GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III — N.º 9 — JANEIRO-1942

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

REDACÇÃO

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar*

MATEMÁTICAS ELEMENTARES	*J. Calado - J. Paulo*
MATEMÁTICAS GERAIS — ÁLGEBRA SUPERIOR — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E GEOMETRIA ANALÍTICA	*A. Sá da Costa*
CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR	*M. Zaluar*
MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA	*R. L. Gomes - Neves Real*
CÁLCULO DAS PROBABILIDADES	*M. Zaluar*
GEOMETRIA DESCRITIVA — GEOMETRIA PROJECTIVA	*Luiz Passos*
PROBLEMAS	*M. Alenquer*
PEDAGOGIA	*B. Caraça*
MOVIMENTO MATEMÁTICO	*A. Monteiro - H. Ribeiro*
BIBLIOGRAFIA	*A Redacção*

ADMINISTRADOR	EDITOR	TESOUREIRO
A. Sá da Costa	*J. Silva Paulo*	*Orlando M. Rodrigues*

PROPAGANDA E TROCAS: *J. Remy T. Freire*

REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO: *Faculdade de Ciências*, Rua da Escola Politécnica — Lisboa
COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

AOS INCAUTOS

O problema da quadratura do círculo

«Se um matemático recebesse, hoje, uma suposta quadratura do círculo, poderia, ou não, agradecer cortezmente ao autor mas, é quási certo, atiraria o manuscrito para o cesto dos papéis». [*E. T. Bell, Men of Mathematics, Londres, 1937. p. 354*].

«A partir de 1882 não deveriamos assistir ao florescimento de qualquer quadratura... *e às vêzes!»* [*F. Ghersi, Matematica dilettevole e curiosa, Milão 1929, p. 491*].

...Apesar de tudo, não deixa de ser oportuno recordar, ràpidamente, em que consiste o problema e as razões da impossibilidade da sua resolução.

1. *Em que consiste o problema.*

Como afirma Lucien Godeaux (Les Géométries, p. 21-23, A. Colin-Paris 1937), o problema da quadratura do círculo oferece dois aspectos equivalentes:

a) determinar, pelo cálculo, a medida da área dum círculo de raio dado, ou, o que é o mesmo, determinar a razão das medidas do perímetro da circunferência de igual raio e do seu diâmetro;

b) construir, com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, um quadrado equivalente a um círculo de raio dado.

O problema é velho. Já no século V A. C. os gregos se ocupavam dêle e dos problemas da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo. Foi objecto de estudo durante vinte e quatro séculos. Se as tentativas de resolução do problema falharam tôdas, nem por isso êle deixa de possuir o mérito de ter provocado, subsidiàriamente, a descoberta ou o estudo doutras questões.

Arquimedes reduziu o problema da quadratura do círculo ao cálculo da razão das medidas do perímetro da circunferência e do seu diâmetro, isto é, ao cálculo do número que actualmente se representa por π. Pela consideração de dois polígonos de 96 lados, um inscrito, outro circunscrito à circunferência provou que $223/71 < \pi < 22/7$.

2. *Razões da impossibilidade da sua resolução.*

Descartes (1596-1650) prova (La Géométrie, Leyde-1638) que a construção, com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, dum segmento rectilíneo de comprimento x é possível sempre que e só quando $\pm x$ é raíz duma equação algébrica de coeficientes racionais inteiros e pode obter-se mediante a efectivação dum número finito de operações racionais e extracções de raízes quadradas, sôbre os coeficientes da equação ou sôbre números obtidos dêstes por aquelas operações (V., por exemplo, L. E. Dickson, Modern Algebraic Theories, p. 204-200, New-York, 1930).

Mais de dois séculos decorreram sem que pudesse afirmar-se a possibilidade ou a impossibilidade do problema da quadratura do círculo. A questão só foi, definitivamente, esclarecida no último quartel do século XIX.

Em 1826, Abel (1802-1829) prova que a equação geral de grau superior ao quarto não é resolúvel por meio de radicais, isto é, as suas raízes não podem, em geral, determinar-se efectuando um número finito de operações racionais e extracções de raízes, sôbre os coeficientes da equação, ou sôbre números obtidos dêstes pelas mesmas operações.

Pouco depois, Galois (1811-1832) estabelece o critério da resolubilidade duma equação algébrica por meio de radicais.

Nesta altura, para saber se o problema da quadratura do círculo é possível ou não, havia que dar resposta às seguintes preguntas: ¿o número π pode ser ou não raíz duma equação algébrica de coeficientes inteiros? se existir uma tal equação que admita π como raíz, ¿ela será ou não resolúvel por meio de radicais? no caso afirmativo, ¿os radicais são ou não todos de índice 2?

É F. Lindemann (1852-1919) que responde. Em 1882, seguindo o método que Hermite utilizou para demonstrar que e, base do sistema de logaritmos neperianos, é um número transcendente, Lindemann prova que π é também um número transcendente. Por conseqüência, π não pode ser raiz duma equação algébrica de coeficientes inteiros e o problema da quadratura do círculo não pode resolver-se com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso.

Hermite demonstrou que o número e é transcendente em 1873 (Sur la fonction exponentielle, Paris 1874). Na Enciclopedia delle Matematiche Elementari encontrará o leitor a demonstração no Volume I, Parte I, p. 207-210.

Lindemann provou que π é um número transcendente nos Matematische Annalen (1882) p. 213. Na Enciclopedia citada encontra-se a demonstração da transcendência de π no Volume I, Parte I, p. 210-212.

... E, quem se atribua, a si mesmo, o mérito duma *genial resolução* do problema da quadratura do círculo com o emprêgo exclusivo da régua e do compasso, embora se escude com atributos de que a ciência não cuida e se confesse *vítima* de súbita inspiração que a verdade do resultado não prova, dá mostras de invulgar, inexcedível, cretinismo.

A. SÁ DA COSTA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 1

795 — Determine m de modo que a equação $(m-5)x^4-4mx^2+m-2=0$ tenha tôdas as raízes reais. R: *Para que as raízes da equação proposta sejam tôdas reais é necessário que as da sua resolvente sejam ambas positivas, para o que é necessário que* $\Delta=4m^2-(m-5)(m-2)\geq 0$, *que o produto das raízes* $P=(m-2):(m-5)\geq 0$, *e que a soma* $S=4m:(m-5)\geq 0$. *Os valores de* m *que satisfazem à 1.ª desigualdade são:* $1\leq m$ *e* $m\leq -10/3$, *os que satisfazem à 2.ª* $m\leq 2$ *e* $m>5$; *e a 3.ª é satisfeita para* $m\leq 0$ *e* $m>5$; *quere dizer os valores de* m *que satisfazem simultâneamente às três desigualdades, e resolvem por isso o problema, são:* $m\leq -10/3$ *e* $m>5$.

796 — Indique as relações que há entre os coeficientes de uma equação do 2.º grau e as suas raízes. Forme uma equação do 2.º grau que admita as raízes $m+\sqrt{n}$ e $m-\sqrt{n}$. R: *Se fôr* $ax^2+bx+c=0$ *a equação do 2.º grau e* x' *e* x'' *as suas raízes é* $P=x'x''=c/a$ *e* $S=x'+x''=-b/a$. *A equação pedida é* $x^2-2mx+m^2-n=0$.

797 — Verifique que ${}^nC_{p+1}={}^nC_p\dfrac{n-p}{p+1}$; ${}^{n+1}A_{p+1}=(n+1)\,{}^nA_p$ e $P_n=n\,.\,P_{n-1}$ sendo: ${}^nC_p$ o número de combinações de n objectos tomados p a p, ${}^nA_p$ o número de arranjos de n objectos tomados p a p e P_n o número de permutações n objectos.

$$R:\ {}^nC_{p+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)}{(p+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}\times\frac{n-p}{p+1}={}^nC_p\frac{n-p}{p+1}$$

${}^{n+1}A_{p+1}=(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-p+1)=(n+1)\,{}^nA_p$ *e* $P_n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\,.\,1=nP_{n-1}$.

798 — Calcule, por logaritmos, a área de um triângulo rectângulo em que um dos catetos tem de comprimento 43,962 m e o ângulo oposto a êsse cateto mede $21^\circ\,46'\,32''$. R: *A área é dada pela expressão* $A=1/2\,.\,43{,}962^2\,.\,\text{cotg}\,21^\circ\,46'\,32''$ *logo* $\log A=\text{colg}\,2+2\log 43{,}962+\text{logcotg}\,21^\circ\,46'\,32''=\bar{1},69897+3,28616+0,39887=3,38400$ *e* $A=2421{,}0\,m^2$.

799 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $\sec(-300^\circ)$ e de $\text{tg}\,17\pi/4$. R: $\sec(-300^\circ)=\sec 300^\circ=\sec 60^\circ=1/\cos 60^\circ=2$; $\text{tg}\,17\pi/4=\text{tg}\,(4\pi+\pi/4)=\text{tg}\,\pi/4=1$.

800 — Verifique a identidade $\text{tg}\,2a+\sec 2a=(\cos a+\text{sen}\,a):(\cos a-\text{sen}\,a)$. R: $\text{tg}\,2a+\sec 2a=2\,\text{tg}\,a:(1-\text{tg}^2 a)+1:(\cos^2-\text{sen}^2 a)=2\,\text{tg}\,a\times\cos^2 a:(\cos^2 a-\text{sen}^2 a)+1:(\cos^2 a-\text{sen}^2 a)=(2\,\text{sen}\,a\cos a+1):(\cos^2 a-\text{sen}^2 a)=(\text{sen}\,a+\cos a)^2:(\cos a^2-\text{sen}^2 a)=(\text{sen}\,a+\cos a):(\cos a-\text{sen}\,a)$.

801 — Num paralelogramo $ABCD$ una o vértice B com o meio E do lado CD e o vértice D com o meio F do lado AB. Demonstre que a diagonal AC é dividida em 3 partes iguais pelas rectas BE e DF. R: *Tem-se como se vê fàcilmente* DF//BE. *E aplicando o teorema de Thales tem-se* $AO:OP=AF:FB$ *e portanto* $AO=OP$ *por ser* $AF=FB$ *e* $OP:PC=DE:EC$ *donde* $OP=PC$, *e será então* $AO=OP=PC$, *c. q. p.*

802 — Decomponha 216 em factores primos. ¿Conclui-se dessa decomposição que 216 é um cubo perfeito? Porquê? Qual é a raiz cúbica do número 216? R: $216=2^3\times 3^3=(2\times 3)^3=6^3$ *e* $\sqrt[3]{126}=6$.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 3

803 — Indique as condições a que deve satisfazer k para que a inequação $x^2-(3k+1)x+(2k^2+k+9/4)>0$ seja verificada para qualquer valor real atribuído a x. R: *O trinómio terá que* *ter o descriminante negativo porque então tomará o sinal do coeficiente de* x^2 *(positivo) para qualquer valor real de* x. *Será então* $(3k+1)^2-8k^2-4k-9<0$ *ou* $k^2+2k-8<0$; *as raizes dêste trinómio são* $k_1=-4, k_2=2$; *logo os valores reais de* x *que tornam negativo o descriminante do trinómio primitivo são:* $-4<k<2$.

804 — Forme a equação biquadrada que admite como raízes os números $2/3$ e $-\sqrt{3}/2$. Justifique a resposta. R: *O trinómio biquadrado pode escrever-se* $a(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)$ *se* x_1 *e* x_2 *forem as raizes da sua resolvente. Podemos considerar os números dados como tais raizes pois que não têm o mesmo módulo apesar de terem sinais contrários. Assim a equação pedida é*

$$(x^2-4/9)(x^2-3/4)=0 \quad ou \quad 36x^4-43x^2+12=0.$$

805 — Determine a base do sistema de logaritmos em que seja $\log 8=3/2$. R: *Pela definição de logaritmo tem-se* $8=x^{3/2}$ *donde* $8^2=x^3$ e $x=8^{2/3}=4$ *único valor real que satisfaz à questão.*

806 — Calcule por logaritmos, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede 46,52 m e em que um dos catetos mede 32,26 m. R: *A área do triângulo pode calcular-se de dois modos. Se fôr* h *a altura relativa à hipotenusa será* $A=a\,h/2$; *e se considerarmos os dois catetos teremos* $A=b/2\,.\,(a^2-b^2)^{1/2}=b/2.[(a+b)(a-b)]^{1/2}$. *Tem-se* $ah=b\sqrt{(a+b)(a-b)}$ *e* $h=\frac{b\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a}$ *em que* a *e* b *são a hipotenusa e o cateto dados. Será então* $\log h=\log 32{,}26+\operatorname{colg} 46{,}52+1/2\,.\,[\log 78{,}78+\log 14{,}26]=1{,}50866+\bar{2}{,}33236+0{,}94821+0{,}57706=1{,}36629$ *e por isso* $h=23{,}24$ m.

807 — Deduza as relações que existem entre as funções goniométricas de ângulos que diferem de π radianos. R: $\operatorname{sen} x=-\operatorname{sen}(x+\pi)$; $\cos x=-\cos(x+\pi)$: $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$; $\operatorname{cotg} x=\operatorname{cotg}(x+\pi)$; $\sec x=-\sec(x+\pi)$ e $\operatorname{cosec} x=-\operatorname{cosec}(x+\pi)$.

808 — Exprima em função do raio de uma esfera, a distância do centro dessa esfera a um plano que a corta segundo um círculo cuja área é igual a seis vèzes a área lateral do cone que tem por base a secção referida e por vértice o centro da esfera. R: *O problema é impossivel, visto que de tôdas as calotes de superfícies limitadas por uma circunferência dada, a de mínima área é o circulo.*

Portanto, a área lateral do cone não pode, ao contrário do que indica o enunciado do problema, ser menor que a do circulo determinado pela secção.

N. R.

809 — Indique a posição relativa das bissectrizes de dois ângulos adjacentes suplementares. Justifique a resposta. R: *Se forem* α *e* β *dois ângulos adjacentes suplementares será* $\alpha+\beta=180^\circ$ *e* $\alpha/2+\beta/2=90^\circ$, *e por isso as bissectrizes dos dois ângulos formando entre si um ângulo de* 90° *são perpendiculares.*

810 — Defina triedro; triedros simétricos e triedros suplementares; indique as relações que existem entre as medidas das faces e as dos diedros de dois triedros suplementares.

811 — Defina multiplicação de dois números fraccionários e, baseado na definição justifique a regra usada nessa operação. R: *Uma das definições usualmente adoptadas no ensino liceal é a de que o «produto se forma do multiplicando como o multiplicador se formou da unidade». Logo sendo o multiplicando* a/b *e o multiplicador* c/d *como êste se formou da unidade dividindo esta em* d *partes iguais e tomando* c *dessas partes o produto* $a/b \times c/d$ *obtém-se dividindo* a/b *em* d *partes iguais* $a/b.d$ *e tomando* c *destas partes ou seja* $\frac{a.c}{b.d}$ *de modo que a regra para a multiplicação de fracções pode enunciar-se: o produto de duas fracções é uma fracção cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores.*

Soluções dos n.os 795 a 811 de J. da Silva Paulo.

I. S. C. E. F. — Exame de aptidão, 1-8-941

Ponto n.º 1

812 — *a)* Defina polígono regular convexo e defina os seus elementos mais importantes.

b) Resolva o seguinte problema: chamando α_k e α_{k+1} os ângulos internos dos polígonos regulares convexos de 3.2^k lados e 3.2^{k+1} lados, calcular o cociente $\lambda=\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$. Determinar k de modo que $\lambda=\frac{11}{10}$. R: *Tem-se* $\alpha_k=\frac{3.2^k-2}{3.2^k}180^\circ$, $\alpha_{k+1}=\frac{3.2^{k+1}-2}{3.2^{k+1}}180^\circ$, $\lambda=\frac{3.2^k-1}{3.2^k-2}$. *Para que seja* $\lambda=\frac{3.2^k-1}{3.2^k-2}=\frac{11}{10}$ *terá de ser* $\begin{cases}3.2^k-1=11p\\3.2^k-2=10p\end{cases}$ *com* p *inteiro. Subtraindo ordenadamente obtêm-se* $p=1$ *valor que substituido em qualquer das igualdades dá* $k=2$.

813 — Resolver a desigualdade $\frac{2x^2+3x+1}{x^2-5x+6}>0$. R: *É condição necessária e suficiente para que uma* *fracção seja positiva que os seus têrmos tenham o mesmo sinal. Por conseqüência a desigualdade proposta será satisfeita quando o fôr um dos sistemas*

$$a)\begin{cases} 2x^2+3x+1>0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x^2+3x+1<0 \\ x^2-5x+6<0 . \end{cases}$$

As raizes do trinómio $2x^2+3x+1$ *são* $x=-1, -1/2$ *e, como o coeficiente do têrmo do 2.º grau é positivo, o trinómio é negativo para os valores de* x *do intervalo* $(-1, -1/2)$ *e positivo para os restantes.*

Pelas mesmas razões, o trinómio x^2-5x+6, *cujas raizes são* $x=2, 3$, *negativo para os valores de* x *do intervalo* $(2, 3)$ *e positivo para os outros.*

Reconhece-se imediatamente que o sistema a) *e, portanto, a desigualdade proposta são satisfeitos para todos os valores de* x *satisfazendo a uma das três condições* $x<-1$, $-1/2<x<2$, $3<x$, *e que o sistema* b) *é incompatível.*

814 — Calcular $x=a.\sqrt{b}.\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$ onde $a=\frac{1}{2^5}$, $b=1{,}0003$, $c=\cos 118^\circ 32'$. R: *Note-se que* $x=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}}\cdot\sqrt{b}\;\sqrt[3]{c^2}$, *ou substituindo valores*

$$x=\frac{\sqrt{1{,}0003}.\sqrt[3]{\cos^2 118^\circ 32'}}{2^{10/3}}=\frac{\sqrt{1{,}0003}.\sqrt[3]{\cos^2 61^\circ 28'}}{2^{10/3}}.$$

$$\log x=\begin{cases} 1/2\log 1{,}0003 & = 1/2.\,0{,}00013=0{,}00007 \\ +2/3\log\cos 61^\circ 28' & = 2/3.\,\overline{1},67913=\overline{1},78609 \\ +10/3\operatorname{colog}2 & =10/3.\,\overline{1},69897=\overline{2},99657 \end{cases}$$

$$\log x=\overline{2},78273$$
$$x=0{,}060635$$

815 — De uma pirâmide quadrangular regular conhece-se a razão $\lambda=l/h$ do lado da base e da altura. Exprimir em função de λ o cociente da área de uma das faces pela área da secção plana que passa pelo vértice e por uma das diagonais da base. R: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=l$, $\overline{VP}=h$, $\overline{PM}=l/2$, $\overline{VM}=\sqrt{h^2+l^2/4}$, $\overline{AC}=l.\sqrt{2}$, $[ABV]=1/2\,l\sqrt{h^2+l^2/4}$, $[ACV]=1/2\,l\sqrt{2}\,h$, $\frac{[ABV]}{[ACV]}=\sqrt{\frac{h^2+l^2/4}{2h^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{8}}$.

816 — Resolver um triângulo isósceles conhecendo a base b e o perímetro p. Aplicação numérica: $b=12{,}4$ metros $p=51{,}9$ metros.

R: *Tem-se:* $\overline{AC}=b$, $\overline{BA}=\overline{BC}=\frac{p-b}{2}$, $\overline{AP}=\frac{b}{2}$, $\cos\widehat{A}=\frac{b}{p-b}=\frac{12{,}3}{39{,}6}$, $\widehat{C}=\widehat{A}$, $\widehat{B}=180^\circ-2\widehat{A}$.

Aplicando logaritmos: $\log\cos\widehat{A}=\log 12{,}3+\operatorname{colog}39{,}6=1{,}08991+\overline{2},40230=\overline{1},49221$ *donde* $\widehat{A}=71^\circ 54' 15''$. $l=19{,}8$, $\widehat{A}=\widehat{C}=71^\circ 54' 15'$, $\widehat{B}=36^\circ 11' 30''$.

817 — Achar os pares de números que têm por m. d. c. 100 e m. m. c. 3.000. R: *Sejam* x *e* y *os números pedidos, sabe-se que* $xy=100\times 3.000$. *Por outro lado, será* $x=p.100$, $y=q.100$ *com* p *e* q *primos entre si. Logo é* $pq=30$, *donde*

$$\begin{cases} p=1,\ 2,\ 3,5 \\ q=30,15,10,6 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x=100,\ 200,\ 300,500 \\ y=3.000,1.500,1.000,700. \end{cases}$$

Soluções dos n.os 812 a 817 de A. Sá da Costa.

Contêm pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1. 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Alguns pontos do I.º exame de freqüência, Março de 1941

818 — Calcule a derivada da função y definida pela equação $\operatorname{cosec}\sqrt{xy+x^2+y^2}=L\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

R: *A derivada pedida é dada pela equação*

$$\frac{y+2x+(x+2y)y'}{2\sqrt{xy+x^2+y^2}}\operatorname{cosec}\sqrt{xy+x^2+y^2}\,.$$
$$\cdot\operatorname{cotg}\sqrt{xy+x^2+y^2}+\frac{y-xy'}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}x/y}=0\,.$$

819 — Determine m e n de modo que a equação $2x^9-13x^8+19x^7+31x^6-107x^5+98x^4+6x^3-36x^2+mx+n=0$ admita a raiz dupla zero e resolva-a. R: *A equação admitirá a raiz zero dupla se* $m=n=0$. *A decomposição do 1.º membro da equação em factores binomiais é a seguinte*

$$2x^2(x-1)(x-3)^2(x+2)(x+1/2)[(x+1)^2+1].$$

820 — Sabendo que c é raiz da equação $ax^5+(b-ac)x^4-bcx^3-bx^2-(a-bc)x+ac=0$ determine as outras raízes. R: *As raizes são* $c, \pm 1, (-b\pm\sqrt{b^2-4a^2})/2a$.

821 — Resolva geomètricamente o problema: «São dados o número $z_1=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ e um número positivo ρ. Determinar um número z de módulo ρ tal que $\frac{z-z_1}{z}$ seja imaginário puro».

Discutir (possibilidade e número de soluções).

Posições relativas das imagens dos cocientes $\frac{z-z_1}{z}$ quando há soluções.

822 — Calcule os máximos e mínimos da função $y=e^{\cos(L\sqrt{x+1})}$. R: *Máximos* $(e^{4K\pi}, e)$, *mínimos* $(e^{(4K+2)\pi}, 1/e)$, K *inteiro*.

823 — Dada a equação $x^4-4x^3-20x^2+1=0$ verifique se ela admite raízes racionais e separe as raízes reais servindo-se do teorema de Rolle. Calcule para a maior raiz negativa os dois valores inteiros n e $n+1$ mais aproximados (por defeito e por excesso) e, a partir dêstes valores, calcule uma 2.ª aproximação dessa raiz pelo método das partes proporcionais.

824 — A que condições devem satisfazer os números reais p, q, r e s para que as raízes da equação $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ sejam três números com o mesmo módulo cujas imagens constituam os vértices dum triângulo eqüilátero?
Obs.: *O enunciado pretende que as raízes da equação sejam* três *números com o mesmo módulo, cujas imagens constituam os vértices dum* triângulo *eqüilátero, mas a equação é do* quarto *grau. O enunciado pode não ser bem interpretado, por ser lacónico em demasia.* R: *Em virtude do enunciado, das* quatro *raízes da equação uma será dupla e esta tem de ser real porque, se o não fôsse, a equação só teria duas raízes distintas. Então a equação admitirá as raízes* ρ *(dupla),* $\rho\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *ou* $-\rho$ *(dupla),* $\rho\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, *com* $\rho>0$. *As fórmulas de Viète dão* $p=\pm\rho$, $q=0$, $r=\pm\rho^3$, $s=\rho^4$, *respectivamente.*

825 — Calcule a soma das raízes primitivas de índice 12 da unidade positiva. R: *A soma cujo cálculo se pede é nula, porque é nula a soma das raízes de índice* n *da unidade* $S=\sum_{j=0}^{n-1} z_j=\sum_{j=0}^{n-1} z^j=\frac{1-z^n}{1-z}=0$ *onde* $z_j^n=1$ $(j=0,1,\cdots n-1)$ *e por ser* z *uma raiz primitiva de índice* n *da unidade.*

826 — Calcule as duas primeiras derivadas da função y definida pela equação $f(x,y)=0$ onde $f(x,y)$ é uma função homogénea. Deduza do resultado a forma da função y. R: *A equação* $f(x,y)=0$, *nestas condições, definirá uma ou mais funções tôdas da forma* $y=kx$. *Em geometria plana* $f(x,y)=0$ *representa um conjunto de rectas passando pela origem. Em geometria no espaço, um conjunto de planos contendo* Oz.

827 — Calcule $\lim_{m=\infty}\left[\cos\frac{a}{m}+p\,\mathrm{sen}\frac{a}{m}\right]^m$.
R: *Fazendo* $p=\mathrm{tg}\,\varphi$ *vem* $\lim_{m\to\infty}[\mathrm{sen}(\varphi+\alpha/m)]^m=L$ *e tem-se* $L=0$ *se* $\varphi\neq 2k\pi\pm\pi/2$, $L=1$ *se* $\varphi=2k\pi\pm\pi/2$.

828 — Estude a variação do número das raízes reais da equação $3x^4-4x^3-12x^2+\lambda=0$ quando λ varia de $-\infty$ a $+\infty$.

829 — Calcule os máximos e mínimos da função $y=\mathrm{arc\,tg}\frac{a+x}{a-x^2}$ onde $a>1$.

830 — Determine para p e q valores racionais de modo que a equação $4x^6+px^5+9x^4+22x^3+ +qx^2+42x-9=0$ admita a raiz $\sqrt{3}$ e resolva a equação. R: $p=-12$, $q=-60$.

831 — Determine m e n de modo que a equação $x^4+4x^3-2x^2+mx+n=0$ tenha apenas duas raízes distintas. R: *Sendo* a e b *as duas raízes da equação, será* $m=2(a^2b+ab^2)$, $n=a^2b^2$, ou $m^2=a^2b^2.4(a+b)^2=16n$. *Todos os valores de* m *e* n *atisfazendo a* $m^2=16n$ *fazem corresponder à equação apenas duas raízes distintas.*

832 — Calcule $\lim_{x=\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$. R: *Sendo* L *o limite, tem-se sucessivamente*
$$\log L=\lim_{x\to\infty} x\cdot\log\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log 1/2\,(a^{1/x}+b^{1/x})}{1/x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/2(-1/x^2)(a^{1/x}\cdot\log a+b^{1/x}\cdot\log b)}{1/2\,(a^{1/x}+b^{1/x})\,(-1/x^2)}=$$
$$=1/2\,(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab}\to L=\sqrt{ab}.$$

833 — Sabendo que $-i$ é raiz primitiva de índice n da unidade positiva, determine n.
R: $n=4$, *porque o argumento de* $-i$ *pode escrever-se* $\frac{3\pi}{2}=\frac{2.3p\pi}{4p}$ *com* p *inteiro e* 3p *e* $4p=n$ *serão primos, sempre que e só quando* $p=1$, *portanto,* $n=4$.

834 — Determine o polinómio mais geral $f(x)$ de grau m, divisível pela sua derivada e tal que $f(0)=1$ e $f(1)=0$. Justifique.

I. S. C. E. F. — I.º exame de freqüência, 3-2-41

835 — Verificar a identidade
$$(1+i)^n=\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2}\right)(1-i)^n.$$ R: *Note-se que* $i^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}$. *Então,* $(1+i)^n= =i^n\cdot(1-i)^n=[i\,(1-i)]^n=(1+i)^n$.

836 — Determinar todos os números x que verificam a igualdade $x^n=(1+i)^n$. Alguns dêles serão imaginários puros? Condições. R: *Por ser* $1+i=$ $=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, *vem.* $x=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right](k=0,1,2,\cdots n-1)$. *Serão imaginários puros aquêles valores de k para os quais é* $\frac{2k\pi}{n}=\frac{\pi}{4}$ *ou* $\frac{2k\pi}{n}=\frac{5\pi}{4}$, *isto é*, $k=n/8$ *ou* $k=5n/8$. *Portanto, dos* n *valores de* x, *dois serão imaginários puros se e só se* n *for múltiplo de* 8.

837 — Dada a circunferência $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ determinar as coordenadas do seu ponto mais próximo e do seu ponto mais afastado da origem. Determinar as equações das circunferências com centro em cada um dêsses pontos e tangentes aos eixos. Verificar que essas circunferências são tangentes uma à outra e à recta $x+y-1=0$. R: *As coordenadas dos pontos pedidos são as soluções do sistema* $\begin{cases} y=x \\ (x-1)^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$ $(1-\sqrt{2}/2, 1-\sqrt{2}/2)$ *para o mais próximo da origem,* $(1+\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}/2)$ *para o mais afastado. Equações das circunferências indicadas* $(x-1+$ $+\sqrt{2}/2)^2+(y-1+\sqrt{2}/2)^2=(1-\sqrt{2}/2)^2$, $(x-1-$ $-\sqrt{2}/2)^2+(y-1-\sqrt{2}/2)^2=(1+\sqrt{2}/2)^2$. *São tangentes porque a distância dos centros é igual à soma dos raios. São tangentes à recta* $x+y-1=0$ *porque esta é perpendicular à recta* $y=x$, *que contém os seus centros, no ponto* $(1/2, 1/2)$ *de tangência das duas circunferências.*

I. S. T. — Alguns pontos do 1.º exame de freqüência, 1941

838 — Sendo A e B os afixos dos complexos α e β (no plano de Cauchy), mostrar que o ponto M, que divide $\overline{AB}$ segundo a razão $\overline{AM}/\overline{MB}=\lambda$, é o afixo do complexo $\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$. R: $\overline{AM}=|\alpha-z|$, $\overline{MB}=|z-\beta|$ e $\alpha-z=\lambda(z-\beta)$ *donde* $z=\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$

839 — Traçar a curva $y=e^{-ax}$. sen bx $(a, b>0)$. Mostrar que tem uma infinidade de máximos, cujos valores formam uma progressão geométrica, e que estão sôbre a curva $y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-ax}$.

840 — Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$, quando é 1.º) $0<x<1$, 2.º) $x=1$, 3.º) $x>1$. R: 1.º) -1, 2.º) 0, 3.º) 1.

841 — Dada a equação $z^2+2(a+bi)z+(c+di)=0$ determinar a condição para que: 1) as duas raízes sejam iguais, 2) uma raiz seja real, 3) uma raiz seja um imaginário puro, 4) as raízes sejam imaginários conjugados. R: 1) *Seja* z *a raiz dupla da equação; será* $a+bi=-z$, $c+di=z^2$ *ou* $a^2-b^2=c$, $ab=d$. 2) *Sejam* r *e* $\alpha+\beta i$ *as raízes da equação; será* $2(a+bi)=-r-\alpha-\beta i$, $c+di=$ $=r\alpha+r\beta i$, *donde* $cb^2=2abd-d^2$. 3) *Sejam* $\alpha+\beta i$ *e* γi *as raízes da equação; então* $2(a+bi)=-\alpha-$ $-(\beta+\gamma)i$, $c+di=-\beta\gamma+\alpha\gamma i$ *e* $4a^2c+3abd=d^2$. 4) *Sejam* $A\pm Bi$ *as raízes da equação: será* $2(a+bi)=-2A$, $c+di=A^2+B^2$ *donde* $b=d=0$, $c>a^2$.

842 — Num triângulo rectângulo a soma dos comprimentos da hipotenusa e dum catecto é constante. Quando é que a área é máxima? R: $2S=bc$, *com* $a+b=s$ *e* $a^2=b^2+c^2$, *então* $S=1/2\,(s-a)\sqrt{2as-s^2}$, $\frac{ds}{da}=-1/2\sqrt{2as-s^2}+$ $+\frac{(s-a)s}{\sqrt{2as-s^2}}$ *que se anula para* $a=\frac{2s}{3}$, *valor que corresponde, necessàriamente, ao máximo.*

843 — Sendo $y=u^3+u^{-3}$ e $x=u+u^{-1}$, *calcular* $\frac{dy}{dx}$ expressa em x R: *Sabe-se que* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}$. $\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{du}}$. *Então, porque* $\frac{dy}{du}=3(u^2-u^{-4})$ *e* $\frac{dx}{du}=1-u^{-2}$, *vem* $\frac{dy}{dx}=3\frac{u^3-u^{-3}}{u-u^{-1}}=3(u^2+1+u^{-2})=$ $=3(u-u^{-1})^2+6=3x^2+6$.

844 — Estudar a função $y=10(1+ex^{-1})^{-1}$. Representação gráfica (calcular em particular, $\lim\limits_{x\to\pm 0} y$ *e* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$, e indicar os pontos de descontinuidade, se os houver).

R: $\lim\limits_{x\to+0} y=\lim\limits_{x\to+0}\frac{10}{1+e^{1/x}}=0$; $\lim\limits_{x\to-0} y=\lim\limits_{x\to-0}\frac{10}{1+e^{1/x}}=$ $=\lim\limits_{x\to+0}\frac{10}{1+1/e^{1/x}}=10$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10}{1+e^{1/x}}=5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10}{1+e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10}{1+1/e^{1/x}}=5$.

A função é descontínua para $x=0$ *porque* $y(+0)=0$ *e* $y(-0)=10$ — *descontinuïdade finita de 1.ª espécie.*

845 — Sendo $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n$ (n inteiro e positivo), mostrar que:

$$p_0-p_2+p_4-p_6+\cdots=2^{n/2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$p_1-p_3+p_5-p_7+\cdots=2^{n/2}\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}.$$

R: *Fazendo* $x=i$ *vem*

$$(1+i)^n=p_0+p_1 i-p_2-p_3 i+\cdots$$

$$(1+i)^n=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}\right)$$

donde, por identificação dos 2.os membros, se deduzem as expressões pedidas.

846 — Calcular $\lim_{n\to\infty}\left[n^{-n-1}\cdot(n+1)^n\right]$.

R: $\lim_{n\to\infty} n^{-n-1}\cdot(n+1)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

847 — Mostrar que $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ não tem máximos, nem mínimos, quaisquer que sejam os valores de a, b, c, d. Que se passa quando $ad-bc=0$? Traçar o gráfico da função. R: *A derivada* $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ *não se anula para nenhum valor finito de* x, *se* $ad\neq bc$. *Se* $ad=bc$, *a função* $f(x)=\mathrm{const.}$ *por ser* $f'(x)\equiv 0$.

Soluções dos n.os 818 a 847 de A. Sá da Costa.

Contêm pontos de primeiros exames de freqüência de *Matemáticas Gerais* e *Álgebra Superior* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1, 5 e 8.

CALCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 1940-41

Ponto n.º 3

848 — Determine o caracter do produto infinito cujos primeiros termos são: $u_1=1+\dfrac{1^3}{2^3}$, $u_2=1+\dfrac{1^3\cdot 3^3}{2^3\cdot 4^3}$ e $u_3=1+\dfrac{1^3\cdot 3^3\cdot 5^3}{2^2\cdot 4^3\cdot 6^3}$. R: *O termo geral do produto infinito é* $u_n=1+\dfrac{1^3\cdot 3^3\cdot\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdot\cdots(2n)^3}$; *o produto infinito é convergente se o for a série* $\sum\dfrac{1^3\cdot 3^3\cdot\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdot\cdots(2n)^3}$; *a aplicação do critério de Raabe-Duhamel a esta série conduz a*

$$\lim_{n=\infty}\frac{12n^3+18n^2+7n}{8n^3+12n^2+6n+1}=\frac{3}{2}>1;$$

portanto a série é convergente.

849 — Transforme a equação $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pela variável t, sabendo que $l\,xy=\mathrm{tg}\,t$ (por l representa-se o logaritmo neperiano). R: $\dfrac{du}{dt}+\sec^2 t=0$.

Ponto n.º 4

850 — Determine o número a que corresponde a fracção contínua $[3(2,3,1)]$. R: $\dfrac{18+\sqrt{37}}{7}$.

851 — Transforme a equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pelas novas variáveis u e v relacionadas com as primeiras por $x=l\,uv$ $y=l\dfrac{u}{v}$ (por l representa-se o logaritmo neperiano).

R: $u^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+v^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\,uv\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+u\dfrac{\partial z}{\partial u}-3v\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$.

Soluções dos n.os 848 a 851 de Queiroz de Barros.

F. C. P. — Exame final, Outubro de 1941

852 — Calcular $I=\int \mathrm{arc\,sen}\sqrt{x}\,dx$.

R: $I=x\,\mathrm{arc\,sen}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}-\dfrac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}+C$.

853 — Integrar o sistema $y''+z'-4y=\cos^2 x$ $3y'-z=x$.

R: *Empregando o símbolo* D *vem:*

$$\begin{cases} y''+z'-4y=\cos^2 x\\ 3y'-z=x\end{cases}\qquad \begin{cases}(D^2-4)\,y+Dz=\cos^2 x\\ 3Dy-z=x\end{cases}$$

donde

$$y=\frac{1+\cos^2 x}{4D^3-4},\quad 4y''-4y=\cos^2 x+1=\frac{3+\cos 2x}{2}$$

O sistema integral geral é:

$$\begin{cases} y=C_1 e^x+C_2 e^{-x}-3/8-1/40\cdot\cos 2x\\ z=3C_1 e^x-3C_2 e^{-x}-x+3/20\cdot\mathrm{sen}\,2x.\end{cases}$$

854 — Cortar o elipsoide $3x^2+4y^2+3z^2+2xz=1$ por um plano que passe pelo eixo dos yy e determinar analìticamente êste plano de modo que a elipse secção tenha área máxima ou mínima. Calcular esta área. R: *As equações da secção são:* $z=mx$, $3x^2+4y^2+3z^2+2xz=1$; *ou* $z=mx$, $(3m^2+2m+3)\,x^2+4y^2=1$.

Designando por θ *o ângulo dos planos* $z-mx=0$ *e* $z=0$ *tem-se* $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.

Seja A *a área da secção e* a *a área da sua projecção sôbre* $z=0$. *Tem-se* $a=A\cos\theta$ *e* $a=\dfrac{\pi}{2\sqrt{3m^2+2m+3}}$, *donde* $A=\dfrac{\pi\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{3m^2+2m+3}}$ *e* $\dfrac{dA}{dm}=0\to m=\pm 1$. *Os planos procurados são* $z-x=0$ *e* $z+x=0$ *e as áreas das secções respectivas* $A=\pi/4$ *e* $A=\sqrt{2}\,\pi/4$.

Soluções dos n.os 852 a 854 de Jayme Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — I.º exame de freqüência, 1940-41

855 — Calcular o integral $\int_2^3 \frac{x\sqrt{3(x-1)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$.

R: *Tem-se:* $I=\sqrt{3}\int_2^3 x(x-1)^{5/6}\,dx$ *e, a função é integrável no intervalo* $(2,3)$. *Fazendo* $x-1=t^6$ *vem* $dx=6t^5\,dt$, *e* $I=6\sqrt{3}\int_1^{\sqrt[6]{2}}(t^6+1)\,t^{10}\,dt = 6\sqrt{3}\,[t^{17}/17+t^{11}/11]_1^{\sqrt[6]{2}}$.

856 — Calcular o integral $\int x^3 \operatorname{arc\,sen} x/2\,dx$.

R: *Integrando por partes vem*

$$I=\frac{1}{4}x^4 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Mas, $J=\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=-16\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$ *fazendo* $4-x^2=t^2x^2$, *donde* $t\,dt=-4x^{-3}\,dx$. *Portanto,*

$$J=-16\left[\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(t^2+1)^2}+E\log(t^2+1)+F\operatorname{arctg}t\right]=$$

$$=-16\left[\frac{t^3+t}{2(t^2+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t\right]=\frac{-8t}{t^2+1}-8\operatorname{arc\,tg}t=$$

$$=-2x\sqrt{4-x^2}-8\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$$ *Finalmente,*

$$I=\frac{1}{4}x^4\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$$

857 — Verificar o teorema do valor médio no integral $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx$. R: $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx=2\pi\,.\operatorname{sen}^3\alpha$ $0<\alpha<2\pi$. *Por outro lado* $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx=[\operatorname{sen}^2 x\cos x+2\cos x]_0^{2\pi}=0$ *logo* $2\pi\,.\operatorname{sen}^3\alpha=0\rightarrow\alpha=0,\pi,2\pi$, *e* $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx=2\pi\operatorname{sen}^3\pi=0$.

858 — ¿As funções $\varphi_1=x^2-3$, $\varphi_2=x^2+1$, $\varphi_3=x^2+3$ e $\varphi_4=x+1$ serão linearmente independentes em qualquer intervalo? R: *Do exame do wronskiano das quatro funções conclue-se que não há intervalo algum em que as quatro funções sejam linearmente independentes. Note-se que existem sempre quatro números, não simultâneamente nulos,* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ *tais que* $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3+\lambda_4\varphi=0$, *por exemplo* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=0$.

Soluções dos n.os 855 a 858 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — Março de 1941

859 — Calcular o integral

$I=\int\operatorname{arctg}(\cos x)\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\operatorname{sen}x\,dx$. R: *Notando que é* $\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1-\frac{1}{1+\cos^2 x}$ *tem-se*

$$I=\int\operatorname{arctg}(\cos x)\cdot\operatorname{sen}x\,dx-\int\operatorname{arctg}(\cos x)\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx=$$

$$=-\cos x\operatorname{arc\,tg}(\cos x)-\int\frac{\cos x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx+$$

$$+1/2\,[\operatorname{arc\,tg}(\cos x)]^2=-\cos x\operatorname{arc\,tg}(\cos x)+$$

$$+1/2\log(1+\cos^2 x)+1/2\,[\operatorname{arc\,tg}(\cos x)]^2+C.$$

860 — Determinar os máximos e mínimos da soma das áreas de três quadrados, sabendo que é constante a soma dos volumes dos três cubos de que êsses quadrados são faces. R: *Trata-se de um problema de máximos e mínimos condicionados. A função de que se procuram os pontos de estacionaridade é* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ *(designando por* x, y *e* z *os lados dos 3 quadrados) e a equação de ligação é* $\varphi(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3-a^3=0$.

Os pontos de estacionaridade são as soluções do sistema $f=0$, $\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial(x,y)}=0$, $\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial(x,z)}=0$ *ou* $x^3+y^3+z^3-a^3=0$, $xy\,(x-y)=0$ *e* $xz\,(x-z)=0$.

861 — Estudar o integral $\int_0^{+\infty}\frac{x\log x}{(1+x^2)^3}\,dx$.

862 — Sendo $\begin{cases} x^2+2\log z+x^y+4y=6t-z \\ z^x\log(xyz)^y=y^t\operatorname{arcsen}x+4\operatorname{sen}t \end{cases}$ calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ e $\frac{\partial t}{\partial x}$. R: *Derivando o sistema dado* (S) *em ordem a* x, *considerando* z *e* t *como funções das variáveis independentes* x *e* y, *obtém-se um sistema* (S′), *linear em* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial t}{\partial x}$, *donde se deduz portanto* $\frac{\partial t}{\partial x}$. *Derivando* (S′) *em ordem a* y, *obtém-se um novo sistema* (S″) *linear em* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ *e* $\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}$ *que permite calcular a derivada* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ *pedida.*

Soluções dos n.os 859 a 862 de Manuel Zaluar.

Contêm pontos de primeiros exames de freqüência de *Cálculo Infinitesimal* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1 e 5.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Exame final, Julho de 1939

863 — Uma barra rectilínea, homogénea OA de pêso p e comprimento $2a$ é móvel num plano vertical π em volta do seu extremo O. Em A está preso um fio inextensível e perfeitamente flexível (cujo pêso se despreza) de comprimento $2l$, que passa numa roldana desprovida de atrito no eixo e situada sôbre a horizontal de π que passa por O, a uma distância dêste ponto igual a $2a$ (desprezam-se massa e dimensões da roldana). O fio, depois de passar na roldana, estende-se ao longo duma recta RH de π, perfeitamente polida, inclinada de i^{o} sôbre a horizontal, e suporta na sua extremidade uma massa pontual P de pêso p_1.

a) Parametrar o sistema e indicar as fôrças que intervêm no estudo do seu equilíbrio.

b) Pela aplicação do teorema do trabalho virtual, depois de ter mostrado que as ligações são perfeitas, calcular o valor que deve ter o pêso p_1 para que a barra OA, na posição de equilíbrio, faça com a horizontal um ângulo de 60^{o}.

c) Ainda pela aplicação do mesmo teorema calcular o valor da reacção de RH sôbre a massa pontual P na posição considerada.

d) Utilizando as condições gerais de equilíbrio dos sólidos calcular a reacção no extremo O da barra na configuração considerada. Dados numéricos: $i^{o}=45^{o}$ $p=2\text{kg}$.

864 — Um trenó de pêso p é lançado segundo a linha de maior declive duma rampa de inclinação i à velocidade de $V\,\text{km/h}$. Sabe-se que o seu movimento é uma translacção rectilínea e que o meio ambiente opõe ao movimento uma resistência equivalente a uma fôrça única, aplicada no centro de inércia do trenó, de sentido oposto ao da sua velocidade v e numèricamente igual a kv^2 (k é um factor de proporcionalidade igual a 5 quando se adoptam como símbolos o metro, o segundo e o kilograma-pêso). Entre o trenó e o solo existe um atrito de escorregamento de coeficiente $f=\operatorname{tg} i$. Pregunta-se:

a) Ao fim de quanto tempo pára o trenó?

b) Que distância percorre?

c) Que valor deve atribuir-se a k quando se escolhem para unidades fundamentais o metro, a tonelada-massa e o segundo?

Dados numéricos: $\operatorname{sen} i=0{,}05$, $p=200\text{kg}$. Velocidade inicial $V=50\text{km/h}$.

865 — Uma circunferência C de raio a está animada duma rotação uniforme de velocidade angular W conhecida em volta do seu diâmetro vertical relativamente a um referencial S. Um disco circular material D, homogéneo, de raio b e pêso p, rola sem resvalar sôbre o interior de C e a ligação é realizada de tal modo que o disco D não pode abandonar o plano de C. Não há atrito de rolamento.

a) Parametrar o sistema.

b) Exprimir a fôrça viva do disco em função dos parâmetros e das suas primeiras derivadas.

c) Supondo que no centro do disco actua uma fôrça F de grandeza invariável e constantemente normal ao plano comum de C e D, calcular os segundos membros das equações de Lagrange que correspondem aos parâmetros escolhidos e escrever estas equações.

d) Cinemática: Supondo agora que no movimento de D relativamente a C o centro de D possue uma velocidade de grandeza constante V, calcular os elementos definidores do estado cinético do disco D no seu movimento em relação ao referencial S.

I. S. T. — 1.º exame de freqüência, 1940-41

866 — Dados o vector $\alpha=xI+yJ+zK$ e o escalar $u=x^2+y^2+z^2$, ¿o campo de componentes: $X=\operatorname{div}\alpha$, $Y=\operatorname{mod}\operatorname{grad}u$, $Z=u\operatorname{mod}\alpha$ será um campo de momentos?

867 — Desenvolver $x(\pi-x)$ em série de Fourier no intervalo $0\leq x\leq\pi$.

868 — Achar as componentes mixtas, $\varepsilon_{i}^{\cdot jk}$ e $\varepsilon_{ij}^{\cdot\cdot k}$ do tensor hemisimétrico ε, em coordenadas gerais.

869 — ¿Quando é que o maior dos três momentos principais de inércia, em relação a um dado ponto O, é igual à soma dos outros dois?

I. S. T. — 1.º exame de freqüência, 1940-41

870 — Entre os dois pontos $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$, determinar a curva de estacionaridade do integral

$$I=\int_{AB} x^2\,ds\,.$$

R: *Tem-se*

$I=\int_{AB} x^2\,ds=\int_0^1 x^2\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ *com* $y_1=0$, $z_1=0$, $y_2=1$, $z_2=1$. *Há a determinar o sistema integral* $y=y(x_1\,c_1\,c_2,\ c_3\,c_4)$ *e* $z=z(x_1\,c_1\,c_2,\ c_3\,c_4)$ *do sistema de equações de 2.ª ordem:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)=0\,,$$

calculando-se as constantes c_i *a partir dos valores dados* y_1, z_1, y_2 *e* z_2.

871 — Converter o sistema de funções $\varphi_1 = x+2$, $\varphi_2 = x-1$, $\varphi_3 = x^2$ noutro equivalente, ortogonal e normado no intervalo $(0, 1)$.

R: *As funções dadas* φ_1, φ_2 *e* φ_3 *são linearmente independentes, como é fácil verificar. Procure-se primeiro um sistema de funções* $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = a_{21}\psi_1 + \varphi_2$, $\psi_3 = a_{31}\psi_1 + a_{32}\psi_2 + \varphi_3$, *isto é, de coeficientes tais que* $(\psi_i, \psi_j) = \int_0^1 \psi_i \psi_j \, dx = 0 \ (i \neq j)$. *Tem-se* $a_{21} = -\frac{(\varphi_1 \, \varphi_2)}{\|\varphi_1\|^2}$, $a_{31} = -\frac{(\varphi_1, \varphi_3)}{\|\varphi_1\|^2}$ *e* $a_{32} = -\frac{(\psi_2, \varphi_3)}{\|\psi_2\|^2}$. *No caso presente vem* $\|\varphi_1\|^2 = (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (x+2)^2 \, dx = 19/3$, $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 (x+2)(x-1) \, dx = -7/6$, *donde* $a_{21} = 7/38$, $(\psi_1, \varphi_3) = \int_0^1 (x+2) x^2 \, dx = 11/12$, *donde* $a_{31} = -11/70$, *etc.* ψ_i *normalizam-se fazendo* $\Phi_i = \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|}$.

872 — Decompor a homografia

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3J-K & 2I-J & I+2J \\ I & J & K \end{pmatrix}$$

e determinar os seus invariantes. R: *Como se conhecem* αI, αJ *e* αK *é rápida a determinação do vector* $V\alpha$ *de homografia* α *e a da sua dilatação. Assim, tem-se* $\alpha I = 3J - K$, $\alpha J = 2I - J$, $\alpha K = I + 2J$ *e* $V\alpha = 1/2\,[I \wedge \alpha I + J \wedge \alpha J + K \wedge \alpha K] = -I + J + 1/2.K$. *Para a dilatação:* $\beta = D\alpha = \alpha - V\alpha \wedge$ *e portanto* $\beta I = \alpha I - V\alpha \wedge I = 3J - K - (-I + J + 1/2.K) \wedge I = 5/2.J$, $\beta J = \alpha J - V\alpha \wedge J = 5/2.I - J + K$, $\beta K = \alpha K - V\alpha \wedge K = J$ *e finalmente* $\beta = \begin{pmatrix} 5/2J & 5/2I-J+K & J \\ I & J & K \end{pmatrix}$.

Para os invariantes tem-se:

$I_1\alpha = I \mid \alpha I + J \mid \alpha J + K \mid \alpha K = -1$,

$I_2\alpha = I \wedge \alpha J \mid \alpha K + J \wedge \alpha K \mid \alpha I + K \wedge \alpha I \mid \alpha J = -5$

e $I_3\alpha = \alpha I \wedge \alpha J \mid \alpha K = -5$.

873 — Sendo y_1, y_2, y_3 coordenadas cartesianas ortogonais, calcular, em coordenadas gerais x_1, x_2, x_3, definidas pelo sistema: $y_1 = x_1 \operatorname{sen} x_2$, $y_2 = x_2 \cos x_1$, $y_3 = x_3$, as componentes do tensor fundamental; e as do tensor derivado do vector $(Y_i) = (y_i)$, definido pelo ponto $P(y_1, y_2, y_3)$ e pela origem do sistema cartesiano.

Soluções dos n.os 870 a 872 de M. Zaluar.

F. C. P. — Física Mat., 1.º ex. de freq., 11-2-1941

874 — Seja $\alpha v_1 = v_1$, $\alpha v_2 = 0$, $\alpha v_3 = i v_3$. Calcular a matriz de representação de α, na base em que v_1, v_2 e v_3 têm as coordenadas $(1, 0, 1)$, $(1+i, i, 1)$, $(-i, 1-2i, i)$.

875 — Seja x o símbolo de um vector de coordenadas — complexas $x_1, x_2, \cdots x_n$. Classificar as duas matrizes

$$A = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} . \| \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \| \quad \text{e} \quad B = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} . \| x_1 x_2 \cdots x_n \| .$$

Calcular os traços, os determinantes, as constantes e vectores fundamentais, os polinómios mínimos e os polinómios característicos.

São redutíveis à forma diagonal? Em que grupo?

876 — Seja $(x - x_0)^n$ o polinómio mínimo de um operador α de E_n.

Mostrar que é sempre possível determinar um vector v tal que $(\alpha - x_0)^{n-1} v \neq 0$.

Verificar que os vectores $v, (\alpha - x_0) v, \cdots (\alpha - x_0)^{n-1} v$ formam uma *base* e calcular a representação correspondente de α (Schreier und Sperner).

877 — Enunciar a condição para que a matriz

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & & & \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

seja redutível à forma diagonal (Schreier und Sperner).

Qual é a condição homóloga *no grupo unitário?*

Contêm pontos do 1.º exame de freqüência de *Mecânica Racional* e de *Física Matemática* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1, 5 e 6.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 12-2-1941

878 — Três urnas idênticas têm as seguintes composições: U_1(37 esferas, 3 das quais brancas), U_2(12 % de esf. brancas) e U_3(5 esf. brancas, 15 pretas e 5 vermelhas). *a)* Escolhe-se ao acaso uma urna e extrai-se uma esfera. Probabilidade de saída de uma esfera branca. *b)* Tira-se uma esfera de cada uma das urnas. Probabilidade de que saia pelo menos uma esfera branca.

R: $p_a = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{37} + \frac{3}{25} + \frac{1}{5}\right) = 0{,}134$ *e* $p_b = 1 - \frac{34}{37} \cdot \frac{22}{25} \cdot \frac{4}{5}$.

879 — Fazem-se 10 lançamentos de uma moeda. Calcular os valores exacto e aproximado da probabilidade de um desvio 2 e o êrro relativo cometido, tomando o valor aproximado. R: *Valor exacto:* $P_2 = \frac{10!}{7!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}1172$. *Valor* *aproximado*:

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} e^{-\frac{2^2}{5}} = 0{,}1134; \text{ érro relativo } \frac{P_2 - P_2}{P_2} = 0{,}032 .$$

(Vidé: G. Castelnuovo, *Calcolo delle Probabilità* — Vol. I, 2.ª ed., pg. 88).

M. Zaluar.

F. C. P.—1.º exame de freqüência, 7-2-1941

880 — Numa urna há duas bolas brancas e três pretas.

a) Tiram-se ao acaso sucessivamente duas bolas. Calcular a probabilidade de ser branca uma terceira bola tirada ao acaso da urna. R: *a) Seja* B_i *a saída de uma bola branca na tiragem de ordem* i. *Há três maneiras contraditórias de realização do acontecimento* B_3: $B_1 B'_2 B_3$, $B'_1 B_2 B_3$, $B'_1 B'_2 B_3$. *O cálculo das correspondentes probabilidades não oferece dificuldade. Resultado:* 2/5.

b) Observou-se que esta terceira bola era branca. Calcular a probabilidade de as duas primeiras terem sido da mesma côr. R: *b) Teremos de calcular* $p_{B'_1 B'_1 : B_3} = \frac{p_{B'_1 B'_2 B_3}}{p_{B_3}} = 1/2$.

M. Gonçalves Miranda.

Contêm pontos de primeiros exames de freqüência de *Cálculo das Probabilidades* os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 1 e 5.

PEDAGOGIA

Na reünião da Sociedade Portuguesa de Matemática de 10 de Dezembro de 1941 foi aprovada por unânimidade e sem discussão a proposta que abaixo se transcreve e que a Secção Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática apresentou em seguimento do estudo dos pontos de exame de matemática dos liceus relativos ao ano lectivo de 1940-41 que levou a efeito em cumprimento do plano de trabalhos aprovado pela S. P. M. Eis o texto da proposta:

A Sociedade Portuguesa de Matemática, tendo procedido ao exame dos pontos de matemática saídos nos exames dos liceus no ano lectivo de 1940-41, verificou o seguinte:

1.º Que êsses pontos são, duma forma geral, demasiado extensos, com um número de questões sempre superior a vinte, o que provoca dispersão em pequenas questões e não permite, por isso mesmo, avaliar da capacidade de raciocínio dos examinandos e da sua aptidão para pôr, resolver e discutir problemas.

2.º Que os pontos não foram organizados com o necessário cuidado e equilíbrio, verificando-se, num mesmo ciclo, por vêzes fortes disparidades no grau de dificuldade ou trabalho de execução.

3.º Que, dentro de cada ponto, se encontra freqüentemente um grande desequilíbrio

a) já na classificação das questões, em problemas e preguntas; há *preguntas* que são *problemas*, por vêzes mesmo mais difíceis;

b) já na valorização respectiva; vêem-se, com freqüência, *preguntas* mais difíceis ou trabalhosas que *problemas* e com valorização muito inferior; vêem-se ainda, preguntas com a mesma valorização e dificuldades muito diferentes. Reconhece a Sociedade Portuguesa de Matemática que daí resulta, por vêzes, um benefício para o examinando, mas considera o princípio condenável pelas condições psicológicas em que o examinando fica colocado em face da prova.

4.º Que, em grande número de enunciados, há imprecisão de linguagem, imprópria da disciplina de Matemática, bem como redacção confusa.

5.º Que, à mencionada imprecisão e confusão, se alia, agravando os seus efeitoss, imprecisão dos dados; existem pontos com figuras mal feitas, com figuras de que se não dão os dados necessários e com figuras erradas.

6.º Que grande número de questões se refere a coisas inúteis, no nível que o ensino da Matemática deve ter nos liceus, como seja a exigência de operações sôbre números estritos em sistemas de numeração em base diferente de 10, o que redunda em prejuízo de questões com real utilidade.

7.º Que as chaves em face das quais os professores devem classificar os pontos enfermam de vários males, como

a) rigidez de resultados, dando, por vêzes, apenas um resultado onde o enunciado da questão comporta mais de um, ou exigindo uma resposta nem sempre a mais natural ou certa;

b) exigência de resultados com aproximações què os dados do enunciado não permitem;

c) êrros nas respostas.

Verifica ainda que o folheto intitulado «Instruções aos reitores dos liceus sôbre os exames liceais e de admissão aos liceus» contém, na parte referente a normas de classificação, a disposição anti-pedagógica de mandar reduzir a zero a cotação duma resposta dificiente ou incompleta, sem contemplação pelo trabalho realizado pelo examinando na questão respectiva, mesmo que êle mostre estar de posse de todos os elementos para a resolução.

Em vista do exposto, a S. P. M. resolve:

1.º Considerar como injustificado e condenável, tanto do ponto de vista científico, como do ponto de vista pedagógico, o actual regime de organização de pontos para os exames do liceu na disciplina de Matemática, já pela sua deficiência como meio de investigação dos conhecimentos dos examinandos, já pelo perigo, ainda maior, que representa pela deformação que provoca na orientação do ensino.

2.º Comunicar esta resolução às entidades pedagógicas oficiais e responsáveis.

3.º Empregar todos os meios ao seu alcance para que o mesmo regime seja substituído por outro que melhor possa servir os interêsses do ensino.

Com base nesta proposta a Direção da S. P. M. apresentou a Sua Ex.ª o Ministro da Educação Nacional uma representação.

A «Gazeta de Matemática» regista com prazer a acção desenvolvida pela S. P. M.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

Maurice Fréchet entre nós

O professor Maurice Fréchet, da Faculdade de Ciências de Paris, acaba de chegar a Lisboa a convite do Instituto para a Alta Cultura.

O objectivo da sua visita é especialmente o de tomar contacto com o Centro de Estudos Matemáticos daquêle Instituto e realizar na Faculdade de Ciências de Lisboa uma série de conferências de Topologia e Cálculo das Probabilidades. Demorar-se-á em Portugal três semanas durante as quais realiza as seguintes conferências: na Faculdade de Ciências de Lisboa (em 22 e 23 de Janeiro e 2, 4, 5 e 6 de Fevereiro, pelas 17,30 horas) — *Les fonctions périodiques, les fonctions presque périodiques et les fonctions assymptotiquement presque périodiques* (Para um público científico matemático e não matemático). *Applications des fonctions assymptotiquement presque périodiques au théorème ergodique de Birkhoff* (Para um público restrito com uma cultura matemática mais avançada. Interessa, em especial, a matemáticos, físicos e engenheiros), *Les débuts de la topologie combinatoire. Le théorème d'Euler-Cauchy* (Dedicada a professores do Liceu e alunos dos primeiros anos dos cursos superiores), *La théorie des courbes dans des espaces abstraits très généraux, Types homogènes de dimensions, Le développement d'une fonction continue en série de polynômes dans les espaces abstraits* (Estas três últimas conferências constituem uma série com o título «Recherches modernes de Topologie» e destinam-se a matemáticos especialisados). Ainda em Lisboa, realiza-se no Instituto Francês em Portugal, para um público que se interesse pela filosofia das ciências, uma conferência com o título *Les origines des notions mathématiques* (às 21,30 horas do dia 26 de Janeiro).

De 26 a 2 de Janeiro, o professor Fréchet realiza em Coimbra uma conferência com o título *Les diverses définitions de l'aire*, e no Pôrto as duas seguintes: *Caractérization topologique du ségment de la droite, de la demi-droite et du cercle. Le déterminant de Wronski et son intervention dans un paradoxe mécanique.*

Os estudiosos da especialidade vão ter oportunidade de conhecer directamente as investigações mais recentes do ilustre matemático, e de o ouvirem sôbre as modernas tendências da Topologia.

A «Gazeta de Matemática» julga interessante transcrever a seguinte proposta unânimemente aprovada em recente reünião da Assembléia Geral, da Sociedade Portuguesa de Matemática, que dá brevemente uma idéia justa da personalidade científica do professor Fréchet:

A Direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática, reconhecendo:

1.º — a influência profunda exercida pelas concepções do Senhor Maurice Fréchet, no movimento matemático contemporâneo;

2.º — que a criação duma teoria dos espaços abstractos, por êste ilustre matemático, no início do século, foi o ponto de partida necessário para o desenvolvimento de numerosas teorias matemáticas em pleno florescimento nos nossos dias;

3.º — que as teorias abstractas, de que Maurice Fréchet foi um dos primeiros pioneiros, permitiram realizar nos últimos trinta anos um gigantesco trabalho de síntese e de clarificação das ciências matemáticas;

4.º — que a obra de Maurice Fréchet realizada nos mais variados campos das matemáticas puras e aplicadas é um monumento à glória do espírito construtivo do Homem;

propõe, pela primeira vez,

a atribuição do título de sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática ao Senhor Maurice Fréchet, Professor da Faculdade de Ciências de Paris, como homenagem prestada pela Sociedade Portuguesa de Matemática à sua obra científica.

Centro de Estudos Matemáticos do Instituto para a Alta Cultura

O Centro de Estudos Matemáticos do I. A. C. organizou para o actual ano lectivo duas séries de conferências que se iniciaram em 15 de Novembro e se prolongarão até ao fim do ano. A primeira, de *Introdução à Álgebra Abstracta*, tem o objectivo de facilitar uma iniciação no estudo da Álgebra Moderna. Todo o programa foi concebido e preparado de modo que, pressupondo apenas o conhecimento da teoria clássica das equações, leve o ouvinte a familiarizar-se, gradualmente, com os métodos e os teoremas abstractos habilitando-o em pouco tempo para a leitura e compreensão da literatura de Álgebra Abstracta. Esta série de conferências que não pode ficar completada êste ano ocupará ainda o primeiro semestre de 1942-1943. O programa para 1941-1942 é constituído pelos capítulos seguintes: Teoria dos números; Teoria clássica de Galois; Grupos abstractos; Corpos algébricos; Domínios algébricos de integridade; Anéis e corpos; Corpos perfeitos. Colaboram êste ano: J. Rémy Freire, O. Morbey Rodrigues, J. Sebastião e Silva, J. Silva Paulo, A. Sá da Costa, G. Ramos de Castro, V. Barroso, J. Ribeiro de Albuquerque, M. de Alenquer, F. Veiga de Oliveira e H. Ribeiro.

Tiveram já lugar as seguintes conferências desta série: em Novembro, sôbre a teoria dos números, por J. Rémy Freire nos dias 18 e 20, por O. Morbey Rodrigues nos dias 25 e 27; em Dezembro, sôbre a Teoria clássica de Galois, por J. Sebastião e Silva nos dias 2, 4, 9, 11, 16 e 18.

As conferências continuam a realizar-se regularmente no anfiteatro de matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, às têrças e quintas-feiras pelas 18 horas.

A segunda série de conferências, de *Introdução à Topologia Geral* inclui-se nas sessões de trabalho (colóquios) do Seminário de Análise Geral. Estas sessões de trabalho tornam-se públicas para corresponder à curiosidade repetidamente manifestada pelos estudiosos em face dos resultados, dos métodos e do objectivo dêste ramo da Análise Geral. Procura-se, sem prejuízo do carácter de sessões de trabalho que devem ter, não perder a oportunidade de divulgar os Fundamentos da Topologia Geral e, com êste fim, detalham-se as questões e multiplicam-se os exemplos. Estas conferências têm necessàriamente um carácter pouco elementar. Para a sua compreensão não se requere nenhum conhecimento especial da Matemática mas ùnicamente um certo hábito de abstracção.

Tiveram já lugar as seguintes conferências de Topologia Geral: em 15, 22 e 29 de Novembro e em 6 de Dezembro, sôbre a noção de Vizinhança e o Objectivo da Topologia Geral por Hugo Ribeiro; em 13 de Dezembro, sôbre Conjuntos fechados e espaços (F) por António Monteiro; em 16 de Dezembro, sôbre os espaços de Kuratowski por J. da Silva Paulo. As conferências desta série continuam a realizar-se regularmente no mesmo local que as da série de Álgebra aos sábados pelas 14 horas.

Os outros colóquios do Seminário de Análise Geral são reservados aos trabalhadores do Centro e às pessoas especialmente autorizadas para êsse fim. Incluem-se exposições sôbre os seguintes assuntos: *fundamentos da topologia geral, axiomática da geometria projectiva, resolução das equações algébricas, teoria das estruturas, evolução da lógica, fundamentos da teoria dos quantos.*

Programas detalhados e outras informações fornece-as o Centro de Estudos Matemáticos do I. A. C., na Faculdade de Ciências de Lisboa.

Sôbre o objectivo dos cursos promovidos pela Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto

No seguimento das conferências de António Monteiro e Manuel Valadares, respectivamente sôbre *Topologia Geral* e sôbre *Os novos elementos da Família do Rádio*, vão realizar-se na Faculdade de Ciências do Pôrto dois cursos livres de Matemática: um sôbre a *Teoria dos Grupos e suas Aplicações à Física Quântica*, por António de Almeida Costa; outro sôbre *Cálculo Tensorial e algumas das suas Aplicações*, por Manuel Gonçalves Miranda.

Estão ainda em projecto outros cursos, comunicações e conferências, e contamos igualmente com a colaboração de professores de outras Faculdades, nomeadamente com o Professor Vicente Gonçalves, de Coimbra, e com o Professor Bento Caraça e Doutor Marques da Silva, de Lisboa.

É natural no entanto preguntar-se qual foi o pensamento da Secção de Matemática ao tomar a iniciativa dêstes cursos e conferências, a integrar num plano de conjunto que englobe não só a Matemática mas igualmente a Física e mesmo a Biologia.

Que objectivo pretendemos nós atingir? Por um lado, no plano científico, temos a intenção de facilitar aos estudiosos as técnicas e as vias de acesso aos problemas de maior actualidade da Matemática e das suas Aplicações. Por outro, desejamos integrar os problemas da Matemática no movimento geral da Ciência, numa primeira tentativa de sistematização das íntimas relações que hoje existem entre os três domínios — o da Matemática, o da Física e o da Biologia. Finalmente, num plano ético, desejamos criar um ambiente de trabalho, um «clima» e um estímulo, como resultante da cooperação de todos numa tarefa que transcende o interêsse imediato de cada um e traduz uma consciência colectiva: a de que pertencemos a uma Universidade.

Num momento em que por tôda a parte se proclama o *sentido místico* do trabalho, e em que a própria inteligência é avaliada em função das suas realizações efectivas e não como somatório de possibilidades, a Secção de Matemática entendeu que era do seu dever o animar e promover a realização de um plano de trabalho de conjunto.

Polarizando a nossa atenção em alguns problemas da actualidade dentro do grande movimento da Matemática e convivendo com especialistas das outras ciências, vamos ajudar-nos mùtuamente, «raciocinando em voz alta» sôbre aquêles pontos que formos estudando com cuidado e interêsse.

E com uma originalidade mais ou menos marcada e um maior ou menor poder de sistematização, conforme a maneira de ser de cada um de nós, todos podemos viver com igual intensidade esta afirmação colectiva de vontade, de tenacidade e de solidariedade.

E. Picard

A imprensa mundial noticiou há dias a morte do matemático francês E. Picard. A Redacção da «Gazeta de Matemática» sente o desaparecimento de tão notável cientista e julga prestar-lhe uma modesta homenagem apresentando aos seus leitores a breve notícia que segue e que redigiu José Ribeiro de Albuquerque:

Nasceu em Paris em 1856 e desde muito novo começou uma carreira científica brilhante. Saíu da Escola Normal em 1877 doutorado em ciências e foi nomeado imediatamente «maître de conférences» na Fac. de Ciências de Paris (1328). Em seguida foi encarregado de curso em Toulouse (1879) e depois, na Sorbonne, suplente da cadeira de mecânica física e experimental (1881-1885). Foi professor da Fac. de Ciências de Paris desde (1886) e da Escola Central de Artes e Manufacturas desde 1893. Em 1889 foi nomeado membro da Academia das Ciências de que se tornou em 1917, Secretário Geral. Foi eleito para a Academia francesa em 1924.

Em 1920 assumiu uma atitude inesperada da parte de um espírito como o seu, contra os seus colegas sábios alemães, propondo a sua expulsão da Academia, idéia esta que teve a reprovação geral do estrangeiro.

Os seus notáveis trabalhos versaram principalmente sôbre análise matemática e equações diferenciais e publicou entre outras, as seguintes memórias: «Quelques réflexions sur la mécanique suivies d'une première leçon de dynamique (1902); Sur le développement de l'analyse et ses rapports aux diverses sciences (1905); L'Oeuvre de H. Poincaré (1913); Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle (1917); La vie et l'oeuvre de G. Darboux (1917); La théorie de la rélativité et ses applications à l'astronomie (1921); Discours et Mélanges (1922); La vie et l'oeuvre de Pierre Duhem (1922); Mélanges de mathématiques et de physique (1924); Les Théories de l'optique et l'oeuvre de Hippolyte Fizeau (1924); Pascal mathématicien (1924); Leçons sur quelques équations fonctionnelles, avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique (1929); Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées parcielles, avec des applications à la physique mathématique (1928); Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles (1929); Un coup d'oeil sur l'histoire des scienses et des théories physiques (1930).

São dêle também as obras tantas vêzes consultadas pelos estudiosos: Tratado de análise, 3.º vol. (1893-1923); Teoria das funções algébricas de duas variáveis independentes (em colaboração com Simart, 2 vol, 1897-1906).

No prelo

ALMEIDA COSTA — Elementos da Teoria dos Grupos. Editados pela Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto.

ANTÓNIO MONTEIRO — Introdução à Álgebra Linear — 1.ª Parte. Representação analítica dos Operadores Lineares no espaço a *n*-dimensões. Curso realizado no Seminário de Análise Geral do Centro de Estudos Matemáticos do Instituto para a Alta Cultura no ano lectivo 1940-1941. Vol. I da Colecção *Estudos de Matemática.*

RUY LUÍS GOMES — Introdução Matemática à Teoria dos Quanta. Curso de Física Matemática realizado na Faculdade de Ciências do Pôrto.

A primeira parte dêste curso é consagrada à Teoria da medida-L, à noção de integral-L e integral-L de Stieljes em espaços muito gerais. Segue-se a Teoria dos Operadores Lineares no espaco de Hilbert, e finalmente as suas aplicações à Teoria dos Quanta.

PROBLEMAS PROPOSTOS

881 — Calcular o integral

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}; \quad B^2-AC\neq 0$$ (n inteiro positivo).

882 — Estudar a curva $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinómios em x de grau p e q, sob o ponto de vista das assímptotas rectilíneas.

883 — Determinar o raio dum sector circular de perímetro constante, de forma que a área seja máxima.

884 — Estudar a convergência da série cujo têrmo geral é $u_n=\left[\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{\alpha}{n}\right)\right]^n \quad 0<a<\dfrac{\pi}{2}$.

885 — Integra-se a função $e^z z^{n-1}$ $(n>0)$ ao longo dum contôrno formado por um raio OA segundo ox, um arco de circunferência AB de centro O e raio OA, e um raio BO, sendo B tal que $\alpha=A\hat{O}B$ esteja entre 0 e $\pi/2$.

Fazendo crescer OA indefinidamente deduzir do resultado os integrais definidos:

$$\int_0^\infty u^{n-1}\,e^{-au}\cos bu\,du \quad \int_0^\infty u^{n-1}\,e^{-au}\operatorname{sen} bu\,du.$$

886 — Dada a curva plana de equação $y^q-Ax^p=0$ (A constante, p e q inteiros), pretende-se saber em que casos o arco pode ser expresso na abscissa por meio das transcendentes elementares.

887 — Sendo α,β,γ os ângulos que formam duas a duas três semi-rectas OA, OB, OC $(\alpha=(\widehat{OB,OC}),\cdots)$ prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\varphi$$

em que φ é o ângulo que OC faz com o plano OAB.

888 — Se uma dupla família de curvas é definida sôbre a superfície $x^i=x^i(u^\alpha)$ $(i=1,2,3,$ $\alpha=1,2)$ pela equação $b_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta=0$ mostre que o ângulo θ dessas curvas é em cada ponto dado por $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-2\sqrt{|b|}}{\sqrt{a}\,a^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta}}$ em que $a_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico, $a=|a_{\alpha\beta}|$, $b=|b_{\alpha\beta}|$.

889 — Achar a equação da envolvente das circunferências passando por O e de centro sôbre uma circunferência fixa também passando por O (cardióide).

890 — Calcular o número m tal que $x^3+y^3+z^3+$ $+mxyz$ seja divisível por $x+y+z$.

891 — Escreva como polinómio a raiz quadrada de $9/4+6x-17x^2-28x^3+49x^4$.

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EM NÚMEROS ANTERIORES

735 — A solução do problema 735, na sua segunda forma, que vem publicada na pág. 10 do n.º 7 da «G. M.» está errada, mas a solução não é a que o sr. J. S. Faria Abreu indica, mas sim $x=\dfrac{4n\pm 1}{6}\pi \quad x=\dfrac{6n\pm 1}{18}\pi$.

M. A.

736 — $\dbinom{n+t}{r}=\dbinom{n+t-1}{r}+\dbinom{n+t-1}{r-1}$, $\dbinom{n+t-1}{r-1}=\dbinom{n+t-2}{r-1}+\dbinom{n+t-1}{r-2}$, $\cdots$ $\dbinom{n+1}{r-t+1}=\dbinom{n}{r-t+1}+\dbinom{n}{r-t}$. Somando ordenadamente e fazendo as reduções vem: $\dbinom{n+t}{r}=$ $=\dbinom{n+t-1}{r}+\dbinom{n+t-2}{r-1}+\cdots+\dbinom{n}{r-t+1}+\dbinom{n}{r-t}$ ou $\dbinom{n+t}{r}-\dbinom{n}{r-t}=\sum\limits_{k=0}^{t-1}\dbinom{n+t-(k+1)}{r-k}$ mas podem-se separar os $(n+t)$ elementos em 2 grupos de n e t, e agrupá-los de diversos modos, contanto que sempre somem r. O seu número total será pois a soma de tôdas as combinações, como se deduz da igualdade anterior:

$$\binom{n+t}{r}=\binom{n}{r}\binom{t}{o}+\binom{n}{r-1}\binom{t}{1}+\cdots+$$
$$+\binom{n}{r-t}\binom{t}{t}=\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\binom{n}{r-k}\ (t\leq r).$$

Solução enviada pelo Sr. J. S. Faria Abreu, de Penafiel.

792 — Recebemos do Sr. J. S. Faria Abreu uma solução que não publicamos por ser excessivamente longa.

Sol.: — Subtraindo a última coluna das duas primeiras (há pelo menos 3 colunas visto que por hipótese $n>2$) os elementos da 1.ª coluna ficam iguais a b_n-b_1 e os da 2.ª coluna a b_n-b_2. Tendo duas colunas proporcionais, $\Delta_n=0$.

M. A.

794 — Recebemos a solução do Sr. J. S. Faria Abreu, que verifica o teorema proposto calculando ambos os termos da igualdade que acompanha o enunciado e verificando que são iguais.

M. A.

Serviço de informação

A redacção da «Gazeta de Matemática» responderá às consultas que os leitores lhe dirijam. E, sempre que o assunto duma consulta possa interessar a massa dos leitores, a resposta será dada nestas colunas, podendo sôbre ela estabelecer-se discussão, quando para tal haja lugar. Promover-se-á, dêste modo, o contacto entre os leitores e dêstes com a Gazeta, que sua é, tal como sucederá através doutras secções. A «Gazeta de Matemática» considera o estabelecimento dêste contacto como uma das condições necessárias à difusão do gôsto e do estudo da Matemática, e, por isso mesmo, dedicará tôda a atenção não só a esta secção, como a outras já criadas — Problemas, Noticiário, Bibliografia — ou que virá a criar — Clubes de Matemática, Cinema, etc. Resumindo, é preciso converter a «Gazeta de Matemática» num instrumento de trabalho, para cuja afinação não pode dispensar-se a actuação efectiva dos leitores através das suas páginas.

Publicações periódicas

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia. Ano 24 — n.os 4 e 5 — Julho-Outubro.

Boletin Matematico — (Buenos Aires). Revista Argentina de Matemática, Ano XIV.

Portugaliae Mathematica — Vol. 2 (1942) Fasc. 4 — Pedro José da Cunha — *Du parallélisme dans l'espace euclidéen*. J. Vicente Gonçalves — *Quelques résultats concernant les régions simples*. J. Sebastião e Silva — *Sur une méthode d'approximation semblable à celle de Gräffe*. J. Ribeiro de Albuquerque — *La notion de frontière en Topologie*.

Vol. 3 (1942) — Fasc. 1 — John von Neumann — *Approximative properties of matrices of high finite order*. L. A. Santaló — *Quelques propriétés des courbes gauches dans la Géométrie differentielle affine*.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. n.º 123 (Novembro de 1941) e n.º 124 (Dezembro de 1941). O n.º 124 contém um artigo sôbre a energia das acelerações dum sólido com um ponto fixo, pelo Prof. A. de Mira Fernandes.

COLABORAÇÃO

A «Gazeta de Matemática» solicitou no seu primeiro número o concurso de todos os professores e assistentes das cadeiras de matemática das escolas superiores, sob a forma de envio de pontos de exames de freqüência e finais, afim de poder alcançar plenamente o objectivo que a si mesma marcou — a publicação de todos os pontos de exames. A «Gazeta de Matemática» tem de agradecer, reconhecidamente, aos professores e assistentes que corresponderam ao seu apêlo, facultando-lhe os pontos desejados. Todavia, não tem podido a «Gazeta de Matemática» publicar *todos* os pontos, ou pontos de *tôdas* as escolas. Esta falha poderia desaparecer no futuro, se a colaboração que falta, uma vez reconhecida a utilidade da Gazeta, lhe fôsse oferecida, como solicitou e agradece.

Referências

A Direcção da «Gazeta de Matemática» agradece muito reconhecida as referências feitas por: «Diário de Lisboa», «Diário de Notícias», «Jornal do Comércio e das Colónias», «Diário da Manhã», «O Século», «Jornal de Notícias», «Gazeta de Coimbra», «O Primeiro de Janeiro» e «Diário de Coimbra».

Aos assinantes

A «Gazeta de Matemática» pede, agora que vai proceder-se à cobrança das assinaturas o melhor acolhimento para os recibos que remeterá por intermédio do correio. Em favor dêste pedido, recorda-se que a recusa dum recibo representa para a «Gazeta de Matemática» uma despeza avultada além de provocar perturbações nos serviços de tesouraria.

COLABORADORES

António Monteiro, A. Sá da Costa, Bento Caraça, Jaime Rios de Sousa, José Sebastião e Silva, José Silva Paulo, Manuel Zaluar, Ruy Luís Gomes

CEDERAM PONTOS OU RESOLUÇÕES

A. A. Ferreira de Macedo, A. Cortesão Pais, A. de Mira Fernandes, A. Sá da Costa, Bento Caraça, G. Ramos de Castro, Hugo Ribeiro, Jaime Rios de Sousa, J. F. Ramos e Costa, José Vicente Gonçalves, J. Calado, J. César Oom, J. Pais Morais, M. Esparteiro, Madureira e Sousa, Maria do Pilar Ribeiro, M. Zaluar, Pinto de Almeida, R. Sarmento de Beires, Vítor Hugo de Lemos, Virgílio Barroso

GAZETA DE MATEMÁTICA

A «Gazeta de Matemática» publica quatro números por ano, em Janeiro, Abril, Junho e Outubro. Cada número terá um mínimo de 16 páginas e o preço de Esc. 5$00.

Pontos de Exame. Uma das secções permanentes da «Gazeta de Matemática» é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da «Gazeta de Matemática» é a seguinte: número de Janeiro — pontos do 1.º exame de freqüência; número de Abril — pontos do 2.º exame de freqüência; número de Junho — pontos de exames de aptidão e finais; número de Outubro — pontos de exames de aptidão e finais. Como já está dito, esta é a distribuïção normal dos referidos pontos, por conseqüência, cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da «Gazeta de Matemática» aceita assinaturas de quatro números, ao preço de Esc. 18$00, para o que bastará dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Para simplificar o trabalho de cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que, a primeira cobrança, das assinaturas com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$50, Esc. 9$00 ou Esc. 13$50, correspondendo a 1, 2 ou 3 números.

Números atrazados. Os números atrazados são vendidos ao preço de capa: N.º 1 Esc. 3$00, N.º 2 Esc. 3$00, N.º 3 Esc. 6$50, N.º 4 Esc. 3$00, N.º 5 Esc. 4$00, N.º 6 Esc. 4$00, N.º 7 Esc. 6$00, N.º 8 Esc. 4$00.

Inscreva-se desde já como assinante da «Gazeta de Matemática»; assim, concorrerá para o futuro melhoramento da revista, que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial.