{Die}\,\overrightarrow{\text{Gre}}\,\Psi = \mathcal{E}\cdot\mathcal{E}\,\Psi(\mathcal{E}\cdot\mathcal{E})\,\Psi = \mathcal{E}^2\,\Psi$$

Podremos, por tanto, considerar a

$$\mathcal{E}^2 = (\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}) = \mathcal{E}^2_{xx} + \mathcal{E}^2_{yy} + \mathcal{E}^2_{zz}$$

como un operador análogo al «Laplaciano».

Otras relaciones interesantes.

Comencemos por desarrollar la expresión:

$$\text{Die}\,\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F}:$$

Se verifica:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F} = \vec{i}\,[\mathcal{E}_y(z) - \mathcal{E}_z(y)] + \vec{j}\,[\mathcal{E}_z(x) - \mathcal{E}_x(z)] + \\ + \vec{k}\,[\mathcal{E}_x(y) - \mathcal{E}_y(x)]\,.$$

Con lo cual se obtiene:

$$\text{Die}\,\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F} = \mathcal{E}_x[\mathcal{E}_y(z) - \mathcal{E}_z(y)] + \\ + \mathcal{E}_y[\mathcal{E}_z(x) - \mathcal{E}_x(z)] + \mathcal{E}_z[\mathcal{E}_x(y) - \mathcal{E}_y(x)]\,.$$

Veamos, a continuación, el desarrollo de $\overrightarrow{\text{Roe}}\;\overrightarrow{\text{Gre}}\,U$:

Como $\overrightarrow{\text{Gre}}\,U = \vec{i}\,\mathcal{E}_x(U) + \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U) + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U)$.

$$\text{Será: Roe}\;\overrightarrow{\text{Gre}\,U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & \mathcal{E}_z \\ \mathcal{E}_x(U) & \mathcal{E}_y(U) & \mathcal{E}_z(U) \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,[\mathcal{E}^2_{zy}(U) - \mathcal{E}^2_{yz}(U)] + \\ + \vec{j}\,[\mathcal{E}^2_{xz}(U) - \mathcal{E}^2_{zx}(U)] + \\ + \vec{k}\,[\mathcal{E}^2_{yx}(U) - \mathcal{E}^2_{xy}(U)]$$

que, en general, es un vector no nulo. Pero si U adopta una de las dos formas siguientes:

$$U = U(W) \text{ siendo } W = XYZ$$

o bien:

$$U = f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$$

es sabido que en estos dos casos y solo en estos dos casos se verifica [1]

$$\mathcal{E}^2_{xy} = \mathcal{E}^2_{yx}\,;\;\; \mathcal{E}^2_{yz}(u) = \mathcal{E}^2_{zy}\,;\;\; \mathcal{E}^2_{zx}(u) = \mathcal{E}^2_{xz}(u)$$

y, por consiguiente, en tales casos, se cumplirá:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\;\overrightarrow{\text{Gre}}\,U = 0$$

Supongamos ahora que $U = U(x, y, z)$ pueda ser descompuesta en el producto de dos funciones

$$U_1 = U_1(x, y, z) \;\text{ y }\; U_2 = U_2(x, y, z)\,.$$

Teniendo en cuenta que el operador elasticidad posee la propriedad siguiente:

$$\mathcal{E}_x(f\cdot\varphi) = \mathcal{E}_x(f) + \mathcal{E}_x(\varphi)$$

Tendremos:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\,U = \text{Gre}\,(U_1\cdot U_2) = \vec{i}\,E_x(U_1\,U_2) + \\ + \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U_1\,U_2) + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U_1\,U_2) = \vec{i}\,\mathcal{E}_x(U_1) + \\ + \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U_1) + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U_1) + \vec{i}\,\mathcal{E}_x(U_2) + \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U_2) + \\ + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U)\,.$$

---

(1) Véase: J. Gallego-Diaz «Gazeta Matemática», Lisboa, n.º 50, Diciembre 1951.

Y, por tanto:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}(U_1\,U_2) = \overrightarrow{\text{Gre}}\,U_1 + \overrightarrow{\text{Gre}}\,U_2$$

Consideremos, a continuación, un vector $\vec{F} = \vec{i}\cdot X + \vec{j}\cdot Y + \vec{k}\cdot Z$ cuyas componentes adopten la forma:

$$X = X_1\,X_2\,,, \quad Y = Y_1\,Y_2\,,, \quad Z = Z_1\,Z_2$$

Y desarrollemos la expresión $\text{Die}\,\vec{F}$: Resulta:

$$\text{Die}\,\vec{F} = \mathcal{E}_x(X_1\,X_2) + \mathcal{E}_y(Y_1\,Y_2) + \mathcal{E}_z(Z_1\,Z_2)$$

Y si, por ejemplo, consideramos los vectores:

$$\vec{F}_1 = \vec{i}\,X_1 + \vec{j}\,Y_1 + \vec{k}\,Z_1$$

y
$$\vec{F}_2 = \vec{i}\,X_2 + \vec{j}\,Y_2 + \vec{k}\,Z_2$$

se podrá escribir:

$$\text{Die}\,\vec{F} = \text{Die}\,\vec{F}_1 + \text{Die}\,\vec{F}_2$$

Veamos, finalmente, el desarrollo de $\text{Roe}\,\vec{F}$, en el mismo caso que antes:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F} = {} & \vec{i}\,[\mathcal{E}_y(Z_1\,Z_2) - \mathcal{E}_z(Y_1\,Y_2)] + \\ & + \vec{j}\,[\mathcal{E}_z(X_1\,X_2) - \mathcal{E}_x(Z_1\,Z_2)] + \\ & + \vec{k}\,[\mathcal{E}_x(Y_1\,Y_2) - \mathcal{E}_y(X_1\,X_2)]\end{aligned}$$

Y, por consiguiente:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F} = \overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F}_1 + \overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F}_2\,.$$

Nota: La generalización a espacios de n dimensiones no presenta dificultad alguna.

Constituição do Centro de Tratamento da Informação (CENTI)

A — Origem e objectivos

Por iniciativa da Cooperativa da Actividade Científica DIÁLOGO, numa sala da Faculdade de Ciências de Lisboa reuniu-se a 3 de Novembro de 1961 um grupo de cientistas portugueses com o objectivo de promover em Portugal a utilização das técnicas decorrentes do *Tratamento da Informação* e o desenvolvimento do necessário apoio científico.

Das decisões tomadas resultou a constituição no seio da mesma Cooperativa do CENTRO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO — CENTI cujos objectivos primários são os indicados atrás, e dos quais se dará em seguida maior pormenorização.

Estabeleceu-se contrato com o Sócio Colectivo «SOLOR» no sentido de assegurar ao CENTRO a possibilidade de utilização de equipamento de cálculo.

B — Organização, pessoal e sede

1 — São Orgãos do CENTI:

a) *Direcção que se compõe de*

- 1 Representante da Direcção ou da Junta Executiva da DIALOGO.
- 1 Representante do Sócio Colectivo «SOLOR».
- 1 Responsável (sócio da DIALOGO) da Secção *Evolução de Material.*
- 1 Responsável (sócio da DIÁLOGO) pela actividade *Promoção Científica.*
- 1 Responsável (sócio da DIÁLOGO) da Secção *Publicações.*

b) *Secretariado que se compõe*

- 3 Sócios da DIALOGO.
- 1 Representante da «SOLOR».

2 — A Sede do CENTI é a Sede da DIÁLOGO.

C — Natureza Administrativa

CENTI é um Centro de Actividade Científica integrado em DIÁLOGO e criado ao abrigo do artigo 4.º alínea *f*) dos seus Estatutos.

D — Equipamento

a) *CENTI dispõe do material seguinte:*

1 computador UNIVAC 40
Tabuladoras
Reprodutoras-Intercaladoras
Interpretadoras
Separadoras.

b) Uma das preocupações permanentes de CENTI é a de promover a actividade de uma Secção EVOLUÇÃO DE MATERIAL constituída por um grupo de técnicos com o «objectivo de criar condições de independência nacional no que respeita à utilização de unidades de cálculo automático», isto é, de virem a construir-se em Portugal unidades de cálculo de concepção portuguesa.

E — Promoção profissional

A existência do CENTI decorre duma realidade que deve promover não só o estudo dos ramos bem definidos do Tratamento de Informação mas também de outros nos campos de Matemática, Economia, Electrónica, Lógica, Linguística, etc. Numa primeira fase considera-se indispensável a actividade em Matemáticas Puras, Matemáticas Experimentais, Métodos Matemáticos da Física, Programação Automática e Tradução Automática de Línguas, estando constituidos grupos de trabalho subordinados aos programas seguintes:

Equações às derivadas parciais
Análise Operacional
Teoria da Informação
Investigação Operacional
Análise Numérica
Mecânicas Quântica e Estatística.

É preocupação permanente que os programas destas actividades sejam elaborados e alterados de acordo com as necessidades decorrentes da análise de problemas concretos existentes no campo da indústria portuguesa e que sejam postos ao CENTI.

F — Publicações

A publicação dos trabalhos realizados no CENTI é feita sempre que possível na revista «Gazeta de Matemática», em condições estabelecidas por contrato próprio.

G — Relações públicas

O CENTI considera como fundamental para a sua existência e para a realização dos objectivos a que se propõe um contacto permanente com os clientes efectivos e potenciais, com as instituições portuguesas que com ele podem colaborar numa comunhão de esforços tendo em vista objectivos comuns, com instituições estrangeiras congéneres das quais possa receber apoio resultante da experiência nelas já obtidas.

O Secretariado dará o apoio conveniente ao bom desempenho destas funções e promoverá junto da indústria portuguesa o estudo e estruturação dum CENTRO DE CALCULO NACIONAL de acordo com a Proposta de Constituição já publicada por DIÁLOGO. Aprovará igualmente a actividade de esclarecimento público das vantagens da utilização das técnicos do Tratamento da Informação por meio de sessões públicas como conferências, projecções de filmes, etc.

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares (*)

por *José Gaspar Teixeira*

Vinte anos são passados sobre a realização da primeira experiência nuclear crítica. Pode dizer-se que os problemas teóricos que determinaram o seu exito são clássicos e que muitos outros cujo enunciado dela resultou estão a entrar igualmente no domínio do classicismo científico; ao mesmo tempo que as suas soluções contribuem já eficazmente para o progresso económico das nações que prosseguem nas sendas dos FERMIS, dos JOLIOTS, dos KURCHATOVS.

Nesta perspectiva, a enunciação dos **Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares** pode portanto corresponder a um tema, de conteúdo clássico, em torno do qual seja possível polarizar uma actividade de aperfeiçoamento de conhecimentos de matemática aplicada e de física teórica dos nossos dias.

É com este objectivo que o apresentamos ao iniciar os trabalhos da secção «Métodos Matemáticos da Física», a desenvolver no Centro de Tratamento da Informação — CENTI.

*

Os problemas científicos que se põem na construção de um reactor nuclear são, não só o da determinação das suas condições de criticalidade (1) mas também muitos outros nos muitos variados campos da química e metalurgia, das termo e hidrodinâmicas, da protecção contra as radiações, das estabilidades mecânicas e nuclear, da física nuclear, etc.

Ao falarmos, porém, da Teoria dos Reactores Nucleares (TRN), limitar-nos-emos aos problemas de determinação das *densidades neutrónicas* ou dos *fluxos neutrónicos*, como função do tempo do ponto e da energia do neutrão, das condições de *reacção em cadeia*, aos problemas da *penetração das radiações* e, consequentemente, das colisões nucleares.

Mesmo os aspectos macroscópicos que interessam na TRN resultam de fenómenos que se processam em regiões cujo «raio» varia entre 10^{-9} e 10^{-15} cm, interessando partículas (elementares, núcleos ou mesmo átomos) que se distribuem com densidades entre 10^6 e 10^{24} partículas/cm^3. O instrumento adequado à tradução analítica destes fenómenos, instrumento aliás nem sempre eficiente, é a mecânica quântica.

Contudo, na maioria dos casos, as condições reais são de molde a permitir a utilização da mecânica clássica. Os problemas dos casos restantes, principalmente os que dizem

(*) Neste artigo nada de original se apresenta. Apenas se compilaram aspectos e resultados publicados por diversos autores com o objectivo de enunciar, como se diz, vários temas de trabalho no campo das matemáticas aplicadas.

(1) Aos leitores não iniciados nos problemas ligados à utilização da Energia Nuclear aconselhamos a consulta prévia de:

ALICE MAIA MAGALHÃES e TÚLIO LOPES TOMÁS — Compêndio de Química para o 6.º ano liceal — Cap. XVI, Lisboa 1962,

J. SANT'ANA DIONISIO — Reactores Nucleares, Seara Nova, 1958.

respeito à determinação das secções eficazes dos diversos materiais, grandezas que traduzem o comportamento das partículas nesses diferentes meios materiais são, em regra, de muito difícil solução; tem sido sistemàticamente estudados mas os resultados são ainda insuficientemente conhecidos.

Tratando portanto da TRN consideramos seguidamente os três problemas

a) Densidades e fluxos neutrónicos,
b) Criticalidade das reacções em cadeia,
c) Penetração das radiações.

FLUXOS NEUTRÓNICOS

1. Hipóteses da Teoria Geral dos Reactores Nucleares

A teoria matemática que permite calcular o fluxo neutrónico no núcleo de um reactor nuclear baseia-se nos seguintes factos e hipóteses de natureza física:

As leis de interacção entre os neutrões e o meio ambiente devem estabelecer-se por meio da mecânica quântica.

1 — A natureza ondulatória dos neutrões só se manifesta, porém, duma forma determinante apenas nos fenómenos de difracção nos meios cristalinos. Nestes casos, a introdução de uma anisotropia do meio permite reduzir a descrição dos referidos processos a termos simplesmente corpusculares.

2 — Quanto à variável quântica, o spin, os neutrões dividem-se em dois grandes grupos, os de helicidade direita (spin paralelo à velocidade) e os de helicidade esquerda (spin anti-paralelo à velocidade); e as secções eficazes dos materiais tomam valores diferentes — se bem que muito próximos — para os diferentes valores de spin. Além disso as transições entre as duas helicidades são suficientemente frequentes por forma que os neutrões se podem considerar pràticamente não polarizados.

Estas duas hipóteses permitem remover eficazmente as dificuldades decorrentes da natureza quântica dos fenómenos e aceitar o ponto de vista clássico.

3 — O número de neutrões é suficientemente grande para que
a) os neutrões possam ser considerados estatìsticamente, e indiscerníveis quando caracterizados por identicos valores das variáveis que os definem;
b) a função fluxo neutrónico possa ser considerada contínua a respeito de todas as suas variáveis.

2. A Teoria do transporte. Enunciado Geral

As hipóteses anteriores permitem considerar os neutrões existentes no núcleo de um reactor nuclear como constituindo um gas que obedece ao princípio do determinismo mecanicista, e está sujeito à lei geral da difusão dos gases estabelecida em 1896 por BOLTZMANN e conhecida por *Teoria do Transporte*.

Fundamentalmente, pretende-se determinar uma função

$$\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega; t)$$

denominada *fluxo neutrónico* e que representa, no instante t, o produto do número pela velocidade dos neutrões que satisfazem às condições seguintes:

a) existem no volume unidade centrado em $\mathbf{x}$;
b) possuem energias contidas na banda de amplitude unidade centrada em E;
c) estão animados de velocidades cuja direcção é interior ao ângulo sólido unidade de eixo Ω.

Evidentemente, a função Φ e as variáveis $\mathbf{x}, E, \Omega$ podem ser substituídas, na teoria do transporte, por outras equivalentes.

3. Primeira dificuldade; primeira divisão. Primeiro problema

O fluxo neutrónico afecta o meio do reactor: nomeadamente, se a produção de calor pelo processo de cisão nuclear faz variar sensivelmente os valores das secções eficazes e das dimensões geométricas dos diversos materiais, os próprios fenómenos nucleares alteram a constituição química dos componentes do núcleo do reactor.

Tudo isto significa que a equação de transporte é *não-linear*.

Conclue-se assim que a TRN leva-nos directa e naturalmente ao estudo da *mecânica não-linear*.

Como se sabe, a mecânica não-linear ainda é muito insuficientemente conhecida (1).

No entanto, a teoria da estabilidade de LIAPOUNOV que tem na mecânica não-linear um papel comparável ao do critério de ROUTH-HURWITZ na estabilidade das equações lineares, já foi definitivamente formulada em 1892!

Em face das dificuldades decorrentes da situação acabada de referir, os problemas gerais da TRN grupam-se naturalmente em

a) Estática do Reactor

b) Dinâmica do Reactor.

a) Na Estática do Reactor consideram-se os fenómenos para os quais as equações de transporte se mantém *lineares*.

Isto implica em primeiro lugar o desprezo dos efeitos das colisões neutrão-neutrão.

A hipótese de linearidade dá à equação de transporte características de muito maior simplicidade do que no caso da teoria geral da cinética dos gases.

Implica igualmente que os fenómenos em consideração sejam ou independentes do tempo, ou de possível estudo num intervalo de tempo suficientemente pequeno dentro do qual não se produzam alterações sensíveis das temperaturas, das dimensões e da constituição química dos diversos materiais constituintes do núcleo do reactor.

Com efeito, os fluxos neutrónicos reais são, nos reactores nucleares actuais, suficientemente baixos para que a hipótese do desprezo das colisões neutrão-neutrão seja sempre justificada.

Por outro lado, o centro de interesse da Estática do Reactor reside nos aspectos matemáticos das teorias que permitem a determinação das secções eficazes mediadas sobre sistemas heterogéneos e dos fluxos neutrónicos nos referidos sistemas. Neste campo, enquanto que os aspectos físicos do problema estão relativamente bem compreendidos, existem dificuldades consideráveis no campo matemático para a resolução da equação de transporte.

b) Na Dinâmica do Reactor os problemas ou são considerados sob uma forma elementar, ou conduzem directamente a aspectos específicos da *mecânica não-linear*.

HARVEY BROOKS (1) referindo-se aos reactores de maior complexidade, os de maior

---

(1) SOLOMON LEFSCHETZ, num relatório apresentado à «United States Air Force» sobre a investigação no campo das equações diferenciais e mecânica *não-lineares* diz: «um ponto de particular importância está em que o desenvolvimento da teoria da estabilidade de LIAPOUNOV e a sua aplicação a certos métodos e técnicas tem sido quase completamente ignorados fora da URSS». (Cf. LEFSCHETZ e LA SALLE: *Recent Soviet contributions to ordinary differential equations and non-linear mechanics* — R. I. A. S. Technical Report 59-3, April 1959).

(1) Cf HARVEY BROOKS — *Temperature coefficients and stability.* Symposium of the A. M. S. 1959.

potência, divide os problemas da dinâmica em três grandes classes:

1) Problemas de pequenas oscilações, perante as quais as equações do reactor podem ser linearizadas. Aqui se incluem as questões da estabilidade relativa a pequenas perturbações em torno da posição de funcionamento do reactor em regimen estacionário.
2) Problemas de grandes oscilações, perante as quais as equações do reactor já não podem ser linearizadas. Aqui, a amplitude das oscilações é limitada pelos picos de carga (1) dos quais não resultem alterações permanentes ou irreversíveis na estrutura física do reactor, isto é, oscilações não destrutivas.
3) Problemas de variações excepcionalmente grandes das condições de regimen do reactor, das quais resultem alterações permanentes na sua estrutura, como por exemplo, fusão do combustível, expulsão permanente do refrigerante, etc. Nestes problemas somos geralmente solicitados pelos processos de auto-domínio da distorção, isto é, preocupam-nos os aspectos que constituem a análise dos acidentes fortuitos nos reactores nucleares.

Em face do que acabamos de expor, consideramos que um dos objectivos fundamentais de uma actividade de aperfeiçoamento de conhecimentos de matemática aplicada à Teoria dos Reactores Nucleares — o Primeiro Problema — é o estudo da

TEORIA DAS OSCILAÇÕES (2).

(1) Como se disse, referimo-nos a reactores para produção de energia, evidentemente ligados a uma rede.

(2) Bibliografia fundamental: Andronov, Vitt e Chaikin — *Teoria Kolebanii* — 1960. Existe tradução incompleta, mas suficiente para primeiro estudo, da 1.ª edição de 1937, para inglês: Andronow e Chaikin — *Theory of Oscilations*, Princeton Univ. Press, 1949.

4. A Teoria do Transporte. Duas atitudes diferentes (1).

A grande variedade de métodos de resolução das equações de transporte pode dividir-se, do ponto de vista da matemática, em dois grupos.

A situação é idêntica à criada pelas atitudes de Riemann e Lebesgue em face do conceito de integral ou ainda por Euler e Lagrange perante as equações da dinâmica clássica dos fluidos. Assim, no método de Boltzman, considera-se um elemento de volume e o número de neutrões nele existentes, cujas energias e direcção de deslocamento são determinadas. Alternativamente, podemos fazer incidir a atenção sobre um neutrão e segui-lo ao longo das sucessivas colisões até a sua absorpção. Evidententemente este último método é mais complexo, até porque fornece mais informações do que as necessárias, pois dá não só o número dos neutrões absorvidos num dado ponto, como os que têm origem nesse mesmo ponto. Pela sua complexidade, na prática este método é posto de parte e substituído pelo de Boltzmann. Entretanto ele promete vir a ser de grande utilidade, principalmente no que respeita a mudanças de fluxo. Já existem publicados alguns trabalhos interessantes sobre este assunto (2).

5. A equação de Boltzmann

A equação de Boltzmann pode estabelecer-se considerando que a variação do fluxo $\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega)$ é devida a duas causas:

1) saída dos neutrões para o exterior do volume elementar $\mathbf{x}$:

(1) Cf. E. P. Wigner — *Problems of Nuclear Reactor Theory*. Symposium of the A. M. S. 1959.

(2) Cf. C. C. Grosjean — Nuovo Cim. 3 (1956), pág. 1262, as Publicações 1691-1692 — Conf. Genebra, 1958, e E. P. Wigner, Phys. Rev. 94 (1954), pág. 17.

$$-v\left(\Omega_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Omega_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\Omega_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$v=\sqrt{2E/M}$$

2) variação da velocidade (mas não da posição) dos neutrões devida às colisões:

$$\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega)$$

diminue como resultados das colisões dos neutrões que no ponto $\mathbf{x}$ possuiam energia E e velocidade segundo Ω

$$-v\,\Sigma(\mathbf{x}, E)\,\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega);$$

aumenta como resultado das colisões dos neutrões que no ponto $\mathbf{x}$ tinham energia E', diferente de E, e velocidade de direcção Ω', diferente de Ω, e por colisão passaram a ter energia E e velocidade segundo Ω

$$v\int dE'\int\Sigma(\mathbf{x}, E'\to E, \Omega'\to\Omega)\,\Phi(\mathbf{x}, E', \Omega')\,d\Omega'.$$

A variação total do fluxo neutrónico no ponto $\mathbf{x}$ é dada pela soma das expressões anteriores, e a equação de *Boltzmann* escreve-se

$$(1)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}=-v(\Omega\cdot\mathrm{grad}+\Sigma(\mathbf{x},E))\Phi(\mathbf{x},E,\Omega)+$$
$$+v\int dE'\int d\Omega'\,\Sigma(\mathbf{x}, E'\to E, \Omega'\to\Omega)\cdot$$
$$\cdot\,\Phi(\mathbf{x}, E', \Omega').$$

Aqui admite-se que

— a secção eficaz de moderação $\Sigma(\mathbf{x}, E)$ é independente da direcção Ω, excepto quando os efeitos cristalinos são sensíveis;
— a secção eficaz de transferência $\Sigma(\mathbf{x}, E'\to E, \Omega'\to\Omega)$ depende apenas do ângulo entre as direcções Ω e Ω';
— ambas as secções eficazes são independentes do tempo (hipótese de linearidade) e do ponto, excepto nas superfícies de separação de dois meios diferentes onde apresentam discontinuidades finitas;
— as superfícies de separação de meios diferente contíguos são invariáveis no tempo.

Nos casos mais simples, reactor homogéneo e nú, ambas as secções eficazes são independentes de $\mathbf{x}$ em todos os pontos do mesmo meio e identicamente nulas no vazio. Ambas as secções eficazes podem apresentar variações violentas como funções de E, ou de E e E'. A secção eficaz de transferência varia, em geral, lentamente com $\Omega\cdot\Omega'$.

Nos meios não absorventes nem multiplicativos temos a igualdade

$$(2)\quad \int dE\int d\Omega\cdot\Sigma(\mathbf{x},E'\to E,\Omega'\to\Omega)=\Sigma(\mathbf{x},E')$$

Mas se a absorpção predomina sobre a multiplicação a igualdade anterior transforma-se em desigualdade:

$$(2a)\quad \int dE\int d\Omega\cdot\Sigma(\mathbf{x},E'\to E,\Omega'\to\Omega)<\Sigma(\mathbf{x},E'),$$

passando-se o contrário

$$(2b)\quad \int dE\int d\Omega\,\Sigma(\mathbf{x},E'\to E,\Omega'\to\Omega)>\Sigma(\mathbf{x},E')$$

no caso da multiplicação neutrónica predominar.

Assim a intervenção de uma relação do tipo (2) na expressão (1) pode traduzir um processo de absorpção ou de multiplicação, como o caso da cisão.

Como se disse, a teoria do transporte para os neutrões é mais simples que a dos gases pois as equações fundamentais respectivas são lineares. Esta maior simplicidade é, até certo ponto, prejudicada pelo maior livre percurso médio[1] dos neutrões comparado com o livre percurso médio dos átomos dum gás. Este último é da ordem de 10^{-5} cm à pressão ordinária, o que permite concluir que as propriedades do gás variam muito pouco ao longo de uma distância daquela ordem de grandeza. O livre percurso médio dos neutrões é da ordem de alguns centímetros mesmo nos materiais mais compactos, donde se conclui que há uma muito maior probabilidade em um neutrão sofrer uma colisão em determinado meio para sofrer a colisão seguinte em outros meios com características muito diferentes. Além disso a grande simplificação que é legítima na teoria cinética dos gases e consiste em eliminar a dependência do fluxo da direcção Ω, não é válida no transporte neutrónico.

Mesmo considerando os casos de estacionaridade, Φ ainda depende em geral de seis variáveis, e funções com este número de variáveis independentes são dificìlmente manuseáveis em cálculo, registáveis em gráficos e visualisáveis.

É esta a razão por que se consideram situações em que se verifica um alto grau de simetria geométrica. Por um lado, como se disse, a equação do reactor, é regra geral invariante em face de uma translacção no tempo; além disso, as secções eficazes são constantes em regiões bem definidas. Nestas condições o fluxo global Φ pode ser considerado como um «puzzle» obtido a partir das diversas soluções da equação de transporte relativas às diversas regiões consideradas homogéneas, admitindo a continuidade do fluxo Φ nas superfícies de separação de dois meios distintos. Na realidade, esta maneira de proceder é bastante simplificada se as diversas regiões têm formas simétricas.

[1] O livre percurso médio duma partícula num determinado meio é a média aritmética dos trajectos que a partícula pode percorrer entre dois choques consecutivos quando se desloca nesse meio.

6. Aplicações

Terminaremos as considerações gerais contidos no parágrafo anterior com alguns exemplos práticos de aplicação da equação de transporte.

6.1. Definições

Dá-se o nome de

a) *densidade angular em fase* de uma distribuição de neutrões, e representa-se por

$$\psi(\mathbf{x}, E, \Omega, t)$$

o número de neutrões que, no instante t,

1) existem no volume unidade centrado em $\mathbf{x}$;
2) possuem energias contidas na banda de amplitude unidade centrada em E;
3) estão animados de velocidades cuja direcção é interior ao ângulo sólido unidade orientado segundo o vector unitário Ω.

De interesse equivalente é o vector

b) *corrente angular em fase*

$$\mathbf{J} = v\,\Omega \cdot \psi(\mathbf{x}, E, \Omega, t)$$

cuja intensidade é o

c) *fluxo angular em fase*

$$\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega, t)$$

já definido no parágrafo 2:

$$\mathbf{J} = \Phi\,\Omega\,.$$

Semelhantemente se consideram as noções integrais correspondentes:

a.1) *densidade*

$$\rho(\mathbf{x}, E, t) = \int \psi(\mathbf{x}, E, \Omega, t)\, d\Omega$$

b.1) *corrente*

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, E, t) = \int v\,\Omega \cdot \psi(\mathbf{x}, E, \Omega, t)\, d\Omega,$$

adoptando-se na *teoria da difusão* a designação de

c.1) *fluxo* à intensidade

$$\varphi(\mathbf{x}, E, t) = v \cdot \rho(\mathbf{x}, E, t)$$

deste vector corrente.

6. 2. Hipóteses limitativas

No que vai seguir-se consideraremos apenas uma distribuição estacionária de neutrões monoenergéticos [1]. Então teremos

densidade angular

$$\psi(\mathbf{x},\Omega)$$

corrente angular

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},\Omega)=v\,\Omega\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)$$

fluxo angular

$$\Phi(\mathbf{x},\Omega)=v\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)$$

densidade

$$\rho(\mathbf{x})=\int\psi(\mathbf{x},\Omega)\,d\Omega$$

corrente

$$\mathbf{j}(\mathbf{x})=\int v\,\Omega\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)\,d\Omega$$

fluxo

$$\varphi(\mathbf{x})=v\cdot\rho(\mathbf{x})\,.$$

6. 3. Equação de continuidade

Sob quaisquer hipóteses, a equação de transporte traduz, como se disse em 5, uma condição de continuidade da distribuição neutrónica

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{J}=q-\sigma\,,$$

sendo

$$q(\mathbf{x},E,\Omega,t)$$

densidade angular de fontes neutrónicas e

$$\sigma(\mathbf{x},E,\Omega,t)$$

densidade angular de secção eficaz de absorpção neutrónica, ambas funções características do meio ambiente.

Assim, por exemplo, *sempre em regimen estacionário* e

a) no *vácuo* a equação de transporte reduz-se a

$$\operatorname{div}[v\,\Omega\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)]=0$$

que dá

$$\Omega\cdot\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x},\Omega)=0$$

ou

$$\frac{d\psi}{ds}=0\,,$$

sendo ds tomado segundo a direcção Ω.

$$\psi(\mathbf{x},\Omega)=\psi(\mathbf{x}-s\,\Omega,\Omega)=\text{const.}:$$

a densidade angular é constante sobre a direcção Ω.

b) num *meio contendo fontes*, é

$$\operatorname{div}[v\,\Omega\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)]=q(\mathbf{x},\Omega)$$

o que dá

$$\frac{d\psi}{ds}=Q(\mathbf{x},\Omega)\qquad Q(\mathbf{x},\Omega)=\frac{1}{v}\cdot q(\mathbf{x},\Omega)$$

donde

$$\psi(\mathbf{x},\Omega)=\int_0^\infty Q(\mathbf{x}-s\,\Omega,\Omega)\,ds$$

c) Se o meio se caracteriza por

1) *densidade angular de fontes*, $q(\mathbf{x},\Omega)$;

2) *densidade angular de secção eficaz de absorpção*, σ;

dois casos ainda podemos considerar:

I — $\sigma=\text{const}$:

$$\Omega\cdot\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x},\Omega)=Q(\mathbf{x},\Omega)-\sigma\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)\,.$$

Como

$$e^{\sigma\mathbf{x}\cdot\Omega}[\Omega\cdot\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x},\Omega)+\sigma\psi(\mathbf{x},\Omega)]=Q(\mathbf{x},\Omega)\,e^{\sigma\mathbf{x}\cdot\Omega}$$

vem

$$\Omega\cdot\operatorname{grad}[e^{\sigma\mathbf{x}\cdot\Omega}\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)]=Q(\mathbf{x},\Omega)\,e^{\sigma\mathbf{x}\cdot\Omega}$$

ou

$$e^{\sigma\mathbf{x}\cdot\Omega}\cdot\psi(\mathbf{x},\Omega)=\int_0^\infty Q(\mathbf{x}-s\,\Omega,\Omega)\,e^{\sigma(\mathbf{x}-s\Omega)\cdot\Omega}\,ds$$

ou ainda

$$\psi(\mathbf{x},\Omega)=\int_0^\infty Q(\mathbf{x}-s\,\Omega,\Omega)\,e^{-\sigma s}\,ds\,.$$

II — σ função de ponto, $\sigma(\mathbf{x})$:

Cálculo semelhante dá [1]

$$\psi(\mathbf{x},\Omega)=\int_0^\infty Q(\mathbf{x}-s\,\Omega,\Omega)\,e^{-\int_0^s\sigma(\mathbf{x}-t\Omega)\,dt}\,ds\,.$$

d) Consideremos finalmente o caso de o meio se caracterizar por

1) densidade angular de fontes $q(\mathbf{x},\Omega)$;

2) densidade angular de secção eficaz de colisão (não puramente absorvente), $\sigma(\mathbf{x})$;

3) número médio $c(\mathbf{x})$ de neutrões secundários emitidos depois da colisão em $\mathbf{x}$ de *um* neutrão,

4) fracção $f(\mathbf{x},\Omega'\to\Omega)\,d\Omega'$ de neutrões emitidos na direcção Ω depois da colisão em $\mathbf{x}$ de *um* neutrão que seguia segundo a direcção Ω';

---

(1) É evidente que estas condições se verificam apenas na ausência de colisões dos neutrões com partículas, que provocariam diminuição da energia cinética.

(1) Cf. K. M. CASE, F. HOFFMAM, G. PLACZEC — *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion*, Vol. I, Los Alamos, 1953.

a equação de transporte escreve-se agora

1) $\Omega \cdot \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}, \Omega) = Q(\mathbf{x}, \Omega) - \sigma(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}, \Omega) +$
$$+ c(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) \int \psi(\mathbf{x}, \Omega') \cdot f(\mathbf{x}, \Omega' \to \Omega)\, d\Omega .$$

Admitindo que o segundo membro resulta de uma «fonte generalizada» temos

$$\psi(\mathbf{x}, \Omega) = \int_0^\infty K(\mathbf{x} - s\,\Omega, \Omega)\, e^{-\int_0 \sigma(\mathbf{x} - t\Omega)dt}\, ds ,$$

com

$$v \cdot K(\mathbf{x}, \Omega) = [Q(\mathbf{x}, \Omega) +$$
$$+ c(\mathbf{x}) \cdot \sigma(\mathbf{x}) \cdot \int \psi(\mathbf{x}, \Omega') \cdot f(\mathbf{x}, \Omega' \to \Omega)\, d\Omega'] \cdot v ,$$

densidade angular de fonte generalizada.

6.4. Difusão anisótropa

Em certos casos simples a expressão 1) pode conduzir a cálculo fácil.

Por vezes torna-se, porém, preferível integrar directamente a equação de difusão.

É o caso do exemplo que vamos tratar.

Suponhamos que a função $f(\mathbf{x}, \Omega' \to \Omega)$ é desenvolvível em série de funções harmónicas esféricas,

$$f(\mathbf{x}, \Omega' \to \Omega) = \sum_l f_l(\mathbf{x})\, P_l(\cos\theta) ;$$

fazendo

$$s_l = \frac{4\pi}{2l+1} \sigma c f_l$$

e

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{-l}^{l} Y_{lm}(\Omega)\, Y_{lm}^*(\Omega')$$

a equação 1) torna-se

B) $\Omega \cdot \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}, \Omega) + \sigma(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}, \Omega) = Q(\mathbf{x}, \Omega) +$
$$+ \int \psi(\mathbf{x}, \Omega') \sum_l s_l(\mathbf{x}) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\Omega)\, Y_{lm}^*(\Omega')$$

e o desenvolvimento

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \Omega' \to \Omega) = \sum_l s_l(\mathbf{x})\, P_l(\cos\theta) =$$
$$= \sum_l s_{l'}(\mathbf{x}) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\Omega)\, Y_{lm}^*(\Omega')$$

representa a secção eficaz macroscópica de difusão.

Admitindo, além disso, que são possíveis todas as integrações necessárias aos cálculos, multipliquemos ambos os membros por $Y_{lm}^*(\Omega)\, d\Omega$ e integremos sobre Ω:

a) Para o último termo,

$$\int \psi(\mathbf{x}, \Omega') \sum_{l'} s_{l'} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\Omega)\, Y_{l'm'}^*(\Omega')\, Y_{lm}^*(\Omega)\, d\Omega'\, d\Omega =$$
$$= s_l(\mathbf{x}) \int \psi(\mathbf{x}, \Omega')\, Y_{lm}^*(\Omega')\, d\Omega'$$

e, para que o resultado tenha sentido, torna-se necessário que

$$\psi(\mathbf{x}, \Omega) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m'=-l}^{l} \psi_{lm}(\mathbf{x})\, Y_{lm}(\Omega)$$

isto é, que $\psi(\mathbf{x}, \Omega)$ seja desenvolvível em série de funções harmónicas esféricas.

Então

$$s_l(\mathbf{x}) \int \psi(\mathbf{x}, \Omega')\, Y_{lm}^*(\Omega')\, d\Omega' =$$
$$= s_l(\mathbf{x}) \int \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l} \psi_{l'm'}(\mathbf{x}) \cdot Y_{l'm'}(\Omega')\, Y_{lm}^*(\Omega')\, d\Omega' =$$
$$= s_l(\mathbf{x})\, \psi_{lm}(\mathbf{x}) .$$

b) Nas mesmas condições

$$\int Q(\mathbf{x}, \Omega)\, Y_{lm}^*(\Omega)\, d\Omega = Q_{lm}(\mathbf{x})$$
$$\int \sigma(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x}, \Omega)\, Y_{lm}^*(\Omega)\, d\Omega = \sigma(\mathbf{x})\, \psi_{lm}(\mathbf{x})$$

c) o cálculo do primeiro termo é mais trabalhoso

$$\Omega \operatorname{grad} \psi = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) \frac{\partial \psi_{lm}}{\partial x}$$

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{i}{2} \operatorname{sen}\theta\, (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) \frac{\partial \psi_{lm}}{\partial y}$$

donde

$$\Omega \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right\} \psi_{lm} +$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right\} \psi_{lm} +$$
$$+ \cos\theta \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) \frac{\partial \psi_{lm}}{\partial z} .$$

Mas, fazendo $\cos\theta = \omega$, temos

$$e^{i\varphi} (1 - \omega^2)^{1/2}\, Y_{lm}(\Omega) =$$
$$= \left[\frac{(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+3)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l+1\,m+1}(\Omega) -$$
$$- \left[\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1\,m+1}(\Omega)$$

$$e^{-i\varphi}(1-\omega^2)^{1/2}\,Y_{lm}(\Omega)=$$
$$=\left[\frac{(l+m-1)\,(l+m)}{(2l+1)\,(2l-1)}\right]^{1/2} Y_{l-1m-1}(\Omega)-$$
$$-\left[\frac{(l-m+2)\,(l-m+1)}{(2l+1)\,(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1m-1}(\Omega)$$

$$\omega\,Y_{lm}(\Omega)=\left[\frac{(l+m)\,(l-m)}{(2l+1)\,(2l-1)}\right]^{1/2} Y_{l-1m}(\Omega)-$$
$$-\left[\frac{(l-m+1)\,(l+m+1)}{(2l+3)\,(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l+1m}(\Omega)$$

Então

$$\int \Omega\cdot\operatorname{grad}\psi\cdot Y^*_{lm}(\Omega)\,d\Omega=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{l'}\sum_{m'}\left[\frac{(l'+m'+2)\,(l'+m'+1)}{(2l'+3)\,(2l'+1)}\right]^{1/2} Y_{l'+1m'+1}(\Omega)$$
$$Y^*_{lm}(\Omega)\left\{\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l'm'}\,d\Omega+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l'}\sum_{m'}\left[\frac{(l'+m'-1)\,(l'+m')}{(2l'+1)\,(2l'-1)}\right]^{1/2} Y_{l'-1m'-1}(\Omega)$$
$$Y^*_{lm}(\Omega)\left\{\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l'm'}\,d\Omega-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{l'}\sum_{m'}\left[\frac{(l'-m'-1)\,(l'-m')}{(2l'-1)\,(2l'+1)}\right]^{1/2} Y_{l'-1m'+1}(\Omega)$$
$$Y^*_{lm}(\Omega)\left\{\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l'm'}\,d\Omega-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{l'}\sum_{m'}\left[\frac{(l'-m'+2)\,(l'-m'+1)}{(2l'+1)\,(2l'+3)}\right]^{1/2} Y_{l'+1m'+1}(\Omega)$$
$$Y^*_{lm}(\Omega)\left\{\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l'm'}\,d\Omega+$$
$$+\sum_{l'}\sum_{m'}\left[\frac{(l'+m')\,(l'-m')}{(2l'+1)\,(2l'-1)}\right]^{1/2} Y_{l'-1m'}(\Omega)$$
$$Y^*_{lm}(\Omega)\frac{\partial\psi_{l'm'}}{\partial z}\,d\Omega=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(l+m)\,(l+m-1)}{(2l+1)\,(2l-1)}\right]^{1/2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l-1m-1}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{(l+m+1)\,(l+m+2)}{(2l+1)\,(2l+3)}\right]^{1/2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l+1m+1}-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{(l-m+1)\,(l-m+2)}{(2l+1)\,(2l+3)}\right]^{1/2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l+1m-1}-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{(l-m)\,(l-m-1)}{(2l-1)\,(2l+1)}\right]^{1/2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right\}\psi_{l-1m+1}+$$
$$+\left[\frac{(l+m+1)\,(l-m+1)}{(2l+3)\,(2l+1)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial z}\psi_{l+1m}+$$
$$+\left[\frac{(l-m)\,(l+m)}{(2l+1)\,(2l-1)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial z}\psi_{l-1m}\,.$$

A equação B') transforma-se no sistema

$$(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(l+m)\,(l+m-1)}{(2l+1)\,(2l-1)}\right]^{1/2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{l-1m-1}+$$
$$+(-1)^{m+1}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(l+m+1)\,(l+m+2)}{(2l+1)\,(2l+3)}\right]^{1/2}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{l+1m+1}-$$
$$-(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(l-m+1)\,(l-m+2)}{(2l+1)\,(2l+3)}\right]^{1/2}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{l+1m-1}-$$
$$-(-1)^{m+1}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(l-m)\,(l-m+1)}{(2l-1)\,(2l+1)}\right]^{1/2}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{l-1m+1}+$$
$$+(-1)^m\left[\frac{(l+m+1)\,(l-m+1)}{(2l+1)\,(2l+3)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial z}\psi_{l+1m}+$$
$$+(-1)^m\left[\frac{(l-m)\,(l+m)}{(2l-1)\,(2l+1)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial z}\psi_{l-1m}+$$
$$+(-1)^m\,\sigma(\mathbf{x})\cdot\psi_{lm}(\mathbf{x})=$$
$$=(-1)^m s_l(\mathbf{x})\,\psi_{lm}(\mathbf{x})+(-1)^m Q_{lm}(\mathbf{x})\,.$$

Admitamos, como aproximação, que a secção eficaz de difusão tem uma anisotropia de primeira ordem, isto é que

$$\Sigma_s=s_0(\mathbf{x})\,P_0(\cos\theta)+s_1(\mathbf{x})\,P_1(\cos\theta)$$

e que estes dois termos têm influência não desprezável apenas nos termos de ψ que correspondem a uma aproximação de segunda ordem ; nestas condições

$$\psi(\mathbf{x},\Omega)=\psi_{00}Y_{00}+\psi_{11}Y_{11}+\psi_{10}Y_{10}+\psi_{1-1}Y_{1-1}+\psi_{22}Y_{22}+$$
$$+\psi_{21}Y_{21}+\psi_{20}Y_{20}+\psi_{2-1}Y_{2-1}+\psi_{2-2}Y_{2-2};$$

a) o fluxo de neutrões é

$$\rho=\int\psi(\mathbf{x},\Omega)\,d\Omega=\sqrt{4\pi}\,\psi_{00}$$

b) a corrente tem as componentes

$$j_x=\int\psi\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,d\Omega=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(\psi_{1-1}-\psi_{11})$$

$$j_y=\int\psi\cdot\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,d\Omega=-i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(\psi_{1-1}+\psi_{11})$$

$$j_z=\int\psi\cos\theta\,d\Omega=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\psi_{10}$$

c) os momentos são

$$P = \int \psi \operatorname{sen}^2\theta \cos 2\varphi \, d\Omega = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\psi_{22} + \psi_{2-2})$$

$$Q = \int \psi \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen} 2\varphi \, d\Omega = -i \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\varphi_{2-2} - \psi_{22})$$

$$R = \int \psi \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\varphi \, d\Omega = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\psi_{2-1} - \psi_{21})$$

$$S = \int \psi \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, d\Omega = -i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\psi_{2-1} + \psi_{21})$$

$$T = \int \psi \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) \, d\Omega = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \psi_{20}.$$

Obtemos então

$$\psi_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \rho \qquad \psi_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (j_x - i j_y)$$

$$\psi_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (j_x + i j_y) \qquad \psi_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} j_z$$

$$\psi_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (P - i Q) \qquad \psi_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (P + i Q)$$

$$\psi_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} (R - i S) \qquad \psi_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (R + i S)$$

$$\psi_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} T.$$

$$4\pi\psi(\mathbf{x}, \Omega) = \rho + \frac{3}{2} (j_x - i j_y) \operatorname{sen}\theta \, e^{i\varphi} + 3 j_z \cos\theta +$$

$$+ \frac{3}{2} (j_x + i j_y) \operatorname{sen}\theta \, e^{-i\varphi} + \frac{15}{8} (P - i Q) \operatorname{sen}^2\theta \, e^{2i\varphi} +$$

$$+ \frac{15}{2} (R - i S) \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, e^{i\varphi} + \frac{5}{2} T (3\cos^2\theta - 1) +$$

$$+ \frac{15}{2} (R + i S) \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, e^{-i\varphi} +$$

$$+ \frac{15}{8} (P + i Q) \operatorname{sen}^2\theta \, e^{-2i\varphi} =$$

$$= \rho + 3\Omega \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \frac{15}{4} (P\cos 2\varphi + Q \operatorname{sen} 2\varphi) \operatorname{sen}^2\theta +$$

$$+ 15 (S\cos\varphi + R \operatorname{sen}\varphi) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \frac{5}{2} T (3\cos^2\theta - 1).$$

Por outro lado, a função $K(\mathbf{x}, \Omega)$ toma a forma

$$K(\mathbf{x}, \Omega) = \sum_{lm} Q_{lm}(\mathbf{x}) Y_{lm}(\Omega) + \sum_{pq} s_p(\mathbf{x}) \psi_{pq}(\mathbf{x}) Y_{pq}(\Omega) =$$

$$= Q(\mathbf{x}, \Omega) + s_0 \psi_{00} Y_{00} + s_1 \sum_m \psi_{1m}(\mathbf{x}) Y_{1m}(\Omega) =$$

$$= Q(\mathbf{x}, \Omega) + \frac{1}{4\pi} s_0(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) + \frac{3}{4\pi} s_1(\mathbf{x}) \cdot \Omega \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}).$$

$$p = 0,1$$

Suponhamos agora que (além das hipóteses já admitidas) o meio é homogéneo, isto é que

$$Q(\mathbf{x}) = \text{const} \qquad \sigma(\mathbf{x}) = \text{const}.$$

Então

$$K(\mathbf{x}, \Omega) = Q + \frac{s_0}{4\pi} \rho(\mathbf{x}) + \frac{3 s_1}{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})$$

e o sistema A) dá

$$\psi_{00}(\mathbf{x}) = \int Y_{00} \, d\Omega \int_0^\infty K(\mathbf{x} - R\Omega, \Omega) \, e^{-\sigma R} \, dR$$

$$\psi_{11}(\mathbf{x}) = \int Y_{11} \, d\Omega \int_0^\infty K(\mathbf{x} - R\Omega, \Omega) \, e^{-\sigma R} \, dR$$

$$\psi_{10}(\mathbf{x}) = \int Y_{10} \, d\Omega \ldots$$

$$\psi_{1-1}(\mathbf{x}) = \int Y_{1-1} \, d\Omega \ldots$$

$$\psi_{22}(\mathbf{x}) = \int Y_{22} \, d\Omega \ldots$$

$$\psi_{21}(\mathbf{x}) = \int Y_{21} \, d\Omega \ldots$$

$$\psi_{20}(\mathbf{x}) = \int Y_{20} \, d\Omega \ldots$$

$$\psi_{2-1}(\mathbf{x}) = \int Y_{2-1} \, d\Omega \ldots$$

$$\psi_{2-2}(\mathbf{x}) = \int Y_{2-2} \, d\Omega \ldots;$$

É um sistema de equações integrais.

Mas a determinação das funções $\rho(\mathbf{x})$ e $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ faz-se fàcilmente utilizando os resultados de B).

Com efeito, sempre nas condições previstas, B pode escrever-se

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = (s_0 - \sigma) \rho + \sqrt{4\pi} \, Q_{00}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) (\rho - T) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) (P - i Q) +$$

$$+ 3 \frac{\partial}{\partial z} (R - i S) = 3 (s_1 - \sigma) (j_x - i j_y)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\rho-T)+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)+$$
$$+3\frac{\partial}{\partial z}(R+iS)=3(s_1-\sigma)(j_x+ij_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho+2T)+3\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}\right)=3(s_1-\sigma)j_z$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(j_x-ij_y)+\frac{5}{2}\sigma\cdot(P-iQ)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(j_x+ij_y)+\frac{5}{2}\sigma\cdot(P+iQ)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}j_x+\frac{\partial}{\partial y}j_y-2\frac{\partial}{\partial z}j_z\right)=5\sigma\cdot T$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)j_z+\frac{\partial}{\partial z}(j_x-ij_y)+5\sigma(R-iS)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)j_z+\frac{\partial}{\partial z}(j_x+ij_y)+5\sigma(R+iS)=0$$

ou

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=(s_0-\sigma)\rho+\sqrt{4\pi}\,Q_{00}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\rho-T)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial z}=(s_1-\sigma)j_x$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\rho-T)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial S}{\partial z}=(s_1-\sigma)j_y$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\rho+2T)+\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}\right)=(s_1-\sigma)j_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_x-\frac{\partial}{\partial y}j_y+\frac{5}{2}\sigma\cdot P=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}j_x+\frac{\partial}{\partial x}j_y+\frac{5}{2}\sigma\cdot Q=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_x+\frac{\partial}{\partial y}j_y-2\frac{\partial}{\partial z}j_z=5\sigma T$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_z+\frac{\partial}{\partial z}j_x+5\sigma R=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}j_z+\frac{\partial}{\partial z}j_y+5\sigma S=0$$

ou ainda

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=(s_0-\sigma)\rho+\sqrt{4\pi}\,Q_{00}$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{grad}\rho(\mathbf{x})-\frac{1}{5\sigma}\Delta\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x})-$$
$$-\frac{1}{15\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{x})=(s_1-\sigma)\,\mathbf{j}(\mathbf{x}).$$

Mas, por outro lado temos

$$Q=Q(\mathbf{x})=\int Q(\mathbf{x},\Omega)\,d\Omega=$$
$$=\int Q_{lm}(\mathbf{x})\,Y_{lm}(\Omega)\,Y_{00}\sqrt{4\pi}\,d\Omega=\sqrt{4\pi}\,Q_{00}$$

e

$$\mu=\frac{\int\cos\theta\,\Sigma_s(\Omega'\to\Omega)\,d\Omega}{\int\Sigma_s(\Omega'\to\Omega)\,d\Omega}=\frac{s_1}{s_0}\qquad s_0=\sigma_s$$

sendo também

$$\sigma=\sigma_{tot}=\sigma_a+\sigma_s.$$

Portanto

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=-\sigma_a\rho+Q$$

$$\mathbf{j}=-D\left[\operatorname{grad}\rho-\frac{4}{5\sigma}\Delta\cdot\mathbf{j}-\frac{1}{5\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{j}\right]$$

donde

$$D=\frac{1}{3(\sigma-\sigma_s\bar{\mu})}=\frac{1}{3\,\Sigma_{tr}}.$$

Então

$$-\sigma_a\rho+Q=-D\left[\Delta\rho-\frac{4}{5\sigma}\Delta\operatorname{div}\mathbf{j}\right]$$

e, como $Q=\text{const.}$

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{j}=-\sigma_a\rho+Q\\ -D\left(1+\dfrac{4\sigma_a}{5\sigma}\right)\Delta\rho=-\sigma_a\rho+Q.\end{cases}$$

Concluimos assim que as expressões de $\rho(\mathbf{x})$ e $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ são as das fórmulas clássicas relativas à teoria da difusão, mas correspondente agora ao novo valor do coeficiente de difusão

$$D'=\frac{1}{3(\sigma-\sigma_s\bar{\mu})}\left(1+\frac{4\sigma_a}{5\sigma}\right).$$

(Continua)

Resolução de sistemas de equações lineares determinados

por F. Teixeira de Queiroz

Algoritmos resolventes

Seja

$$(1)\quad \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n + d_n = 0 \end{array}$$

um sistema de n equações lineares a n incógnitas, determinado, que representaremos com a forma matricial

$$(1')\quad C \cdot X + D = 0 \qquad |C| \neq 0$$

fazendo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} X^* = [x_1\, x_2 \cdots x_n] \\ D^* = [d_1\, d_2 \cdots d_n] \end{array}$$

Conhecida a matriz C^{-1}, inversa de C, o sistema (1) admitirá a solução

$$(2)\qquad X = -C^{-1} \cdot D$$

Porém, na prática, os diferentes algoritmos que resolvem o sistema (1) obtêm-se, não pelo cálculo de C^{-1}, mas decompondo a matriz C no produto de duas matrizes triangulares A e B, em que uma é triangular esquerda e a outra é triangular direita. Como cada uma destas matrizes tem $\dfrac{n(n+1)}{2}$ coeficientes que podem ser não nulos, há, na decomposição da matriz C, n elementos arbitrários.

De

$$(3)\quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

vemos que terá de ser

$$c_{ij} = \sum_{k \leqq i,j} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

ou seja

$$(4)\quad \begin{array}{l} a_{ij} = 1/b_{jj} \cdot \left(c_{ij} - \sum\limits_{k<j} a_{ik} \cdot b_{kj}\right) \\ b_{ij} = 1/a_{ii} \cdot \left(c_{ij} - \sum\limits_{k<i} a_{ik} \cdot b_{kj}\right) \end{array}$$

A decomposição

$$(4')\quad a_{ii} \cdot b_{ii} = c_{ii} - \sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{ki}$$

é arbitrária, o que confirma a conclusão a que chegamos anteriormente de que, na decomposição da matriz C existem n elementos arbitrários. Vemos, também, que tanto a_{ii} como b_{ii} terão de ser diferentes de zero para que a decomposição seja possível. É condição necessária e suficiente para que isso se verifique que alguma cadeia de menores principais da matriz C não tenha elementos nulos. Verificada uma tal condição a decomposição de C não oferece a menor dificuldade.

Decompõe-se c_{11} e em seguida calcula-se a primeira coluna de A e a primeira linha de B, por meio de (4). Decompõe-se em seguida, por meio de (4'), o elemento c_{22} e calculam-se a segunda coluna de A a segunda linha de B, etc.

O cálculo das inversas de A e de B também não oferece dificuldade de maior o mesmo se dizendo da inversa de C, a qual é dada por

$$C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Não é preciso, porém, conhecer esta para resolver o sistema (1'). Com efeito, fazendo em

$$C \cdot X = A \cdot B \cdot X = -D ,$$

$$(5') \qquad B \cdot X = Y$$

teremos

$$(5') \qquad A \cdot Y + D = 0$$

O sistema (1) aparece decomposto nos sistemas

$$(5) \quad \begin{array}{l} a_{11} \cdot y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + d_1 = 0 \\ a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 \qquad\qquad\quad + d_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \cdots + a_{nn} \cdot y_n + d_n = 0 \end{array}$$

e

$$(5) \quad \begin{array}{r} b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 + \cdots + b_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ b_{22} \cdot x_2 + \cdots + b_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{nn} \cdot x_n = y_n \end{array}$$

que se resolvem duma forma imediata.

Conhecida a inversa da matriz A podemos ainda transformar o sistema (1') no sistema equivalente, de resolução imediata,

$$(6') \qquad B \cdot X + A^{-1} \cdot D = 0 .$$

É na formação deste sistema que se baseiam os diferentes algoritmos resolventes do sistema (1).

Se em vez de decompormos em matrizes triangulares a matriz C, decompusermos a matriz de ordem $n+1$, obtida daquela pela ampliação duma coluna com os termos independentes e duma linha com os mesmos termos transpostos, teremos

$$\begin{bmatrix} C & D \\ D & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ Y' & U' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & Y \\ O & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & AY \\ YB & Y'Y + U'U \end{bmatrix}$$

o que mostra ser

$$C = A \cdot B \quad \text{e} \quad Y = A^{-1} \cdot D$$

e ainda que o sistema (6') se estabelece, duma forma imediata, sem ser necessário o cálculo de A^{-1}.

É baseado nesta decomposição, que aqui establecemos para sistemas de equações, simétricos ou não, que se constroem os algoritmos de GAUSS-DOOLITLE e de CHOLESKI. Eles distinguem-se um do outro apenas pela forma como decompõem os elementos da diagonal. Enquanto no primeiro se toma $b_{ii} = 1$ e, portanto

$$a_{ii} = c_{ii} - \sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{ki}$$

no segundo faz-se

$$a_{ii} = b_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{ki}} .$$

Tais decomposições simplificam muito, no caso de sistemas simétricos, o cálculo das matrizes auxiliares A e B. Com efeito no algoritmo de GAUSS será $A^* = S \cdot B$, em que S é a matriz diagonal formada pelos elementos da diagonal de C. Com a notação de GAUSS será

$$\begin{bmatrix} A & O \\ Y' & U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [aa] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ [ab] & [bb,1] & 0 & \cdots & 0 \\ [ac] & [bc,1] & [cc,2] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [an] & [bn,1] & [cn,2] & \cdots & [nn,u] \end{bmatrix}$$

No algoritmo de CHOLESKI teremos $A^* = B$.

BANACHIEWICZ determina, com o auxílio de cracovianos (que não se distinguem das matrizes a não ser por o produto se fazer coluna por coluna), a inversa da matriz $\begin{bmatrix} C^* & O \\ D^* & I \end{bmatrix}$. É fácil de verificar que

$$\begin{bmatrix} C^* & O \\ D^* & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C^{*-1} & O \\ X^* & I \end{bmatrix} = I$$

O cálculo da inversa referida dá-nos assim na última linha, a solução desejada. Da decomposição em matrizes triangulares de

$$\begin{bmatrix} C & D \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & Y \\ O & I \end{bmatrix}$$

resulta que

$$\begin{bmatrix} C^* & O \\ D^* & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & O \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B^* & O \\ Y^* & I \end{bmatrix}^{-1}$$

e portanto que

$$\begin{bmatrix} B^* & O \\ Y^* & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C^{*-1} & O \\ X^* & I \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} A^* C^{*-1} & O \\ X^* & I \end{bmatrix}$$

Esta última matriz dar-nos-á, também, na última linha a solução pedida.

Decomposição dum sistema de equações

Como ANDERSEN mostrou o número de operações necessárias para resolver um sistema de equações lineares é sensìvelmente proporcional ao cubo do número de incógnitas (*). Como consequência será muito morosa a resolução de sistemas com mais de meio cento de incógnitas. Por outro lado a resolução de tais sistemas por meio de calculadores electrónicos torna-se difícil por necessitar a utilização de programações que em geral não estão construidas.

Estas razões levam-nos à pesquisa de métodos de decomposição do sistema de equações, noutros de menor número de incógnitas de tal forma que passa a ser possível quer a utilização de programações para a resolução de sistemas com um menor número de incognitas quer a distribuição do trabalho por uma equipe de calculadores.

A possibilidade de utilizar tais métodos é consequência de, em geral, as equações dos sistemas a resolver terem muito poucas incógnitas cada uma, (ou por outras palavras, a matriz do sistema ter muitos zeros).

Admitiremos que a matriz do sistema tem a forma

$$(7') \qquad C = \begin{bmatrix} S_1 & P_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & S_2 & P_2 & 0 \\ 0 & Q_3 & S_3 & P_3 \\ 0 & 0 & Q_4 & S_4 \end{bmatrix}$$

em que S_1, S_2, S_3, e S_4 são matrizes quadradas (havendo vantagem em que as matrizes S_2 e S_3 sejam de pequena ordem).

Há vários métodos para decompor o sistema (1′) quando a matriz é da forma (7′). Os mais importantes são os de BOLTZ e os de PRANIS PRANIEWICH.

BOLTZ dá-nos dois métodos de decomposição ambos baseados no cálculo das matrizes inversas

$$\begin{bmatrix} S_1 & P_1 \\ Q_2 & S_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_3 & P_3 \\ Q_4 & S_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

as quais podem ser determinadas simultaneamente por dois calculadores.

Multiplicando à esquerda o sistema (1′), em que C é dado por (7′), pela matriz

(*) A resolução pelo método de CRAMER levaria a cerca de n^4 operações.

$$(8') \qquad R_1 = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & G & H \end{bmatrix}$$

somos conduzidos ao sistema equivalente

$$(9') \qquad \begin{bmatrix} I & 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & I & Z_2 & 0 \\ 0 & Z_3 & I & 0 \\ 0 & Z_4 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_1 \\ D'_2 \\ D'_3 \\ D'_4 \end{bmatrix}$$

em que $Z_1 = B \cdot P_2$, $Z_2 = D \cdot P_2$, $Z_3 = E \cdot Q_3$ e $Z_4 = G \cdot Q_3$. Boltz chama a estes coeficientes os correlativos de ligação.

O sistema não simétrico, (9′), pode agora ser resolvido nas variáveis X_2 e X_3 e, em seguida, por substituição, nas variáveis X_1 e X_4. É nisso que consiste o método de substituição de Boltz. Se designarmos por $\begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{bmatrix} I & Z_2 \\ Z_3 & I \end{bmatrix}$ o sistema (9′) resolver-se-á multiplicando consecutivamente à esquerda pelas matrizes

$$(10') \qquad R_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & -Z_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -Z_4 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Caso se deseje determinar a inversa da matriz C, ela ser-nos-á dada por

$$C^{-1} = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 .$$

Porém a não ser que esta seja explicitamente pedida não é preciso calculá-la para resolver o sistema de equações lineares.

As matrizes Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4 são soluções das equações matriciais

$$\begin{bmatrix} S_1 & P_1 \\ Q_2 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} S_3 & P_3 \\ Q_4 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que as matrizes incógnitas e termos independentes têm o mesmo número de linhas e colunas. Por decomposição em matrizes triangulares das matrizes

$$\begin{bmatrix} S_1 & P_1 & 0 & D_1 \\ Q_2 & S_2 & P_2 & D_2 \\ 0 & P_2 & I & 0 \\ D_1 & D_2 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} S_3 & P_3 & Q_3 & D_3 \\ Q_4 & S_4 & 0 & D_4 \\ Q_3 & 0 & I & 0 \\ D_3 & D_4 & 0 & I \end{bmatrix}$$

determinam-se os Z e os D'.

Este método de decomposição dum sistema de equações lineares com um grande número de incógnitas é válido para sistemas simétricos e não simétricos. Porém, no caso de sistemas simétricos há a possibilidade de utilizar outros métodos que simplificam o cálculo. Os mais importantes são o de desenvolvimento de Boltz e o de Pranis Praniewich.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Marchand, *La compensation des mesures surabondantes.*

[2] Levalois, *Compensation des réseaux géodésiques par la métode des gisements*, Bol. de géodésie (1947).

[3] E. Andersen, *Solution of great systems of normal equations*, Bol. de géodésie (1950).

Entropia e distribuições contínuas

por João Tiago Praça Nunes Mexia

1. Introdução

Em [1] foi já exposta a teoria da entropia para variáveis aliatórias discretas, pelo que nos limitaremos a recordar os principais resultados.

Sejam $A_1 \cdots A_i \cdots$ os acontecimentos elementares dum sistema completo que correspondem aos números observados $a_1 . \cdots a_i \cdots$ e $p_1 \cdots p_i \cdots$ as probabilidades respectivas. A entropia do processo casual em questão é nos dada por:

$$(1) \qquad H = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log_2 p_i \text{*}$$

Onde se faz a convenção de por:

$$(2) \qquad p_i \log_2 p_i = 0 \text{ se } p_i = 0$$

Seja $F(x)$ a função de distribuição da nossa variável aliatória. Vê-se fàcilmente que se trata duma função em escada com saltos de valor $p_1 \cdots p_i \cdots$ nos pontos $a_1 \cdots a_i \cdots$. Tem-se portanto um funcional $H[F]$ que à função em escada com o conjunto de saltos $p_1 \cdots p_i \cdots$ faz corresponder o valor de H dado por (1).

Em [3] mostra-se que o conjunto das funções de distribuição em escada é denso, para a topologia da convergência uniforme, no espaço das funções de distribuição. É natural portanto que surja a ideia de prolongar por continuidade o funcional $H[F]$ de modo a obter uma teoria geral da entropia.

(*) Foi Wiener que em [4] propôs tomar-se a base 2.

O objectivo desta nota é:

Mostrar que tal prolongamento, por continuidade, é impossível.

2. Considerações heurísticas

Comecemos por considerar o exemplo seguinte:

Seja $f(x)$ uma função de densidade contínua não nula no intervalo $[0,1]$. Efectuemos uma partição do intervalo $[0,1]$ em «n» intervalos iguais. Devido ao teorema do valor médio a probabilidade de cada intervalo é:

$$(3) \qquad p_i = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = f(x_i)\frac{1}{n}$$

com

$$\frac{i-1}{n} \leq x_i \leq \frac{i}{n}$$

Consideremos agora uma variável aliatória discreta que toma um valor a_i no intervalo $\left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ com a probabilidade p_i. A entropia desta variável aliatória é, devido a (1) e a (3):

$$H_n = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\log_2\left[f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\right] = $$
$$= -\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\log_2 f(x_i) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

Quando o módulo da nossa decomposição do intervalo tende para zero a função de distribuição da nossa variável aliatória discreta tende uniformemente para a função de distribuição que tem $f(x)$ por derivada. Vejamos portanto o limite de H_n quando n tende para $+\infty$.

Por outro lado:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\cdot\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}$$

Como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(x)\,dx=1$$

Tem-se:

$$\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$$

Verifica-se igualmente que:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}\cdot\log_2 f(x_i)=$$
$$=E(\log_2 f(x)),$$

onde $E(\log_2 f(x))$ é a esperança matemática de $\log_2 f(x)$.

Pelo que:

$$H_n\to+\infty$$

Actualmente costuma usar-se para o estudo da entropia no caso contínuo a expressão:

$$\cdots H^1=E(\log_2 f(x)). \tag{4}$$

As considerações heurísticas que se fizeram não justificam a fórmula (4).

Além disso se formos calcular o valor da entropia para a distribuição uniforme no intervalo $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ obtemos:

$$H^1=-\log_2 3<0.$$

Este exemplo mostra-nos que através do uso da fórmula (4) podemos vir a obter entropias negativas.

Se interpretarmos a entropia como uma medida de incerteza seriamos levados a admitir a existência de incertezas negativas o que não é de aceitar.

3. Tratamento rigoroso

As considerações heurísticas do parágrafo precedente necessitam de ser completadas por um tratamento rigoroso do problema.

Vamos mostrar que: *dada uma sucessão qualquer de funções de distribuição em escada que tenda uniformemente para uma função de distribuição contínua a sucessão das suas entropias diverge para $+\infty$ necessàriamente.* Este resultado é, como é fácil de ver, sugerido pelo exemplo que analisamos no parágrafo anterior.

Comecemos por considerar uma função contínua $f(x)$ e uma função $f_1(x)$ que tenha um salto «d» no ponto $\bar{x}$ tem-se:

$$\operatorname{Max}\left\{|f(\bar{x})-f_1(\bar{x}^+)|,|f(\bar{x})-f_1(\bar{x}^-)|\right\}\geq\frac{d}{2},$$

e portanto

$$\operatorname{Sup}\ |f(x)-f_1(x)|\geq\frac{d}{2}.$$

Se fôr $\{F_n(x)\}$ uma sucessão de funções de distribuição em escada que tenda uniformemente para uma função de distribuição contínua e se representarmos o maior salto de $F_n(x)$ por «s_n» terá de se ter:

$$s_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{7}$$

Por outro lado quaisquer que sejam os inteiros «a» e «b» tais que $a<b$ tem-se, desde que os p_i sejam positivos e menores que a unidade:

$$(8)\quad -\sum_{i=a}^{b} p_i \log_2 p_i \geqq -\left(\sum_{i=a}^{b} p_i\right)\log_2\left(\sum_{i=a}^{b} p_i\right),$$

pois, qualquer que seja i:

$$\log_2 p_i \leqq \log_2\left(\sum_{i=a}^{b} p_i\right).$$

Seja $\{p_i^{(n)}\}$ o conjunto dos saltos de $F_n(x)$. Devido a (7) tem-se que qualquer que seja o natural m existe um natural N tal que para n maior que N tem-se, qualquer que seja i:

$$(9)\qquad p_i^{(n)} < \frac{1}{2m}.$$

Por outro lado como, qualquer que seja n, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^{(n)}$ é uma série absolutamente convergente de soma 1 tem-se que para n maior que N qualquer que seja o natural «j» compreendido entre «o» e «m» existe um natural $N^{(n)}j$ tal que:

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{N_j^n} p_i^n \leqq \frac{j}{m} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_j^n+1} p_i^n > \frac{j}{m}$$

tem-se ainda

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{N_j^n+1} p_i^n < \frac{2j+1}{2m} \quad \text{pois} \quad p_{N_j^n+1}^n < \frac{1}{2m}.$$

Donde:

$$(12)\qquad \sum_{i=N_j^n+2}^{N_{j+1}^n+1} p_i^n = \sum_{i=1}^{N_{j+1}^n+1} p_i^n - \sum_{i=1}^{N_j^n+1} p_i^n > \frac{1}{2m},$$

devido a (11) e a (10).

Por outro lado é fácil de ver que a função $-x\log_2 x$ é crescente no intervalo $]0,e^{-1}[$.

Donde, qualquer que seja «m» maior do que 2, existe pelo menos um N tal que n maior que N implica:

$$H[F_n] = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i^n \log_2 p_i^n \geqq \sum_{i=1}^{N_{m-1}^n} p_i^n \log_2 p_i^n \geqq$$

$$\geqq -\sum_{j=1}^{m-1}\left(\sum_{i=N_j^n+2}^{N_{j+1}^n+1} p_i^n\right)\log\left(\sum_{i=N_j^n+2}^{N_{j+1}^n+1} p_i^n\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{m-1}{2m}\log_2 m$$

A segunda desigualdade resulta de (8) e a terceira de (12) e do facto da função $-x\log_2 x$ ser crescente no intervalo $]0,e^{-1}[$. Donde

$$(13)\qquad H[F_n] \to +\infty$$

4. Observações finais

Interessa ainda que sejam feitas as seguintes observações finais:

1. Observe-se que em nenhum passo da demonstração final do parágrafo precedente se teve de recorrer à existência duma infinidade numerável de saltos não nulos em algumas das funções $F_n(x)$; logo *a demonstração continua válida se supusermos que todas as funções* $F_n(x)$ *eram funções de distribuição simples*, isto é, tais que tomam apenas um número finito de valores.

2. Como em V a convergência uniforme implica a convergência pontual, $H[F]$ *não é prolongável por continuidade a partir da topologia da convergência pontual.*

3. Como vimos em III não se pode prolongar por continuidade o funcional que nos dá a entropia associada a funções de distri-

buição discretas. Por outro lado é impossível arranjar uma sucessão de funções de distribuição contínuas que tenda uniformemente para uma função de distribuição discreta. Portanto uma teoria da entropia para o caso contínuo que venha a ser formulada terá de ser construída independentemente da teoria já existente da entropia no caso contínuo.

É este um assunto a que esperamos poder dedicar um estudo futuro.

Résumé

L'auteur fait quelques considérations sur la possibilité de prolonger par continuité le fonctionnel qui donne les valeurs de l'entropie dans le cas discret. Il montre nottament qui étant donnée une suite $\{F_n\}$ de fonctions discrétes qui convergent uniformément pour une fonction de distribution continue, la suite des valeurs de l'entropie pour les fontions F_n diverge nécessairement pour $+\infty$. Donc le prolongement par continuité ne peut point être fait à partir de la topologie de la convergence uniforme.

L'auteur de cet article est convaincu qu'une possible future théorie de l'entropie pour le cas continu devrait être construite indépendamment de la théorie existente pour le cas discret.

BIBLIOGRAFIA

[1] Dionisio, J. J. *A definição de entropia em cálculo das probabilidades:* Gazeta de Matemátida: 74-75, 1959.

[2] Khinchin, A. I. *Mathematical Foundations of information theory:* Dover Publications — 1957.

[3] Loéve, M. *Probability theory:* Van Nostrand, 2nd edd — 1960.

[4] Wiener, N. *Cybernetics*: Herman Editeur—1949.

Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire (1)

par J. Sebastião e Silva

Considérations générales.

Nous sommes d'accord qu'il faut introduire, dans l'enseignement secondaire, certains sujets des mathématiques modernes et, surtout, l'esprit de ces mathématiques, non seulement pour assurer une meilleure formation intellectuelle des élèves, mais aussi pour éviter une désarticulation, qui devient de plus en plus sensible, entre les études secondaires et celles universitaires. Mais nous faisons à cela des réserves.

Nous pensons que ces innovations doivent être éxécutées avec une extrême prudence et le plus fin tact pédagogique, si l'on ne veut pas créer chez les élèves une répulsion invincible pour les mathématiques ou les conduire à l'acquisition d'un formalisme vide, tout à fait stérilisant. En effet, la moderne orientation abstraite des mathématiques est une épée à deux tranchants, d'après l'usage que l'on en fait: elle peut rendre l'enseignement beaucoup plus attirant et beaucoup plus efficace; mais, mal appliquée, elle peut aussi conduire à des résultats à peu près opposés.

En conséquence, nous proposons un enseignement qui, au moins dans les cinq premières années, reste classique dans ses lignes générales, mais qui soit fortement influencé

(1) Este relatório foi publicado pela revista italiana «Archimede». Convém salientar que o ponto de vista aqui expresso figura entre os meios moderados que têm sido ùltimamente defendidos.

par l'esprit moderne, depuis la première année. Les idées, les méthodes et le langage des mathématiques modernes seraient introduits graduellement, à propos des matières classiques, avant ou après (suivant les cas) et autant que possible dans la *forme* d'exposition de ces matières. Pour cette introduction, il serait essential de partir de nombreux exemples bien concrets, bien familiers et assez suggestifs, voire amusants, et on ferait attention à ne pas introduire les formalismes avant d'être sur que l'élève eût saisi effectivement les idées qui s'y cachent. Une exception serait peut-être le cas des symboles de la logique mathématique qui s'introduisent tout naturellement à propos des équations et des inéquations, comme une sorte de sténographie, généralement agréée par les élèves, qui l'adoptent aussi volontiers en géométrie.

Au contraire, dans les deux dernières années, on devrait aller jusqu'à une étude concentrée, systématique, bien qu'à un niveau encore élémentaire, de plusieurs sujets de mathématiques modernes, soit pures (logique mathématique, théorie des ensembles, algèbre abstraite) soit appliquées (calcul des probabilités et statistique mathématique). Cette étude pourrait remplacer, avec avantage, celle de la logique d'après le modèle classique, tout à fait depassé, des cours de philosophie.

Par la suite, nous indiquerons *grosso modo* la façon d'éxécuter ce programme. Nous manquons encore d'expérience, pour pouvoir nous prononcer plus concrètement.

Remarque. Au Portugal, les études secondaires ont une durée de 7 ans, divisée en trois cycles: le premier cycle est de 2 ans, le second de 3 ans et le troisième de 2 ans. Chaque cycle est sanctionnée par un examen. Le 3ème cycle est séparé en deux sections — *lettres* et *sciences*; celle des ciences a encore de petites variantes, d'après le cours universitaire que l'élève veuille suivre.

1. Notions de la théorie des ensembles et des relations.

À notre avis, ces notions devraient être introduites très tôt, à partir de 10-11 ans, et progressivement, dans l'enseignement de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie, *sous une forme aussi intuitive et aussi peu académique que possible.*

D'abord, on habituerait les enfants au langage des intersections et réunions d'ensembles, des complémentaires et des ensembles vides, d'une façon toute naturelle, à propos de situations quotidiennes, et en rapport direct avec les notions de nombre naturel et les opérations sur des nombres. Un point à discuter est celui du moment où il serait opportun d'introduire les symboles des opérations sur des ensembles.

Ensuite, on s'occuperait d'exemples de relations, en général, et de relations d'ordre et d'équivalence en particulier. Nous considérons comme essentiel, pour un enseignement moderne, que les élèves prennent un intérêt réel aux propriétés des différentes relations, *et qu'ils s'y amusent.* Cela ne nous semble pas difficile comme problème didactique; en particulier, les relations de parenté offrent toujours un grand choix d'exemples efficaces et amusants.

Après avoir discuté les propriétés de plusieurs relations — et d'opérations de la vie quotidienne — les élèves auront sûrement plus d'intérêt pour les propriétés des opérations numériques. Inutile d'insister sur l'importance vitale de l'étude de ces propriétés dans tout l'enseignement des mathématiques. Malheureusement, cette étude a été éloignée, dans l'enseignement classique, de sa vraie finalité, la seule qui puisse la justifier aux yeux des élèves et lui donner de la vie: le fondement théorique des transformations d'expressions algébriques et d'équations en des expressions ou équations équivalentes. Isolée dans un cadre strictement arithmétique, elle est condamnée à languir, comme une plante privée d'air et de lumière. Il faudra donc que ces deux moments décisifs de l'enseignement — l'étude des propriétés formelles des opérations et l'initiation algébrique — soient rapprochés le plus possible.

D'un autre côté, tout cet apprentissage de notions logiques sur les relations et les opérations — y-compris d'autres opérations que celles de l'arithmétique des nombres — devrait aboutir, vers la fin de la seconde année, à une description axiomatique, plus ou moins déguisée, de la notion de grandeur, sans l'axiome de complétude. Cet axiome serait introduit plus tard, dans la géométrie rationnelle et lors d'une première étude des nombres irrationnels.

2. Notions de logique mathématique.

Nous pensons que plusieurs symboles de la logique mathématique — ceux d'implication et d'équivalence formelles, et peut-être ceux de conjonction, de disjonction et de négation — pourraient être introduits avec avantage, à propos de l'étude des équations et des inéquations, d'une façon progressive, naturelle, plutôt familière. Il va sans dire que, pour éclaircir les notions exprimées par ces notions, il serait toujours utile d'avoir recours à des exemples variés et à des modèles suggestifs, tels que ceux, biens connus, basés sur les propriétés des circuits électriques.

Il nous semble d'ailleurs important que les élèves s'habituent à considérer les équations et les inéquations comme des cas particuliers de «conditions» (ou «fonctions propositionnelles»), et à employer les attributs «possible», «impossible», «universel», «déterminé», à propos de conditions de nature quelconque. Quant aux symboles par lesquels on exprime ces attributs — les quantificateurs — il serait peut-être prudent de ne pas les introduire tout de suite et d'attendre encore quelque temps.

D'ailleurs, tout cet outillage logique trouverait un grand emploi, fort avantageux, dans l'étude de la géometrie rationnelle.

3. Notions générales d'application (ou fonction) et de groupe de transformations.

Comme tant de mathématiciens, nous pensons que l'étude de la géométrie rationnelle doit être orientée, d'une façon plus ou moins explicite, par les idées de transformation et de group de transformations. Mais ici encore nous sommes d'avis qu'il ne faut pas aller trop vite.

Comme introduction à l'étude de la geométrie rationnelle, il serait sans doute fort utile de faire une mise au point das notions déjà apprises sur l'algèbre des ensembles, et de donner ensuite la notion générale d'application (correspondance univoque), au moyen de plusieurs exemples, choisis surtout dans le domaine des connaissances communes. Un point fondamental serait celui de situer bien clairement les fonctions numériques, représentées par les expressions algébriques, comme cas particulier d'applications.

Mais il y a le problème de la terminologie: parmi les termes «application», «fonction», «transformation», «opération», «opérateur», etc., qui ont été employés souvent avec des significations à peu près équivalentes, il faudra en choisir un, comme désignation générique. Le terme «application», en français, et ses correspondants directs, dans les autres langues néo-latines, nous semblent désormais consacrés, dans ce groupe d'idiomes, par l'influence de l'école Bourbaki. Toutefois, le terme «transformation» a de fortes traditions en géométrie et il est, sans doute, très suggestif. Une solution serait d'employer ce terme comme synonyme de «aplication biunivoque d'un ensemble snr lui-même», suivant l'exemple de plusieurs auteurs (1). Mais nous nous demandons: Est-ce que cela ne limite pas trop la signification d'un terme dont le sens usuel est beaucoup plus large?

D'autre part, il ne faut pas oublier que, dans une telle initiation, la sobriété de terminologie et de symbolisme serait toujours à conseiller. Ce ne cera que très lentement que l'élève pourra s'habituer au langage extrêmement précis, mais souvent revêche, des mathématiqnes modernes.

En particulier, la notion de «produit» (ou «composée») d'applications devrait être introduite d'une façon peu abrupte, la plus spontanée possible, à propos des déplacements. C'est seulement après cela que l'on tâcherait de préciser cette notion, dans le cas général d'applications quelconques, avec force exemples. Quant à la notion de groupe de transformations, on l'introduirait a posteriori aussi, mais plus tard encore, après l'étude des similitudes.

On sait que tout groupe de transformations donne lieu à une relation d'équivalence, deux ensembles de points étant dits équivalents lorsqu'il existe une transformation du groupe appliquant l'un sur l'autre. Réciproquement, plusieurs des relations d'équivalence qui se présentent en géométrie — égalité (ou congruence), similitude, parallélisme, etc. — sont engendrées de cette façon par des groupes de transformations. Rien n'empêche, évidemment, que ces relations soient étudiées avant de considérer les groupes sous-jacents. Mais il serait essentiel d'établir le lien entre ces deux types de notions, après avoir introduit la notion de groupe.

Une autre notion importante, qui se présente dans cet ordre d'idées, est celle de vecteur, comme classe d'équivalence de segments orientés équipollents. C'est là un excellent prétexte pour faire accepter la notion générale de groupe, dépassant le cas des groupes de transformations, et pour donner, en même temps, la notion d'isomorphisme, en profitant de l'exemple du groupe multiplicatif des translations, isomorphe au groupe additif des vecteurs.

(1) Cf. par exemple «Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire», O. E. C. E.

4. Logique mathématique, algèbre abstraite et statistique mathématique.

Dans les deux dernières annés, l'enseignement des mathématiques devrait, à notre avis, être séparé en deux branches distinctes:

Dans l'une de ces branches, on donnerait les éléments de trigonométrie, géometrie analytique et analyse infinitésimale, nécessaires dans l'enseignement secondaire, présentés sous une forme à la fois intuitive et rationnelle, avec le souci des applications concrètes, d'une part, et de la rigueur logique, d'autre part, de façon à éviter soit un formalisme stérilisant, soit des vices de pensée qu'il serait difficile de déraciner ensuite.

Dans l'autre branche, à caractère beaucoup plus philosophique, il s'agirait de faire réfléchir sur des idées acquises dans les années précédentes, et de les compléter, en les érigeant en système. D'abord en ferait une étude, plus ou moins développée, de la logique mathématique (y-compris la théorie des classes et des relations), *destinée à remplacer, complètement, la logique formelle des cours classiques de philosophie*. Ensuite, on s'occuperait des fondements de l'arithmétique et de la géométrie, et on donnerait une vue panoramique des mathématiques modernes, en présentant diverses types de structures et quelques éléments d'algèbre abstraite.

Comme application, il serait très intéressant d'expliquer l'intervention des opérations logiques dans le fonctionnement des *modernes machines à calculer*.

Mais les mathématiques ne sont pas uniquement logique formelle. Pour aboutir à un enseignement équilibré, il est indispensable de soigner l'autre côté des mathématiques — celui qui concerne les rapports avec le réel concret. À cet effet, l'étude de l'analyse infinitésimale et de ses applications est déjà très utile, mais il n'est pas suffisant. Il faut absolument opposer au bloc «logique deductive» un bloc «logique inductive» basé sur le calcul des probabilités et la statistique mathématique. Dans cet ordre d'idées, il serait essentiel de commencer par la notion empirique, statistique, de probabilité, considérée comme faisant partie de la logique inductive. On pourrait ensuite parvenir, de façon naturelle, à l'axiomatique des probabilités, dans le cas fini, et à la résolution de problèmes élémentaires de probabilités; l'outillage acquis de la logique mathématique rendrait bien facile cette étude. Cela posé, on donnerait des *idées* sur la distribution normale et sur les tests de signification, ainsi que sur leurs applications dans les recherches expérimentales. Enfin, on ferait une étude préliminaire de la régression, *linéaire ou non*; un des buts de cette étude serait de faire ressortir le caractère foncièrement statistique, contingent, de toute loi naturelle.

Cette deuxième branche de l'enseignement des mathématiques pourrait, avec avantage, s'étendre à tous les élèves des deux dernières années, en remplaçant une bonne partie de l'enseignement classique de la logique. Au contraire, la première branche devrait se limiter aux élèves qui veulent suivre les carrières scientifiques.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CENTRO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO — CENTI

No seio da Cooperativa de Actividade Científica — Diálogo — constituiu-se um Centro de Tratamento da Informação, CENTI, como se noticia a págs. 5 e 6 do presente número de «Gazeta de Matemática».

A Direcção (provisória) do Centi enviou ao Provisional International Computation Centre (Roma), o documento que a seguir transcrevemos:

Laboratory:

CENTRO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO (CENTI)

Officers:
(interim)

Gaspar Teixeira
Fernandes Viana
Fernandes Costa

Administrative Nature

Scientific Activity Center of
DIÁLOGO,
a Cooperative Society of Scientists

Present Equipment:

Univac 40
Tabulators
Other punched card equipment

Contemplated Equipment:

Steps are to be taken to form a collective experience in order to design and develop own computer.

Special Experience:

Training:

A few seminars on methods of Mathematical Physics, Numerical Analysis, Operations Research, Theory of Information, Electronic Switching are under way.

Publications:

Mainly: «Gazeta de Matemática».

*

O Centi rege-se pelo Regulamento Interno que igualmente se transcreve:

CENTI

Regulamento Interno
(Provisório)

A — Organização

1 — *Esquema Orgânico*

Publicações ⟵ Direcção ⟶ Secretariado
↙ ↘
Estudos Aplicações

2 — *Direcção*

2 a — A Direcção compõe-se de
1 Representante à Junta Executiva da Diálogo
1 Representante do Sócio Colectivo Solor
1 Responsável da Evolução de Material
1 Responsável da Promoção Científica
1 Responsável das Publicações

2 b — À Direcção compete
2 b. 1 — Planear, dirigir e controlar as actividades de Estudos e Aplicações do Centi
2 b. 2 — Promover através dos Orgãos devidos contactos
a) com o Público
b) com Entidades Científicas nacionais ou estrangeiros
c) com clientes potenciais
2 b. 3 — Promover a prospecção do pessoal científico e técnico necessário às actividades do Centi
2 b. 4 — Acompanhar os restantes Serviços nas suas actividades

2 c — A Direcção, entre os seus membros, elegerá um Secretário Geral a quem incumbirá coordenar e promover o bom funcionamento dos serviços de Secretaria e que ao mesmo tempo desempenherá funções de ligação entre a Direcção e os restantes Serviços.

3 — *Secretariado*

3 a — O Secretariado compõe-se de
1 Sócio da Diálogo
1 Representante da Solor
1 Responsável pelas Publicações

3 b — O secretariado desempenha funções de
3 b. 1 — Contabilidade e Orçamento
3 b. 2 — Secretaria e Expediente

4 — *Secções de Estudo*

4 a — As Secções de Estudo são os orgãos através das quais os Sócios da Diálogo realizam a sua promoção profissional nos diversos campos ligados com o Tratamento da Informação.

5 — *Secções de Aplicação*

5 a — As Secções de Aplicação são os orgãos através dos quais os Sócios de Diálogo aplicam os seus conhecimentos profissionais nos diversos campos ligados com o Tratamento da Informação.

5 b — Os Sócios da Diálogo inscrevem-se nas Secções de Aplicação quando preencham uma pelo menos das condições seguintes
5 b. 1 — pertencerem às Secções de Estudo e aí serem reconhecidos como possuidores dos conhecimentos necessários ao desempenho das funções;
5 b. 2 — não pertencendo às Secções de Estudo, apresentarem provas irrefutáveis de competência.

5 c — Os trabalhos provenientes de encomendas exteriores ou de problemas internos da Diálogo serão distribuidos pela Direcção ao grupo de especialistas capazes de os resolverem.

6 — *Publicações*

6 a — As Publicações são o orgão através do qual Centi transmite ao público os resultados das suas actividades, de Estudo e de Aplicação.

B — Funcionamento

1 — Os trabalhos resultantes de contactos com empresas e entidades exteriores serão classificados em
A) Estudos
B) Encomendas

2 — À Direcção compete fazer a referida classificação de acordo com o critério geral seguinte:
A) São considerados Estudos todos os trabalgos para os quais ainda não existe no Centi experiência suficiente no campo em que eles se enquadram.
B) São considerados Encomendas todos os restantes trabalhos.

3.1 Os Estudos são realizados pelo Centi sempre gratuitamente com a condição adicional de a entidade (individual ou colectiva) que os apresente ser sócio da Diálogo e pagar apenas as despezas realizadas com o Estudo.

3.2 As Encomendas são realizadas pelo CENTI mediante orçamento a fixar.

4 — O CENTI tem contabilidade própria.

5 — De cada Encomenda será sempre feita apreciação financeira final, sendo os resultados divididos pela forma seguinte:

30% para o grupo de Aplicações que a realizou, como remuneração do trabalho prestado;

30% para um fundo de actividade científica geral da DIÁLOGO;

30% para manutenção das actividades de Estudos (biblioteca, material de trabalho, etc.).

10% para um fundo geral destinado a despesas eventuais.

*

Paralelamente às actividades de que decorreu a constituição do CENTI, distribuiu-se por alguns sectores da Indústria Portuguesa a «Proposta de Constituição de CENTRO DE CÁLCULO AUTOMÁTICO, S A R L», estabeleceu-se contacto com a Fundação Calouste Gulbenkian, com algumas emprezas industriais como a Standard Eléctrica, Lda. e a Companhia Portuguesa de Indústrias Nucleares, com o FORUM ATÓMICO PORTUGUÊS e o CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO CIENTIFICA ULTRAMARINA.

Por seu lado o CENTI resultou da associação, mediante contrato, com a empresa SOLOR, representante em Portugal do material UNIVAC.

Além disso, no presente número de G. M. iniciou-se a publicação de trabalhos realizados no seio de CENTI:

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares

Resolução de Sistemas de equações lineares determinadas,

e brevemente em revista própria serão publicados os resultados do primeiro trabalho de Tratamento de Informação realizado na Cooperativa DIÁLOGO, respeitante ao estudo dum complexo de valores relativos a um agregado populacional do nosso País.

Neste momento vários sócios da DIÁLOGO frequentam cursos de programação FORTRAN, realizados no Instituto Gulbenkian de Ciência.

No próximo mês organizar-se-ão grupos de estudo em Seminário em torno dos programas seguintes:

Análise numérica

1. *Aproximações*

1.1. Aproximações numéricas. Cálculo em vírgula flutuante.
1.2. Aproximações funcionais.
1.2.1. Polinómios de CHEBYSHEV.
1.2.2. Geração interna de funções em computadores electrónicos.
1.2.3. Economização de séries.
1.2.4. Fracções contínuas.
1.3 Diferenças finitas e interpolação.
1.3.1. Interpolação linear e por médias cruzadas.
1.3.2. Diferenças divididas e métodos Lagrangeanos.
1.3.3. Interpolação em intervalos iguais.
1.3.4. Operadores.

2. *Derivação e integração numéricas*

2.1. Derivação.
2.2. Integração.
2.2.1. Métodos Gaussianos.

3. *Equações diferenciais ordinárias*

3.1. Métodos convenientes para o cálculo automático.
3.2. Propagação de erros.
3.3. Sistemas de equações.

4. *Equações diferenciais parciais*

4.1. Métodos adaptáveis ao cálculo automático.
4.2. Equações elípticas.
4.3. Equações hiperbólicas.
4.4. Equações parabólicas.

5. *Álgebra linear*

5.1. Métodos para a resolução de sistemas de equações lineares, adoptáveis ao cálculo automático. Métodos directos e indirectos.
5.2. Inversão de matrizes. Casos especiais de interesse.
5.3. Cálculo de valores característicos.
5.4. Algoritmos da programação linear.
5.5. Programas interpretativos para matrizes.

6. *Equações algébricas e transcendentes*

6.1. Métodos iterativos. Método de BERNOULLI.
6.2. Casos particulares de interesse corrente.
6.3. Equações simultâneas não lineares.

7. *Programação de problemas de análise numerica*

7.1. Preparação.
7 2. Ensaios e verificações.
7.3. Algol.

Equações às derivadas parciais

Cap. I — *Equações diferenciais ordinárias a mais de duas variáveis*

1 — Sistema de equações diferenciais de primeira ordem e primeiro grau

2 — Trajectórias ortogonais de um sistema de curvas sobre uma superfície

3 — Formas e equações de Pfaff e suas integrações

Cap. II — *Equações diferenciais parciais de primeira ordem*

1 — O problema de Cauchy-Kowalewski

2 — Equações lineares de primeira ordem. Problemas geométricos

3 — Equações não lineares de primeira ordem

4 — Método de Cauchy

5 — Método de Charpit-Lagrange

6 — Método de Jacobi

7 — Aplicações (equações de Hamilton, Fokker-Plank

Cap. III — *Equações diferenciais parciais de segunda ordem*

1 — Equações de segunda ordem na Física

2 — Equações de ordem superior na Física

3 — Equações lineares de coeficientes constantes

4 — Equações lineares de coeficientes variáveis

5 — O método de Cauchy

6 — Separação de variáveis

7 — O método das transformações integrais

8 — Equações não lineares

Cap. IV — *A equação de Laplace*

1 — Os problemas de potencial. Soluções elementares de equações de Laplace

2 — Os problemas de Dirichlet e Neumann

3 — As simetrias esférica, cilíndrica e rectangular

4 — A teoria da função de Green para a equação de Laplace

5 — Aplicações

Cap. V — *A equação de propagação*

1 — Os problemas de propagação. Soluções elementares da equação de propagação

2 — Solução de Riemann-Volterra (unidimensional)

3 — Membranas vibrantes

4 — Problemas tri-dimensionais

5 — As funções de Green para a equacão de propagação

6 — A equação não homogénea e os potenciais retardados

7 — Aplicações

Cap. VI — *A equação de difusão*

1 — Os problemas de difusão. Soluções elementares da equação de difusão

2 — A separação de variáveis

3 — As transformações integrais

4 — As funções de Green

5 — A presença de fontes

6 — Aplicações

Cap. VII — *A equação de transporte*

Cálculo operacional

1) — Transformações integrais
- *a*) Diversos tipos de núcleos
- *b*) Núcleos de Fourier
- *c*) Núcleos de Laplace
- *d*) Núcleos de Hankel

2) — Transformada de Fourier
- *a*) Teoremas de Dirichlet (existência e conv. do integ.)
- *b*) Teoremas de inversão
- *c*) Teoremas de convolução (relações de Parseval)

3) — Transformada de Laplace
- *a*) Teoremas de convolução
- *b*) Função de Dirac
- *c*) Fundamentos de Cálculo Operacional

4) — Transformada de Mellin
- *a*) Teoremas de convolução

5) — Transformada de Hankel
- *a*) Teoremas de inversão
- *b*) Relação de Parseval (não há teorema simples de convolução)

6) — Transformações finitas

7) — Aplicações
- *a*) Teoria geral das vibrações
- *b*) Teoria da condução de calor nos sólidos
- *c*) Teoria da moderação de neutrões
- *d*) Hidrodinâmica
- *e*) Física atómica e nuclear
- *f*) Sistemas sob tensões (bidimensionais e simétricos)
- *g*) Distribuição de variáveis aleatórias

Teoria da informação

— Definição de quantidade de informação; fórmula de Shannon, propriedades; informação condicionada; unidades de quantidade de informação.

— Correlação, correlação na linguagem; redundância, códigos.

— Princípios de codificação. Definição de canal e de capacidade dum canal. Código sequencial. Cálculo da capacidade dum canal. Adaptação de um canal a um código. Generalização.

— Problemas de codificação; codificação alfabética e sistema binário; codificação alfabética e sistema ternário.

— Códigos ùnicamente decifráveis

Códigos de Huffman

Códigos de Hamming

Detecção de erros simples e duplos e seus renmentos

— Capacidade dum canal com ruído; prablemas e aplicações.

— Transmissão de informação por meio de sinais. Séries de Fourier, integral de Fourier e fenómeno de Gibbs nas suas aplicações à transmissão de sinais. Relação de incerteza tempo-frequência.

— Graus de liberdade de uma mensagem; método de amostragem de Shannon; generalização de Gabor. Auto-correlação e espectro. Fórmula de Wiener-Khintchine. Aplicação a algumas transformações lineares. Noção de filtro. Aplicação da análise de Fourier ao método de amostragem em três dimensões.

— Relação entre a teoria de informação e a termodinâmica. Entropia e Negaentropia; interpretação estatística. Flutuação. Agitação térmica e movimento browniano. Agitação térmica num circuito eléctrico; fórmula de Nyquist. Negaentropia e princípio de Carnot. Demónios de Maxwell.

— A negaentropia em física; o problema de medida. Observações feitas num oscilador. Exemplos.

— Erros experimentais e informação; exemplos.

— Teoria da informação e princípio da incerteza. Limites físicos da observação. Observação em processos irreversíveis. Limites na precisão; exemplos.

— Informação e telecomunicações
Sinais com largura de banda finita Sinais e ruído. Capacidade de um canal com ruído. Fórmula de Tuller-Shannon. Discussão e exemplos. Aplicações da noção de negaentropia à determinação da capacidade dum canal com ruído. Fórmula de Gabor modificada.

— Aplicação da teoria de informação nos computadores: computador como elemento matemático. O computador como elemento de circuito, amostragem e detecção. Função de transferência para um computador. Circuito incluindo um computador. O problema de estabilidade e sua discussão. Exemplos.

Investigação operacional

Cap. I — *Introdução*
I — Definições de investigação operacional
II — Notas históricas sobre a ivestigação operacional
III — Objectivos da investigação operacional

Cap. II — *Optimização*
I — Introdução
II — Optimização sem restrições
III — Optimização com restrições

Cap. III — *Programação linear*
I — Introdução
II — Propriedades gerais dos programas lineares
III — Método do simplex
IV — Dificuldades

Cap. IV — *Programação não linear*
I — Introdução
II — Os teoremas de Kuhn-Tucker
III — Casos particulares

Cap. V — *Teorias dos jogos*
I — Introdução
II — Jogos finitos com soma nula
III — Métodos para a resolução de jogos finitos de duas pessoas com soma nula
IV — Relações com a programação linear
V — Jogos infinitos com soma nula
VI — Jogos contra a Natureza

Mecânica Quântica

I — *Introdução*

A) Ondas e interferências; grupos de ondas
B) Corpúsculos; sua mecânica (colisões clássicas)
C) Onda-corpúsculo; equações de Schrödinger

II — *Operadores diferenciais; valores próprios e funções próprias*

A) Operadores da mecânica clássica (momento, energia e posição)
B) Oscilar harmónico — Polinómios de Hermite
C) Equação de Schrödinger tri-dimensional
a) momento angular — polinómios de Legendre
b) niveis de energia — polinómios de Laguerre (solução radial)

III — *Formulação matricial da mecânica quântica*
IV — *Spin e momentos angulares*

Mecânica Estatística

I — *Princípios fundamentais*

A) Teorema de Liouville
B) Entropia e os conjuntos microcanónicos
C) Funções termodinâmicas e conjuntos canónicos
D) Distribuições de Fermi-Dirac
E) Distribuições de Boose-Einstein
F) Mecânica estatísrica quântica

II — *Processos estocásticos*

III — *Teoria do Transporte*

Para a realização desta e de outras actividades consequentes muito deseja e espera o Centi da valiosa colaboração com a Indústria Portuguesa, nomeadamente com as empresas e entidades já contactados.

A Direcção do CENTI

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência dos cursos de engenharia civil, engenharia de minas, engenharia mecânica, engenharia electrotécnica e engenharia químico-industrial e curso de arquitectura — Ano de 1961.

Ponto n.º 1

Prova escrita de Matemática

5546 — 1) Dada a cónica definida pela equação $x^2 = -8y$, estude esse lugar e ache a área do triângulo formado pelas tangentes à curva tiradas do ponto $(8,0)$ e a recta que une os dois pontos de tangência.

Escreva a equação das tangentes.

R: *A cónica* $x^2 = -8y$ *ou* $y = -\frac{1}{8}x^2$ *é uma parábola cujo eixo é o eixo dos* yy, *de vértice na origem e existindo toda ela no 3.º e 4.º quadrantes. A equação geral das rectas que passem pelo ponto* $(8,0)$ *é* $y = m(x-8)$, *e duas delas serão tangentes à curva. Para determinar os valores de* m *correspondentes procuraremos os valores de* m *para os quais as rectas da família tem um único ponto de comum com a curva. Teremos então* $m(x-8) = -\frac{1}{8}x^2$ *ou* $x^2 + 8mx - 64m = 0$; *e para que esta equação tenha uma raiz dupla deverá ser* $(8m)^2 + 4 \times 64m = 0$, *equação cujas raizes são* $m = 0$ *e* $m_2 = -4$. *As equações das tangentes são então* $y = 0$ *e* $y = -4x + 32$. *Os pontos de contacto são* $(0,0)$ *e* $(16,-32)$. *O triângulo tem como base o segmento do eixo dos* xx *compreendido entre a origem e o ponto de abcissa* 8 *e tem, portanto, por medida* 8. *A altura será então, em valor absoluto, a ordenada do ponto* $(16,-32)$ *e a área do triângulo é* $S = \frac{1}{2} \times 32 \times 8 = 126$ *unidades de área.*

2) Justifique a igualdade

$$\overset{m+1}{A}_p = p!\,\overset{m}{C}_{p-1} + \overset{m}{A}_p$$

e calcule m para $p = 3$, sabendo $\overset{m}{C}_{p-1} = 10$.

R: $$p!\,{}^mC_{p-1} + {}^mA_p = p! \times \frac{m!}{(p-1)!\,(m-p+1)!} + \frac{m!}{(m-p)!} = \frac{p \times m! + m!\,(m-p+1)}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,[p+(m-p+1)]}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,(m+1)}{(m+1-p)!} = {}^{m+1}A_p$$

c. q. j.

Se $p = 3$ *e* ${}^mC_{p-1} = 10$ *teremos:* ${}^{m+1}A_3 = 3! \times 10 + {}^mA_3$ *ou* $(m+1)\,m\,(m-1) = 6 \cdot 10 + m\,(m-1)\,(m-2)$ *ou* $m\,(m-1)\,[(m+1)-(m-2)] = 60$ *ou* $m^2 - m - 20 = 0$, *o que dá* $m = 5$.

3) O que entende por $y = a^x$ com $a > 0$ e $x \neq 1$?

Como varia essa função com x para $0 < a < 1$?

Ache a função inversa da função

$$y = 3^{2-\frac{x}{3}}.$$

R: $y = a^x$, *com* $a > 0$, *representa a função exponencial de base* a, *cujo domínio é constituido por todos os números reais. É uma função contínua. Quando*

$a > 1$, *a função é crescente, tende para* $+\infty$, *se* $x \to +\infty$ *e tende para zero, se* $x \to -\infty$. *Quando* $0 < a < 1$, *a função é decrescente, tende para zero, se* $x \to +\infty$ *e tende para* $+\infty$, *se* $x \to -\infty$.

Para obter a função inversa de $y = 3^{2-\frac{x}{3}}$, *considera-se* $2 - \frac{x}{3} = \log_3 y$ *donde* $x = 6 - 3\log_3 y$.

4) A soma de dois números inteiros é 26 e o seu menor múltiplo comum é 60. Ache os dois números.

R: *Sejam* $a + b = 26$ *e* m. m. c. $(a;b) = m = 60$.
Sabe-se que m. d. c $(a;b) =$ m. d. c. $(a+b;m)$.
Isto é, m. d. c. $(a;b) =$ m. d. c. $(26;60) = 2$.
Como $a = 2\cdot q$ *e* $b = 2\cdot q'$, *em que* q *e* q' *são primos entre si, vem:* $a + b = 2q + 2q' = 2(q+q')$.
E $26 = 2\cdot(q+q')$, *donde* $q + q' = 13$.
Mas, $13 = 3 + 10$ *(primos entre si única decomposição que satisfaz ao m. m. c. dado).*
Então, $a = 2 \times 3 = 6$ *e* $b = 2 \times 10 = 20$.

5) Calcule os valores de α e β sabendo que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2}.$$

R:
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \\ \cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \cos 2\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2} \qquad 2\beta = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad \beta = K\pi \pm \frac{\pi}{6} \qquad \begin{cases} para\ \beta = +\frac{\pi}{6} \\ \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sabemos que $\begin{cases} \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{cases}$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \times \cos(\alpha-\beta) = \frac{2}{16}(3-1) = \frac{1}{4}$$

$$(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha + {}$$
$$+ \frac{1}{4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\alpha = \operatorname{arc\,sen}\frac{1-\sqrt{3}}{2} + (-1)^k\pi$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{1-\sqrt{3}}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{2} \to \quad para \quad \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$para\ \beta = -\frac{\pi}{6} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2} \\ \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha + {}$$
$$+ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \to \text{solução que não serve.}$$

6) Justifique a expressão da derivada de uma função composta.

R: *Seja* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$. *Reconhece-se imediatamente que é* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$, *e daqui resulta*

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$; *e como* Δx *e* Δu *são infinitésimos simultâneos* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$.

Ponto n.º 2

5547 — 1) São dadas duas circunferências: uma de raio 2 e de centro $(3, -2)$ e outra passando pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(2,4)$.

Escreva a equação dessas duas circunferências e a equação da recta perpendicular a meio do segmento que une os dois centros.

R: *Usando a equação* $(x-\alpha)^2 + (y-\beta) = R^2$, *a primeira circunferência será definida analìticamente por* $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ *ou* $x^2+y^2-6x+4y+9=0$. *Para obtermos a equação da outra podemos usar* $x^2+y^2+dx+ey+f=0$. *Como os pontos dados têm de pertencer à circunferência, teremos o sistema:* $f=0$, $36+6e+f=0$ *e* $4+16+2d+4e+f=0$. *Resolvendo-o, temos:* $d=2$, $e=-6$, $f=0$. *Então* $x^2+y^2+2x-6y=0$ *será a segunda equação. Coordenadas do centro desta última circunferência:* $(-1,3)$. *Coordenadas do ponto médio do segmento dos centros:* $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. *Coeficiente angular da recta definida pelos dois centros:* $m = -\frac{5}{4}$. *Equação da recta pedida:* $y - 1 = \frac{4}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *ou* $4x - 5y + 3 = 0$.

2) O que entende por símbolo de impossibilidade? Haverá valores de x que dêem ao produto

$$(x^3 - x^2 + 3x - 3) \cdot \frac{x-2}{x^2-1}$$

a forma de uma indeterminacão? Se sim, qual o valor do produto para esses valores de x?

R: *Os zeros de* x^2-1 *são* ± 1. *Ora* $x=1$ *dá ao produto referido a forma indeterminada* $0 \times \infty$. *Procuremos o verdadeiro valor do produto dado para este valor de* x. *Para isso escrevamo-lo com a forma de fracção, factorizemos os dois termos e simplifiquemo-la:* $\frac{(x-1)(x^2+3)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2+3)(x-2)}{x+1}$. *Teremos:* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+3)(x-2)}{x+1} = -2$, *valor do produto.*

3) Prepare para o cálculo logarítmico a expressão numérica

$$\frac{a^3\sqrt{b}}{c\sqrt{\frac{d}{e}}}.$$

Diga como varia com x a função $y = \log_a x$ para $a > 1$.

Como muda da base a para outra b?

R: *Se representarmos por* X *o valor da expressão, teremos:* $\log X = 3 \cdot \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{colog} d + \frac{1}{2} \log e$. *A função logarítmica de base* a, $y = \log_a x$, *quando* $a > 1$, *é uma função crescente e contínua; tende para* $+\infty$, *quando* $x \to +\infty$ *e tende para* $-\infty$, *se* $x \to 0$, *podendo tomar qualquer valor entre* $-\infty$ *e* $+\infty$. *Adquire um valor positivo, nulo ou negativo, conforme* $x > 1$, $x = 1$ *ou* $x < 1$.

A mudança da base a *para outra* b, *faz-se por intermédio da fórmula de transformação*

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

4) Escreva no sistema de base 4 o número 431 do sistema decimal.

R: $431_{(10)} \equiv 12233_{(4)}$

$$\begin{array}{l|l}
431 & 4 \\
\hline
031 & 107 \;|\; 4 \\
3 & \;\;27 \quad 26 \;|\; 4 \\
 & \;\;\;3 \quad\;\; 2 \quad 6 \;|\; 4 \\
 & \qquad\qquad\quad 2 \quad 1
\end{array}$$

5) Calcule o valor da expressão

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

R: *Consideremos* α *do 1.º quadrante. Será* $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$. *A expressão* $tg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, *dá* $tg^2 \alpha = \frac{1}{5}$. *Então, para a expressão dada virá* $\frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{3}$.

6) O que entende por números complexos conjugados? Exemplifique.

R: *São dois complexos que têm as partes reais iguais e as partes imaginárias simétricas. Por exemplo,* $2 - 3i$ *e* $2 + 3i$.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 1.º Exame de Frequência — 1.ª Chamada — 8-2-1962.

5548 — 1) Seja E um conjunto e seja $(A_i)_{i\in I\neq\emptyset}$ uma família de partes de E.

a) Defina $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{i\in I} A_i$.

b) Nas hipóteses: $E=R\times R$; $I=[0,1]$; $A_i=\{(\alpha,\alpha)\mid 0<\alpha<1+i\}$, $i\in I$, quais os conjuntos $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{i\in I} A_i$?

2) Seja E um conjunto não vazio e ρ uma relação definida em E.

a) Represente, na linguagem da Lógica simbólica, as proposições: «ρ é anti-simétrica»; «ρ não é anti-simétrica».

b) Considere as proposições:

$$P_1=\underset{x\in E}{\exists}\ \underset{y\in E}{\forall}\ (y\,\rho\,x\Rightarrow y=x)\,;$$

$$P_2=\underset{u\in E}{\forall}\ \underset{v\in E}{\exists}\ (v\neq u\wedge v\,\rho\,u)\,.$$

Que sabe sobre os valores lógicos de $P_1\vee P_2$ e $P_1\wedge P_2$? Justifique. Supondo que ρ é uma relação de ordem, que significa ser P_i, $i=1,2$, verdadeira?

3) Enuncie o teorema da condensação de Cauchy e, em seguida, aplique-o, mostrando a legitimidade dessa aplicação, à série $\sum_{n\in N} 1/n^{1+1/2}$.

4) Seja f a função real definida em $E=[0,1[\,\cup\,]1,2]$ cujo valor no ponto $x\in[0,1[$ é 1 e cujo valor no ponto $x\in]1,2]$ é 2.

a) Represente f. Considere a proposição «qualquer que seja $a\in E$, f tem limite $f(a)$ no ponto a». Indique, de preferência simbòlicamente, duas proposições cuja conjunção seja a proposição referida e verifique que elas são verdadeiras.

b) f é pois contínua. f terá algum prolongamento contínuo a $[0,2]$? Justifique a resposta exclusivamente à custa do teorema de Bolzano-Cauchy.

5) f é uma função real definida em R, contínua e com limite $+\infty$ nos pontos $+\infty$ e $-\infty$.

a) Mostre que $f(R)$ é minorado.

b) Mostre que o ínfimo de $f(R)$ pertence a $f(R)$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 1.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 17-2-1962.

Ponto n.º 1

5549 — 1) Seja I um conjunto não vazio e ρ uma relação de ordem definida em I, relativamente à qual há primeiro elemento, notado u_0, e há último elemento, notado u_1.

a) Qual o conjunto dos majorantes (minorantes) de I? I tem supremo (ínfimo)? Justifique as respostas.

b) Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de um conjunto F tal que: se $i\,\rho\,j$, então $A_i\supset A_j$. Quais os conjuntos $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{i\in I} A_i$? Justifique.

2) Seja E um conjunto não vazio e seja ρ uma relação definida em E.

a) Escreva, na linguagem da Lógica simbólica, as proposições: «ρ é simétrica»; «ρ não é transitiva».

b) Supondo que ρ é reflexiva, mostre que é 1 o valor lógico da proposição $P_1\Rightarrow P_2$, com:

$$P_1=\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{y\in E}{\forall}\ (x\,\rho\,y\vee y\,\rho\,x)\,;$$

$$P_2=\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{y\in E}{\forall}\ \underset{z\in E}{\exists}\ (x\,\rho\,z\wedge y\,\rho\,z)\,.$$

3) Enuncie o critério de d'Alembert e, em seguida, aplique-o à série $\sum_{n\in N} a_n$, com: $a_{2n-1}=2^{-n}3^{-n}$ $(n\in N)$; $a_{2n}=2^{-n-1}3^{-n}$ $(n\in N)$.

4) Seja f uma função real definida em R.

a) Indique, de preferência simbòlicamente, duas proposições cuja conjunção seja a proposição «f é contínua»; verifique que elas são verdadeiras na hipótese de ser verdadeira a proposição «existe $\alpha \geqslant 0$ tal que, quaisquer que sejam $x \in R$ e $y \in R$, é $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|$».

b) Supondo que $f(x) = |x|$, qualquer que seja $x \in R$, represente f e verifique que f possui a propriedade referida na alínea a).

5) Sejam f e g funções reais definidas em R e cujas restrições a Q são iguais: $f_{|Q} = g_{|Q}$. Mostre que $f = g$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 1.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 17-2-1962.

Ponto n.º 2

5550 — 1) Sejam E e F conjuntos não vazios e seja f uma aplicação de E em F.

a) Defina: gráfico de f; $f(A)$, $A \in P(E)$; $\overset{-1}{f}(B)$, $B \in P(F)$.

b) Diga quais os elementos de $F(E, F)$ na hipótese: $E = F = \{1, 2, 3\}$.

2) Seja $(E, +, \cdot)$ um corpo e seja $\leqslant$ uma relação de ordem total definida em E.

a) Traduza, para a linguagem da Lógica simbólica, as proposições:

$P_1 =$ «se $x \leqslant y$, então $x + z \leqslant y + z$, para todo o $z \in E$»;
$P_2 =$ «se $0 \leqslant x$ e $0 \leqslant y$, então $0 \leqslant x \cdot y$».

b) Supondo que $P_1 \wedge P_2$ é verdadeira, isto é, $(E, +, \cdot, \leqslant)$ é corpo ordenado, mostre que é 1 o valor lógico de cada uma das proposições:

$$\underset{x \in E}{\forall} \ \underset{y \in E}{\forall} \ \underset{z \in E}{\forall} \ (x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z)$$

$$\underset{x \in E}{\forall} \ \underset{y \in E}{\forall} \ (x < y \Longrightarrow \underset{z \in E}{\exists} \ x < z < y).$$

3) Exprima, de preferência simbòlicamente, que «$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)_{n \in N}$ não converge para zero» e verifique, à custa do que disse, que assim é.

4) Seja E um conjunto não vazio e sejam f e $(f_n)_{n \in N}$, respectivamente, uma função real definida em E e uma sucessão de funções reais definidas em E.

a) Indique, de preferência simbòlicamente, o significado do que segue:

«$(f_n)_{n \in N}$ converge para f»; «$(f_n)_{n \in N}$ converge uniformemente para f».

b) Nas hipóteses: $E = R$; $f(x) = 0$, qualquer que seja $x \in R$; $f_n(x) = x/n$, qualquer que seja $x \in R$ e qualquer que seja $n \in N$, responda ao seguinte: represente f e f_n; escreva uma proposição P tal que a conjunção de P e da proposição verdadeira(!) «qualquer $x \in R$ é ponto de acumulação de R» seja a proposição «f é contínua» e verifique que P é verdadeira atendendo à sua construção (de preferência escrever P simbòlicamente).

5) Seja f uma função real definida em R, monótona e cujo contradomínio é um intervalo. Mostre que f é contínua.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 2.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 15-5-1962.

Ponto n.º 1

5551 — 1) Seja $f \in F(R - \{0\}, R)$ assim caracterizada: $f(x) = 1$.

a) Verifique que f é contínua (use a definição).

b) Verifique que f é derivável (use a definição).

c) Seja $a \in R$ e seja $\bar{a}$ o prolongamento de f a R assim caracterizado: $\bar{a}(0) = a$. A função $\bar{a}$ é contínua no ponto 0? Justifique a resposta.

2) Seja $f \in F(R, R)$.

a) Dê o significado do que segue: «f é estritamente monótona no ponto 0».

b) Na hipótese: existe Df e $0 \notin (Df)(R)$, verifique que f é estritamente monótona no ponto 0.

3) Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in \mathfrak{m}_{3,3}(R)$.

a) Notando f a aplicação linear de R^3 em R^3 cuja matriz é A, diga qual a imagem de

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \text{ por } f.$$

b) Na hipótese: $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $c \neq 0$, diga qual o contradomínio de f e caracterize a aplicação $g \in L(R^3, R^3)$, através da sua matriz, tal que a matriz de $f \circ g$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4) Seja $f \in F(R, R)$ nas hipóteses seguintes: existem $Df, D^2 f$ e $D^3 f$; $Df(0) = D^2 f(0) = D^3 f(0) = 0$; $D^3 f$ é derivável no ponto 0 e $(D^3 f)'(0) \in R^+ \cup \{+\infty\}$. Mostre que f tem mínimo estrito no ponto 0.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 2.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 15-5-1962.

Ponto n.º 2

5552 — Seja $f \in F(R, R)$ assim caracterizada: $f(x) = -2x$.

a) Verifique que f é contínua (use a definição).

b) Verifique f é derivável (use a definição).

2) Seja $a \in R$ e seja $\bar{a} \in F(]0, 2], R)$ assim caracterizada:

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} 1 - ax & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 - 2a + ax & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

a) Verifique que $\bar{a}$ é contínua no ponto 1.

b) Verifique que $\bar{a}$ tem extremo relativo no ponto 1; qualifique-o.

c) Notando $\dot{a}$ o prolongamento contínuo de $\bar{a}$ a $[0, 2]$, diga qual o valor de $\dot{a}$ no ponto 0 e diga, justificando, se $\dot{a}$ está nas hipóteses do teorema de Rolle.

3) Seja $f \in F(R^2, R^2)$ assim caracterizada: $f(x, y) = (x, x + y)$.

a) Verifique que f é linear e diga qual a matriz de f.

b) Caracterize $g \in L(R^2, R^2)$ tal que $g \circ f = I$, $I(x, y) = (x, y)$.

4) Seja $f \in F(R, R)$ tal que é verdadeira a proposição:

$$\text{«} \underset{k \in R_0^+}{\exists} \ \underset{x \in R}{\forall} \ \underset{y \in R}{\forall} \ (|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^2)\text{»}$$

Mostre que f é constante.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 1.ª Chamada — 19-6-1962.

5553 — Enuncie o critério de Cauchy; seguidamente aplique-o à série gerada pela sucessão $(a_n)_{n \in N}$, com $a_{2n} = 0$ e $a_{2n-1} = 1/(2n)^{2n-1}$, $n \in N$.

2) Seja $R - \{0\} \xrightarrow{f} R$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a) Com $\alpha \in R^+$, diga qual o conjunto $f(\overline{U}(0, \alpha))$.

b) Escreva duas proposições, de preferência simbòlicamente, cuja conjunção seja a proposição «f tem limite 0 no ponto 0» e verifique que são verdadeiras.

3) Seja $R \xrightarrow{f} R$ nas condições seguintes: existem Df e $D^2 f$; $0 \notin D^2 f(R)$.

a) Mostre que Df é estritamente monótona.

b) Mostre que o conjunto dos pontos nos mais f tem extremo relativo é $\overset{-1}{D} f(\{0\})$.

4) Sejam f e g funções reais definidas em $X \subset R$ e contínuas. Mostre que $X \xrightarrow{h} R$, $h(x)$ notando o ínfimo do conjunto $\{f(x)\} \cup \{g(x)\}$, é contínua.

5) Sejam A, B, C pontos não colineares.

a) Fórmulas de passagem do referencial

$$(A; B - A = \vec{i}, C - A = \vec{j})$$

para o referencial $(C; B - C = \vec{i}', A - C = \vec{j}')$.

b) Equação cartesiana e equações paramétricas, no referencial $(A; \vec{i}, \vec{j})$, da recta [do plano ABC] que passa por C e é perpendicular à recta BC.

6) Sejam O, U, V, W pontos não-coplanares e considere o referencial

$$(O; U - O = \vec{i}, \ V - O = \vec{j}, \ W - O = \vec{k}).$$

a) São dadas as rectas $\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ e $x = y = z$ e os planos $x = 0$ e $y = 0$; equações cartesianas e equações paramétricas de recta que é coplana àquelas rectas e é paralela àqueles planos.

b) Fórmulas de passagem do referencial dado para o referencial $(O'; A - O' = \vec{i}', B - O' = \vec{j}', C - O = \vec{k}')$, com $O' - O = \vec{i} + \vec{j}$, $A - O' = -\vec{i} + \vec{j}$, $B - O' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $C - O' = \vec{k}$.

Nota: Dos exercícios V e VI, resolver apenas um.

R: 1) *Seja* $\sum_{n \in N} a_n$ *uma série de termos não-negativos; se existir* $r \in [0, 1[$ *tal que* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant r$, $n \in N$, *a série* $\sum_{n \in N} a_n$ *é convergente.*

Aplicação. *Com* $a_{2n} = 0$ *e* $a_{2n-1} = 1/(2n)^{2n-1}$, $n \in N$, *virá* $\sqrt[2n]{a_{2n}} = 0$ *e* $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = 1/2n$, $n \in N$; *logo* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant 1/2$, $n \in N$.

R: 2) *a*) $\overline{U}(0, \alpha) = U(0, \alpha) - \{0\}$; $U(0, \alpha) =]-\alpha, \alpha[$; $f(\overline{U}(0, \alpha)) = [0, 3\alpha[$.

b) $P_1 = \underset{\alpha \in R^+}{\forall} R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\alpha) \neq \emptyset$;

$$P_2 = \underset{\beta \in R^+}{\forall} \ \underset{\alpha \in R^+}{\exists} f(R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\alpha)) \subset U(0,\beta).$$

P_1 *é verdadeira:* $R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\alpha) = \overline{U}(0,\alpha) \neq \emptyset$!
P_2 *é verdadeira: para cada* $\beta \in R^+$, *tome-se* $\alpha = \beta/3$.

R: 3) *a) Das hipóteses resulta que* $R \xrightarrow{Df} R$ *é contínua e biunívoca; é pois estritamente monótona [observe-se que o domínio de* Df *é um intervalo!].*

b) Como f *é finitamente derivável e o seu domínio é igual ao seu interior, o conjunto dos pontos nos quais* f *tem extremo relativo está contido em* $\overset{-1}{Df}(\{0\})$.

1.ª hipótese: $\overset{-1}{Df}(\{0\}) = \emptyset$. *Nada há a demonstrar!*

2.ª hipótese: $\overset{-1}{Df}(\{0\}) \neq \emptyset$. *Este conjunto será então constituido por um só elemento, que notamos* a; *supondo* Df *estritamente crescente, é* $Df(]a, \to[) \subset R^+$ *e* $Df(]\leftarrow, a[) \subset R^-$; *logo* f *tem mínimo relativo estrito no ponto* a, *como mostra o teorema da média de* Lagrange *aplicado às restrições* $f|[a,x]$, $a < x < a+1$, *e* $f|[x,a]$, $a - 1 < x < a$.

R: 4) *Bastará mostrar que é verdadeira a proposição:*

$$«\underset{a \in X}{\forall} \ \underset{\varepsilon \in R^+}{\forall} \ \underset{\delta \in R^+}{\exists} h(U(a,\delta) \cap X) \subset U(h(a),\varepsilon)».$$

1.ª hipótese: $f(a) = g(a)$; *então* $h(a) = g(a)$; *imediato!*

2.ª hipótese: $f(a) \neq g(a)$; *seja* $f(a) > g(a)$; *então* $h(a) = g(a)$. *Pela continuidade de* f *e* g *no ponto* a, *existe* $\alpha \in R^+$ *tal que* $f(x) > g(x)$, *para qualquer* $x \in U(a,\alpha) \cap X$; *logo* $h(x) = g(x)$, *para qualquer* $x \in U(a,\alpha) \cap X$. *A conclusão é agora imediata!*

R: 5) *a) Coordenadas de* C: $(0,1)$ — *no referencial* $(A; \vec{i}, \vec{j})$;

Componentes de $\vec{i'}$: $(1,-1)$ — *na base* $(\vec{i}, \vec{j})$;

Componentes de $\vec{j'}$: $(0,-1)$ — *na base* $(\vec{i}, \vec{j})$.

Fórmulas de passagem: $\begin{cases} x = x' \\ y = 1 - x' - y' \end{cases}$

b) equação cartesiana: $(\vec{i} - \vec{j}) \mid (x\vec{i} + (y-1)\vec{j}) = 0$

ou $(\vec{i}|\vec{i} - \vec{i}|\vec{j})\,x + (\vec{i}|\vec{j} - \vec{j}|\vec{j})\,y = \vec{i}|\vec{j} - \vec{j}|\vec{j}$

equações paramétricas: $\begin{cases} x = (\vec{j}|\vec{j} - \vec{i}|\vec{j})\,\lambda \\ y = 1 + (\vec{i}|\vec{i} - \vec{i}|\vec{j})\,\lambda \end{cases}$

R: 5) *a) Parâmetros directores da recta* $x = y = 0$: $0, 0, 1$.

$$\alpha(x + y - 2) + \beta z = 0; \quad \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0; \quad \alpha = 1 \ \text{e} \ \beta = 0$$

$$\alpha'(x - y) + \beta'(x - z) = 0;$$

$$(\alpha' + \beta') \cdot 0 + (-\alpha') \cdot 0 + (-\beta') \cdot 1 = 0; \quad \alpha' = 1 \ \text{e} \ \beta' = 0$$

equações cartesianas $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

Nota: *Imediatamente se poderiam escrever as equações* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$, *atendendo aos dados do problema!*

b) Fórmulas de passagem $\begin{cases} x = 1 - x' + y' \\ y = 1 + x' + y' \\ z = y' + z' \end{cases}$

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 2.ª Chamada — 22-6 1962.

5554 — Seja $(a_n)_{n \in N}$ uma sucessão real e seja $(b_n)_{n \in N}$ a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n \in N} a_n$. Como sabe, as expressões «a série $\sum_{n \in N} a_n$ é convergente», «a sucessão $(b_n)_{n \in N}$ é convergente» e «a sucessão $(b_n)_{n \in N}$ é regular» são sinónimas. Indique o significado das duas últimas e através disso conclua o seguinte: a serie $\sum_{n \in N} \operatorname{sen}(\pi n)$ é convergente; a série $\sum_{n \in N} (-1)^n$ não é convergente.

2) Seja $R - \{0\} \xrightarrow{f} R$ assim condicionada: $f(x) = 2x + 2$ se $x > 0$; $f(x) \leqslant 1$ se $x < 0$. Diga qual o conjunto $\overset{-1}{f}(]1,3[)$ e diga, para cada $\alpha \in R^+$, qual o conjunto $f(]0,\alpha[)$. Seguidamente verifique que são verdadeiras as proposições:

$$\underset{\alpha \in R^+}{\exists} \ \underset{\beta \in R^+}{\forall} f(R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\beta)) \not\subset U(2,\alpha)$$

$$\underset{\alpha \in R^+}{\forall} \ \underset{\beta \in R^+}{\exists} f(R - \{0\} \cap]0, \to[\cap \overline{U}(0,\beta)) \subset U(2,\alpha).$$

3) Seja $[0, \to[\xrightarrow{f} R$ assim condicionada: é indefinidamente derivável; $D^n f(0) = 1$, qualquer que seja $n \in N$; $0 \notin D^n f([0, \to[)$, qualquer que seja $n \in N$.

a) Verifique que, para qualquer $n \in N$ e qualquer $x \in]0, \rightarrow[$, é:

$$f(x) > f(0) + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

b) Para cada $n \in N$, diga quais os pontos nos quais $D^n f$ tem extremo relativo.

4) Sejam $a \in R$ e $b \in R$ com $a < b$ e seja $[a, b] \overset{f}{\rightarrow} R$ nas condições seguintes: é contínua; tem limite $-\infty$ no ponto b; é estritamente crescente no ponto a. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que f tem máximo relativo no ponto c.

5) Considere um referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *não mètricamente fixado.*

a) Componentes de um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ normal ao plano de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

b) Equações cartesianas e equações paramétricas da normal comum às rectas $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, na hipótese: $\|\vec{i}\| = 2$; $\|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$; $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) = \sphericalangle(\vec{j}, \vec{k}) = \sphericalangle(\vec{i}, \vec{k}) = \pi/2$.

6) Considere um referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e as famílias de rectas: $r_\lambda\ (\lambda \in R)\ \begin{cases} y + z = \lambda \\ x = \lambda(y - z) \end{cases}$;

$$s_\mu\ (\mu \in R) \begin{cases} y - z = \mu \\ x = \mu(y + z) \end{cases}.$$

a) Equações cartesianas das rectas r'_λ e s'_μ que passam pela origem e são paralelas, respectivamente, a r_λ e s_μ. Seguidamente indique as coordenadas dos pontos de r'_λ e de s'_μ que têm ordenada 1 e aproveite-as para concluir que r_λ e s_μ não são paralelas.

b) Fórmulas de passagem do referencial dado para um qualquer referencial cujos novos eixos sejam:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{(eixo das abcissas)};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{(eixo das ordenadas)};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{(eixo das cotas)}.$$

Nota: Dos exercícios V e VI, resolver apenas um.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 1.ª chamada — 1-10-1962.

5555 — 1) Considere um referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e os pontos $A = (0, 2, 1)$ e $B = (2, 4, 3)$.

a) Suponha $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ mètricamente fixado como se indica: $(\alpha, \beta, \gamma) \mid (\alpha', \beta', \gamma') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$. Escreva fórmulas de passagem de $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ para um qualquer dos referenciais orto-normados nas condições seguintes: o eixo das abcissas é a recta AB e o eixo das ordenadas passa por O.

b) Suponha $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ mètricamente fixado como se indica: $(\alpha, \beta, \gamma) \mid (\alpha', \beta', \gamma') = \alpha(2\alpha' + \beta') + \beta(\alpha' + 2\beta') + \gamma\gamma'$; resolva o mesmo problema da alínea *a*).

2) Seja u a aplicação linear de R^2 em R^2 assim caracterizada: $u(1, 0) = (1, 5)$; $u(0, 1) = (2, 4)$. Determine os elementos do conjunto: $S(u) = \{\lambda \in R \mid \text{existe } x \in R^2 - \{(0,0)\} \text{ tal que } u(x) = \lambda x\}$.

3) Seja $(u_n)_{n \in N}$ uma sucessão real nas condições seguintes: existe $r \in [0, 1[$ tal que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant r\,|u_{n+1} - u_n|$, $n = 1, 2, \cdots$. A série $\sum_{n \in N} |u_{n+1} - n_n|$ é convergente? A sucessão $(u_n)_{n \in N}$ é convergente?

4) Seja $[0, 1] \overset{u}{\rightarrow} R$ nas condições seguintes: tem contradomínio contido em $[0, 1]$ e é contínua. Conclua que existe $x \in [0, 1]$ tal que $u(x) = x$.

5) Seja $[0, 1] \overset{u}{\rightarrow} R$ nas condições seguintes: é continuamente derivável e $Du(Q \cap [0, 1]) = \{0\}$. Conclua que $u([0, 1]) = \{u(0)\}$.

R: 1) *Seja* $(O'; \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ *um dos oito referenciais nas condições impostas; então, genèricamente, eles serão representados do modo seguinte:* $(O'; \rho\vec{i'}, \sigma\vec{j'}, \tau\vec{k'})$, $|\rho| = |\sigma| = |\tau| = 1$.

1.º *Equações paramétricas da recta* AB:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

2.º *Determinação de* O':

$$(\lambda, 2 + \lambda, 1 + \lambda) \mid (1, 1, 1) =$$

$$= 0 \begin{cases} a)\ \lambda \cdot 1 + (2 + \lambda) \cdot 1 + (1 + \lambda) \cdot 1 = 0; \\ \quad \lambda = -1;\ O' = (-1, 1, 0) \\ b)\ \lambda \cdot 3 + (2 + \lambda) \cdot 3 + (1 + \lambda) \cdot 1 = 0; \\ \quad \lambda = -1;\ O' = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

3.º *Determinação de* $\vec{i'}$:

$$a)\quad \vec{i'} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$b)\quad \vec{i'} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1)$$

4.º *Determinação de* $\vec{j'}$:

$$a)\quad \vec{j'} = \frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

$$b)\quad \vec{j'} = \frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

5.º *Determinação de* $\vec{k'}$:

$$a)\quad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta \quad\;\, =0 \end{cases};\ (1,1,-2);$$

$$\frac{(1,1,-2)}{\|(1,1,-2)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$b)\quad \begin{cases} 3\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta \qquad\;\, =0 \end{cases};\ (1,1,-6);$$

$$\frac{(1,1,-6)}{\|(1,1,-6)\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(1,1,-6)$$

6.º *Fórmulas de passagem de* $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *para* $(O';\rho\vec{i'},\sigma\vec{j'},\tau\vec{k'})$ $(|\rho|=|\sigma|=|\tau|=1)$:

$$a)\quad \begin{cases} x = -1 + \frac{\rho}{\sqrt{3}}x' - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \frac{\tau}{\sqrt{6}}z' \\ y = \;\;\,1 + \frac{\rho}{\sqrt{3}}x' + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \frac{\tau}{\sqrt{6}}z' \\ z = \qquad\;\; \frac{\rho}{\sqrt{3}}x' \qquad\qquad\; - \frac{2\tau}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} x = -1 + \frac{\rho}{\sqrt{7}}x' - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \frac{\tau}{\sqrt{42}}z' \\ y = \;\;\,1 + \frac{\rho}{\sqrt{7}}x' + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \frac{\tau}{\sqrt{42}}z' \\ z = \qquad\;\; \frac{\rho}{\sqrt{7}}x' \qquad\qquad\; - \frac{6\tau}{\sqrt{42}}z' \end{cases}$$

2) *Deverá procurar-se* $\lambda \in R$ *pela condição do sistema linear sobre* R *e nas incógnitas* x_1 *e* x_2:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases},$$

ter solução além da trivial. Virá

$$D\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0;$$

logo $S(u) = \{-1, 6\}$.

3) *Das hipóteses resulta que*

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant r^{n-1}\,|u_2 - u_1|,\ n \in N;$$

logo

$$\sum_{p=1,\dots,n} |u_{p+1} - u_p| \leqslant |u_2 - u_1| \sum_{p=1,\dots,n} r^{p-1}.$$

A série $\sum_{n\in N} |u_{n+1} - u_n|$ *é pois convergente; a série* $\sum_{n\in N} (u_{n+1} - u_n)$ *é também convergente e assim a sucessão* $(u_n)_{n\in N}$ *é convergente.*

4) *1.ª hipótese:* $u(0) = 0$ *ou* $u(1) = 1$. *Nada há a provar!*

2.ª hipótese: $u(0) \neq 0$ *e* $u(1) \neq 1$. *A função* $[0,1] \overset{v}{\to} R,\ v(x) = u(x) - x$, *é contínua e* $v(0)\,v(1) < 0$; *logo existe* $x \in\,]0,1[$ *tal que* $v(x) = 0$, *ou seja,* $u(x) = x$.

5) *Seja* $[0,1] \overset{v}{\to} R$, $v(x) = 0$. *Como* v *e* Du *são contínuas e têm a mesma restrição a* $Q \cap [0,1]$, $v = Du$. *É portanto* $Du([0,1]) = \{0\}$ *e assim* $u([0,1]) = \{u(0)\}$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 2.ª Chamada — 4-10-1962.

5556 — 1) Considere um referencial $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ e os pontos $A=(1,2,3)$, $B=(2,4,6)$, $C=(1,-2,1)$ e $D=(5,2,-5)$.

a) Suponha $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ e $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) = \sphericalangle(\vec{i},\vec{k}) = \pi/2$. Equações paramétricas e equação cartesiana do plano que passa pela recta AB e é perpendicular ao plano OCD.

b) Suponha $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \pi/3$ e $\sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) = \sphericalangle(\vec{i},\vec{k}) = \pi/2$. Ângulo da recta AB com o plano OCD.

2) Sejam (a,b,c) e (l,m,n) pontos de R^3. Use o teorema de Rouché a fim de estudar a compatibilidade do sistema linear sobre R e nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} \qquad\;\; -cy + bz = l \\ cx \qquad\;\; - az = m \\ -bx + ay \qquad\; = n \end{cases}$$

3) Considere a série real $\sum_{n\in N} a_n$, com $a_n = 1/n \log(2n)$. Enuncie o critérério da condensação de Cauchy e aplique-o à série dada.

4) Seja $[0,1] \overset{u}{\to} R$ nas condições seguintes: tem contradomíno contido em $[0,1]$ e, para quaisquer números *distintos* x e y de $[0,1]$, é $|u(x)-u(y)| < |x-y|$.

a) Verifique que u é contínua.

b) Por aplicação do teorema de Weierstrass à função $[0,1] \overset{v}{\to} R$, $v(x) = |u(x) - x|$, conclua que existe $x \in [0,1]$ tal que $u(x) = x$.

5) Seja $[0,1] \overset{u}{\to} R$ nas condições seguintes: é simétrica no ponto $\frac{1}{2}$, isto é, $u\left(\frac{1}{2}+x\right) = u\left(\frac{1}{2}-x\right)$, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; é derivável no ponto $\frac{1}{2}$. Calcule $u'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Enunciados e soluções dos n.os 5548 a 5556 de
Anibal Coimbra Aires de Matos

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de Frequência Ordinário — 23-6-1962.

I

5557 — 1) Estude a função $y = \log(x^2 - 3x + 2)$.

2) Diga como separa os zeros de $f(x)$ por meio da sucessão de Rolle.

Discuta, consoante os valores do parâmetro k, a localização dos zeros de $f(x) = x^3 - 3x + k$.

3) Enuncie e demonstre o teorema sobre a diferenciabilidade de uma função composta.

Dada a função $f(x,y) = \dfrac{x^3 - x y^2}{x^4 + y^4}$, $f(0,0) = 0$, calcule $\lim\limits_{x=0} \lim\limits_{y=0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y=0} \lim\limits_{x=0} f(x,y)$ e $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} f(x,y)$. A função é contínua em $(0,0)$? Porquê?

R: 1) a) *Domínio:* $]-\infty, 1[$ *e* $]2, +\infty[$.
Pontos de descontinuidade: $1, 2$ e ∞.
Pontos de intersecção com os eixos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \log 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

b) *Crescimento. Extremos*

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \qquad \begin{matrix} y' > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2} \\ y' < 0 \Rightarrow x < \dfrac{3}{2} \end{matrix}$$

A função é crescente em $]2, +\infty[$ *e decrescente em* $]-\infty, 1[$. *Não tem extremos.*

c) *Convexidade. Pontos de inflexão.*

$$y'' = \frac{-2x^2 + 6x - 5}{(x^2 - 3x + 2)^2} < 0$$

e portanto a função é concava. Não há pontos de inflexão.

d) *Assíntotas:*

$$X = 1 \ e \ X = 2$$

2) $f'(x) = 3x^2 - 3$ *e os zeros da primeira derivada são* $x_1 = -1$ *e* $x_2 = 1$. *A sucessão de Rolle é*

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$k+2$	$k-2$	$+$

e, em princípio, poderá ter-se

$k+2$	$k-2$	*Localização dos zeros*
$+$	$+$	$k > 2$: *uma raiz em* $]-\infty, -1[$
$+$	$-$	$-2 < k < 2$: *uma raiz em* $]-\infty, 1[$, *outra em* $]-1, 1[$ *e outra em* $]1, +\infty[$
$-$	$-$	$k < -2$: *uma raiz em* $]1, +\infty[$
$-$	$+$	*Impossível*
0	$+$	*Impossível*
0	$-$	$k = -2$: *uma raiz igual a* -1 *e outra em* $]1, +\infty[$
0	0	*Impossível*
$+$	0	$k = 2$: *uma raiz em* $]-\infty, -1[$ *e outra igual a* 1
$-$	0	*Impossível*

3) $\lim\limits_{x=0} \lim\limits_{y=0} f(x,y) = \infty$, $\lim\limits_{y=0} \lim\limits_{x=0} f(x,y) = 0$. *Não existe pois* $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} f(x,y)$ *e assim* $f(x,y)$ *não é contínua em* $(0,0)$ *nem pode tornar-se contínua.*

II

5558 — 1) Sendo a e b dois números inteiros quaisquer e supondo que o polinómio real $g(x)$ tem raízes inteiras, prove que pelo menos um dos números $g(a), g(a+1), g(a+2), \cdots g(a+b-1)$ deve ser divisível por b.

2) Deduza a fórmula interpoladora de Lagrange $I(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} y_i$. Fazendo $x = hu + a$, $x_i = hu_i + a$ (a e h constantes) mostre que $I(x) = I(u)$.

3) Seja $AX = B$ um sistema de m equações lineares a n incógnitas e r a característica de A. Se fôr $r < m$, em que condições o sistema é possível determinado e possível indeterminado?

No caso em que $B = O_{m \times 1}$ e o sistema é indeterminado, o que entende por um sistema fundamental de soluções?

R: 1) *Se* $g(x)$ *admite a raíz inteira* $x = p$ *então*

$$g(a) = \dot{\overline{a - p}}$$

$$g(a+1) = \dot{\overline{a - p + 1}}$$

$$g(a+2) = \dot{\overline{a - p + 2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g(a+b-1) = \dot{\overline{a - p + b - 1}}$$

e como os números $a - p, a - p + 1, \cdots a - p + b - 1$ *são* b *inteiros consecutivos um deles é divisível por* b *e, portanto, um dos números* $g(a), g(a+1), \cdots \cdots g(a+b-1)$ *é múltiplo de* b.

2) $$\varphi_i(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)_{j \neq i} = h^n \prod_{j=1}^{n} (u - u_j)_{j \neq i} = h^n \varphi_i(u)$$

$$\varphi_i(x_i) = h^n \prod_{j=1}^{n} (u_i - u_j)_{j \neq i} = h^n \varphi_i(u_i)$$

$$L_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} = \frac{h^n \varphi_i(u)}{h^n \varphi_i(u_i)} = \frac{\varphi_i(u)}{\varphi_i(u_i)} = L_i(u)$$

e portanto $I(x) = I(u)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de Frequência Extraordinário — 26-6-1962.

I

5559 — 1) Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente para que a recta $Y = mX + p$ seja assíntota da curva $y = f(x)$.

Mostre que a função $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$ se pode escrever na forma $f(x) = 2x + 2 + \varphi(x)$ com $\lim\limits_{x = +\infty} \varphi(x) = 0$.

2) O polinómio $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$ tem o zero $a = -1$. Mostre que o zero é duplo e demonstre a proposição em que basear a resposta.

Qual é o polinómio do segundo grau $h(x)$ que deve adicionar a $g(x)$ para que $a = -1$ seja raíz tripla de $g(x) + h(x)$?

3) Considere a função $F(x,y)$ com derivadas finitas $F'_x(a,b)$ e $F'_y(a,b)$. Que pode afirmar acerca da continuidade das funções $F(x,b)$ $F(a,y)$? Porquê?

Se uma das derivadas fôr contínua em $P(a,b)$, prove que $F(x,y)$ é contínua e diferenciável em $P(a,b)$. Se quisesse apenas garantir a continuidade de $F(x,y)$ em $P(a,b)$ seria preciso exigir a continuidade de uma das derivadas? Porquê?

R: 1) *A função* $f(x)$ *tem a assíntota obliqua* $Y = 2X + 2$ *e portanto pode escrever-se na forma* $f(x) = 2x + 2 + \varphi(x)$, *com* $\lim\limits_{x = +\infty} \varphi(x) = 0$.

2) $a = -1$ *anula* $g(x)$, $g'(x)$ *e não nula* $g''(x)$. *Trata-se pois de um zero duplo.*

$$g(x) + h(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5 + ax^2 + bx + c =$$
$$= 2x^3 + (9+a)x^2 + (12+b)x + (5+c)$$

e, como terá de ser $g(x) + h(x) = 2(x+1)^3$, *resultam, as condições*

$$\begin{cases} 9 + a = 6 \\ 12 + b = 6 \\ 5 + c = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = -3 \end{cases}$$

isto é, $h(x) = -3x^2 - 6x - 3$.

II

5560 — 1) Deduza as fórmulas de Girard e utilize-as para achar a relação que deve existir entre a, b, c, e d por forma que uma das raízes do polinómio $az^3 + bz^2 + cz + d$ seja igual à soma das outras duas.

2) Dada a tabela de valores $\begin{array}{c|ccc} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}$, escreva a expressão geral do polinómio interpolador e utilize a teoria dos sistemas lineares para mostrar que o polinómio interpolador pode apresentar-se na forma

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

3) Defina complemento algébrico de um menor e prove que é nula a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos complementos dos elementos homólogos de outra fila paralela.

R: 1) $$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 = z_2 + z_3 \end{cases} \text{ e daqui se tira } z_1 = -\frac{b}{2a}.$$

A relação é pois

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{2a}\right) + d = 0$$

ou $$b^3 - 4abc + 8a^2 d = 0.$$

2) *A expressão geral do polinómio interpolador é*

$y = a + bx + cx^2$ *e deverá ter-se, evidentemente:*

$$\begin{cases} y = a + bx + cx^2 \\ y_0 = a + bx_0 + cx_0^2 \\ y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

e para que este sistema de quatro equações a três incógnitas seja possível é preciso que (teorema de Rouché):

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final. Época de Julho (1.ª chamada) — Prova Prática — 12/7/62.

5561 — 1) Define-se *divisão* de conjuntos por meio da fórmula $A:B = A \cup \widetilde{B}$. Prove que:

a) $A:(B\cap C) = (A:B):C$

b) $A:(B\cup C) = (A:B)\cap(A:C)$.

R: a) $A:(B\cap C) = A\cup(\widetilde{B\cap C}) = A\cup(\widetilde{B}\cup\widetilde{C}) = (A\cup\widetilde{B})\cup\widetilde{C} = (A:B)\cup\widetilde{C} = (A:B):C$

b) $A:(B\cup C) = A\cup(\widetilde{B\cup C}) = A\cup(\widetilde{B}\cap\widetilde{C}) = (A\cup\widetilde{B})\cap(A\cup\widetilde{C}) = (A:B)\cap(A:C)$.

2) Calcule $\lim\limits_{n=\infty} n^2\left[\log(n+3) - \log n - \frac{1}{n}\right]$.

R: $\lim\limits_{n=\infty} n^2\left[\log(n+3) - \log n - \frac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n=\infty} n^2\left[\log\left(1+\frac{3}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n=\infty} n^2\left(\eta\frac{3}{n} - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n=\infty} n(3\eta - 1) = +\infty \quad (\eta \to 1)$.

3) Calcule $P\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

R: *Fazendo* $\dfrac{1+x}{1-x} = t^2$ *vem* $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

e

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

Portanto

$$P\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 4P\frac{t^2}{(t^2+1)^2} = 4P\frac{1}{t^2+1} - 4P\frac{1}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 4\,arctg\,t - 4\left(\frac{1}{2}\,arctg\,t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right) = 2\,arctg\,t - \frac{2t}{1+t^2} = 2\,arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

4) Dada a função $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + b}{cx^2 + 4}$

a) Determine as constantes a, b e c de modo que o gráfico de $f(x)$ seja tal que a recta $x + y = 0$ seja uma assíntota e o ponto $(0, f(0))$ seja de inflexão.

b) Esboce o gráfico de $f(x)$.

R: a) *Dividindo* $x^3 + ax^2 + b$ *por* $cx^2 + 4$ *obtem-se o cociente* $\frac{1}{c}x + \frac{a}{c}$ *e um resto do primeiro grau, isto é,* $f(x) = \frac{1}{c}x + \frac{a}{c} + \varphi(x)$ *com* $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x) = 0$. *A assíntota é pois* $y = \frac{1}{c}x + \frac{a}{c}$ *donde se conclui que* $c = -1$ *e* $a = 0$. *Ora para* $f(x) = \dfrac{x^3+b}{-x^2+4}$ *tem-se*

$$f''(x) = \frac{(-4x^3+24x+2b)(-x^2+4) + 4x(-x^4+12x^2+2bx)}{(-x^2+4)^3}$$

e $f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$.

b) *O domínio de* $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ *é*

$$]-\infty, -2[\,,]-2, 2[\,,]2, +\infty[$$

e a curva é simétrica em relação à origem.

$f'(x) = \dfrac{x^2}{(4-x^2)^2}(12 - x^2)$ *e a função é crescente em* $[-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$ *e decrescente em* $]-\infty, -\sqrt{12}]$ *e* $[\sqrt{12}, +\infty[$; $x = -\sqrt{12}$ *é minimizante e* $x = \sqrt{12}$ *é maximizante.*

Como $f''(x) = \dfrac{8x}{(4-x^2)^3}(12 + x^2)$ *a função é convexa em* $]-\infty, -2[$ *e* $[0, 2[$ *e concava em* $]-2, 0]$ *e* $]2, +\infty[$.

As assíntotas são $y = -x$, $x = -2$ *e* $x = 2$.

5) Dada a função

$$g(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & [(x,y) \neq (0,0)] \\ 0 & [(x,y) = (0,0)] \end{cases}$$

calcule $g'_x(0,0)$, $g'_y(0,0)$, $g''_{xy}(0,0)$ e $g''_{yx}(0,0)$.

R. $g'_x(0,0) = \lim\limits_{x=0}\dfrac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = 0$,

$g'_y(0,0) = \lim\limits_{y=0}\dfrac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0$

$$g'_x(0,y) = \lim_{x=0} \frac{g(x,y) - g(0,y)}{x} =$$
$$= \lim_{x=0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$
$$g'_y(x,0) = \lim_{y=0} \frac{g(x,y) - g(x,0)}{y} =$$
$$= \lim_{y=0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x$$
$$g''_{xy}(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g'_x(0,y) - g'_x(0,0)}{y} = -1$$
$$g''_{yx}(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g'_y(x,0) - g'_y(0,0)}{x} = 1$$

6) Considere o determinante de ordem $n+1$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Prove que $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$ e utilize esta fórmula para calcular D_n.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de* LAPLACE, *segundo os elementos da primeira coluna, vem:*

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_n x^n + D_{n-1}$$

De $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$ *obtem-se o conjunto de igualdades*

$$\begin{aligned} D_n &= a_n x^n + D_{n-1} \\ D_{n-1} &= a_{n-1} x^{n-1} + D_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_2 &= a_2 x^2 + D_1 \end{aligned}$$

que somadas membro a membro dão $D_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + D_1$.

Ora $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$ *e por conseguinte*

$$D_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final: Época de Julho (2.ª chamada) — Prova prática — 16/7/62.

5562 — 1) Prove que:

a) $A \cup B = A \cup (\widetilde{A} \cap B)$

b) $B = (A \cap B) \cup (\widetilde{A} \cap B)$

R: a) $x \in A \cup (\widetilde{A} \cap B) = x \in A \vee x \in (\widetilde{A} \cap B) =$
$= x \in A \vee (x \in \widetilde{A} \wedge x \in B) =$
$= [x \in A \vee \sim (x \in A)] \wedge (x \in A \vee x \in B) =$
$= x \in A \vee x \in B = x \in A \cup B$.

b) $x \in (A \cap B) \cup (\widetilde{A} \cap B) = (x \in A \wedge x \in B) \vee$
$\vee [\sim (x \in A) \wedge x \in B] =$
$= x \in B \wedge [x \in A \vee \sim (x \in A)] = x \in B$.

Nota: Em qualquer das alíneas a proposição $x \in A \vee \sim (x \in A)$ *é uma tautologia.*

2) Calcule $P \dfrac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

R: $$\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{S_0}{x^2+1} + \frac{T_0}{x^2+2} .$$

Cálculo de S_0:

Fazendo $\Delta = x^2 + 1$, *vem* $R_\Delta(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2} = \dfrac{x-1}{1+\Delta}$ *e* $S_0 = x - 1$.

Cálculo de T_0:

Fazendo $\Omega = x^2 + 2$, *vem* $R_\Omega(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1} = \dfrac{x-1}{-1+\Omega}$

e $T_0 = 1 - x$

Então:

$$P \frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = P \frac{x-1}{x^2+1} + P \frac{1-x}{x^2+2} =$$
$$= \frac{1}{2} P \frac{2x}{x^2+1} - P \frac{1}{x^2+1} + P \frac{1}{x^2+2} -$$
$$- \frac{1}{2} P \frac{2x}{x^2+2} = \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \log(x^2+2) = \log \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}} -$$
$$- \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

3) Aplique a fórmula dos acréscimos finitos à função $y = \log(1+x)$ no intervalo $[0, x]$ e resolva os seguintes problemas:

a) Calcule θ em função de x e prove que $\lim\limits_{x=0} \theta = \dfrac{1}{2}$.

b) Ache $\dfrac{d\theta}{dx}$ e mostre que $x^2 y^2 \dfrac{d\theta}{dx}$ pode exprimir-se unicamente como função de y. Deduza daí que $\dfrac{d\theta}{dx} < 0$.

R: a) $log\,(1+x) = x\,\dfrac{1}{1+\theta x} \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{log\,(1+x)} -$

$$-\frac{1}{x}\ \lim_{x=0} \theta = \lim_{x=0}\left[\frac{1}{log\,(1+x)} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{x - log\,(1+x)}{x\,log\,(1+x)} = \lim_{x=0} \frac{1 - 1/1+x}{log\,(1+x) + x/1+x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{1/(1+x)^2}{1/1+x+1/(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

b) *De* $y = log\,(1+x)$ *vem* $x = e^y - 1$ *e portanto* $\theta = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{e^y} + \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 y^2 \frac{d\theta}{dx} = y^2 - x^2 e^{-y} = y^2 - (e^y - 1)^2 e^{-y}$$

Ora $\quad x^2 y^2 \dfrac{d\theta}{dx} = y^2 - (e^y - 2 + e^{-y}) = y^2 -$

$$-\left[\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\cdots\right)+\left(1-y+\frac{y^2}{2!}-\cdots\right)-2\right] =$$

$$y^2 - 2\left(\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\right) = -2\left(\frac{y^4}{4!}+\frac{y^6}{6!}+\cdots\right) < 0$$

donde se conclui que $\dfrac{d\theta}{dx} < 0$

4) Dada a função $w = F(u)$, com $u = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$, mostre que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

R:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)\,f'\,g\,h$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = F'(u)\,f\,g'\,h$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F''(u)\,f f' g\, g' h^2 + F'(u)\,f'\,g'\,h = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

5) Determine a, b e c de modo que o polinómio $x^3 - a x^2 + b x + c$ tenha as raízes a, b e c.

R:

$$\begin{cases} a+b+c = a \\ ab+ac+bc = -b \\ abc = -c \end{cases} \qquad \begin{cases} b+c = 0 \\ bc = -b \\ abc = -c \end{cases}$$

e, supondo que $b \neq 0$,

$$vem \begin{cases} b+c = 0 \\ c = -1 \\ ab = -1 \end{cases} \quad donde \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$b = 0 \Rightarrow c = 0 \wedge a$ *qualquer*

6) Estude o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= k \end{aligned}$$

R:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -k \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -k \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -k \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A característica da matriz do sistema é $r = 3$. *O sistema será impossível se* $k \neq 3$ *e possível se* $k = 3$.

Neste último caso a solução é $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Outubro — Prova escrita — 4-10-1962.

5563 — 1) Calcule a soma da série

$$\sum_0^\infty \frac{4n}{(n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3)}.$$

R: *Notando que* $\dfrac{4n}{(n^2-2n+3)(n^2+2n+3)} =$

$= \dfrac{1}{n^2-2n+3} - \dfrac{1}{n^2+2n+3}$, *a série dada é da forma* $\sum\limits_0^\infty (a_n - a_{n+2})$ *com* $a_n = \dfrac{1}{n^2-2n+3}$.

Como $a_n \to 0$, *tem-se* $S = a_0 + a_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

2) Calcule $P\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}$.

R: *Fazendo* $tg\dfrac{x}{2} = t$, *vem* $sen\, x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $cos\, x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *e* $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$. *Então:*

$$P\frac{1}{sen\, x + cos\, x + 1} = P\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{1+t^2} = P\frac{1}{1+t} = log\,|1+t| + C =$$

$$= log\left|1 + tg\frac{x}{2}\right| + C .$$

3) Dada a função $f(x) = \begin{cases} 1/x \ (x < -1) \\ x \ (-1 \leq x < 1) \\ x^2 + 1 \ (1 \leq x) \end{cases}$ estude a sua continuidade e derivabilidade.

Represente geomètricamente $f(x)$.

R: *A função é contínua em todos os pontos próprios, excepto* $x = 1$. *Em* $x = -\infty$ *é contínua e em* $x = +\infty$ *é descontínua.*

Para $x < -1$ *tem-se* $f'(x) = -1/x^2$; *em* $x = -1$ *é* $f'_e(-1) = -1$ *e* $f'_d(-1) = 1$ *e portanto não existe* $f'(-1)$; *para* $-1 < x < 1$ *vem* $f'(x) = 1$; *em* $x = 1$ *é* $f'_e(1) = +\infty$ *e* $f'_d(1) = 2$ *e portanto também não existe* $f'(1)$; *finalmente, para* $x > 1$ *é* $f'(x) = 2x$.

4) Sendo $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^3 - 2xy^2)\operatorname{sen} y}{x^2+y^2} \ [(x,y) \neq (0,0)] \\ 0 \ [(x,y) = (0,0)] \end{cases}$ calcule $g''_{xy}(0,0)$ e $g''_{yx}(0,0)$.

R: $$g'_x(0,0) = \lim_{x=0}\frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = 0$$

$$g'_x(0,y) = \lim_{x=0}\frac{g(x,y) - g(0,y)}{x} =$$

$$= \lim_{x=0}\frac{(x^2 - 2y^2)}{x^2+y^2}\, sen\, y = -2\, sen\, y$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{y=0}\frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0$$

$$g'_y(x,0) = \lim_{y=0}\frac{g(x,y) - g(x,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0}\frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{sen\, y}{y} = x$$

$$g''_{xy}(0,0) = \lim_{y=0}\frac{g'_x(0,y) - g'_x(0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0} -\frac{2\, sen\, y}{y} = -2$$

$$g''_{yx}(0,0) = \lim_{x=0}\frac{g'_y(x,0) - g'_y(0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x=0}\frac{x}{x} = 1 .$$

5) Considere a tabela $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 1 & 3 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 & a & b \end{array}$. Determine a relação que deve existir entre a e b por forma que o polinómio interpolador seja do segundo grau. Escreva o polinómio.

R: *Achando a tabela de diferenças finitas, vem*

x	y	Δ y	Δ² y	Δ³ y
−1	0	1	a − 2	b − 3a + 3
1	1	a − 1	b − 2a + 1	
3	a	b − a		
5	b			

e para que o polinómio interpolador seja do segundo grau é preciso que $\Delta^3 y = b - 3a + 3 = 0$ *que é a relação pedida. É claro que terá de ser* $a \neq 2$.

O polinómio interpolador será

$$f(x) = \frac{x+1}{2} + \frac{(x^2-1)}{2!\,4}(a-2) =$$

$$= \frac{a-2}{8}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{a-2}{8} .$$

6) Demonstre a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = x_1\, x_2 \cdots x_n .$$

R: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_1\, x_2 \cdots x_n .$$

Enunciados e soluções dos N.os 5557 a 5563 de Fernando de Jesus

Nota: Por falta de espaço não foi possível incluir neste número críticas e referências bibliográficas de várias obras de matemática enviadas à Redacção.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

Mémorial des Sciences Mathématiques

J. Bass — *Les fonctions pseudo-aleatoires.*

F. Pollaczek — *Theorie analytique des problèmes stochastiques.*

C. Traynard — *Fonctions abeliennes et fonctions Theta de deux variables.*

Saint-Guilhem — *Les Principes de l'analyse dimensionnelle.*

Cahiers Scientifiques

J. Favard — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome III.*

Deuxième Congrès de l'Association Française de Calcul et de Traitement de l'Information.

Bourgne et Azra — *Écrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois.*

Michel Carvalho — *Monographie des Treillis et algèbre de Boole.*

Markouchevitch — *Fonctions d'une variable complexe — Problèmes Contemporains·*

Linnik — *Décomposition des lois de probabilités.*

Editor — MASSON ET C.ie, Paris

P. Germain — *Mecanique des Milieux Continus.*

J. Pérez — *Mecanique Physique.*

Durand — *Solutions numériques des équations algebriques. Tome II.*

J. Bass — *Elements de Calcul des Probabilites.*

Hocquenghem et Jaffard — *Mathématiques. Tome I.*

Editor — PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

Michel David — *Précis de Mathématiques.*

Editor — AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.

F. Riesz — *Oeuvres Complètes.*

Medgyessy — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — WALTER DE GRUYTER, Berlin

P. Lorenzen — *Formale Logik.*

Editor — IZDATELHSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA

Lawrentjew, Juschkewitsch, Grigorjan — Leonhard Euler.

Editor — CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge

L. G. Slater — *Confluent Hypergeometric Functions.*

D. G. Northcott — *An Introduction to Homological Algebra.*

P. J. Hilton & S. Wylie — *Homology Theory — An introduction to Algebraic Topology.*

E. A. Maxwell — *Advanced Algebra, part I.*

Snell & Morgan — *New Mathematics — A unified course, I and II.*

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics

G. L. Watson — *Integral Quadratic Forms.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. Neumark — *Normierte Algebren.*

Otakar Borůvka — *Grundlagen der gruppoid-und gruppentheorie.*

Mathematische Monographien

Gerhard Ringel — *Färbungsprobleme auf flächen und graphen.*

Mathematische Forschungsberichte

A. N. Kolmogoroff und W. M. Tichomirow — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*

A. W. Pogorelow — *Einige untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im grossen.*

H. Hornich — *Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1963 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinta ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 16 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 75 / 78 a 89 — cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 75 / 78 a 89 — » » duplo	35$00
N.ºs 76-77	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º—LISBOA-2 — Telefone 369449