GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXIV N.° 92-93 JULHO-DEZ. 1963

SUMÁRIO

La recession des nebuleuses.
L'Univers en projection
por *G. Leteux*

Nota sobre quasigrupos subtractivos
por *José Morgado*

Definição de quasigrupo subtractivo por um único axioma
por *José Morgado*

A numeração em povos iletrados: Bochimanes de Angola e Macondes de Moçambique
por *M. Viegas Guerreiro*

Deuxième Symposium sur l'harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les Universités d'Europe

L'enseignement des Mathématiques dans les Lycées Danois
por *Hans Jorgen Helms*

Movimento Matemático
O papel e a importância da matemática clássica e da matemática moderna na solução dos problemas nacionais

Matemáticas Superiores
Pontos de Exames de Frequência e Finais
Matemáticas Gerais — Cálculo Infinitésimal

Boletim Bibliográfico

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 – Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2

ANO XXIV — N.º 92-93 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JULHO/DEZ. — 1963

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

La recession des nebuleuses L'Univers en projection

par **G. Leteux**

La théorie dont, après bien des années, M. G. LETEUX *donne ci-dessous un résumé a été conçue par lui en novembre 1909 à l'Ecole Navale à Brest, à partir d'une analyse de la carte marine et des cartes géographiques. L'Auteur en dégage la conclusion suivante:*

«Dans l'Univers que nous voyons en projection polaire, la surface antipode joue le rôle d'un centre de gravitation projectif».

A l'appui de cette prédiction, dès 1912, un témoignage favorable et de vif intérêt était fourni par des observations dues à SLIPHER **. Avant même qu'il eût été posé, le problème d'imputer une cause à la fuite mutuelle des galaxies* ***, a donc pu être, sinon résolu, du moins largement éclairé.*

G. BOULIGAND

LA CARTE MARINE

1—Le canevas de MERCATOR est une représentation plane et déformée du géoïde qui induit sur la bande utile ($-70^\circ+70^\circ$) une géométrie non euclidienne. Les navires en route au Nord sont accélérés comme si le Pôle Nord — rejeté à l'infini — était un centre de gravitation. Ceux qui font route sur des parallèles de la sphère, sont encore en mouvement uniforme sur la carte, mais leur vitesse croît avec la latitude (φ) comme s'ils gravitaient autour du Pôle Nord. Il y a là une image évidente de la Gravitation. L'accélération, indépendante du navire, est due à la déformation géométrique. La Gravitation ainsi expliquée, est une force d'inertie.

2 — La projection déforme l'espace. L'Observateur équatorial mesure pour un petit intervalle spatial $dy = d\varphi$.

Mais à la latitude (φ) il mesure un intervalle plus grand $dy > d\varphi$ défini par

$$(a) \qquad dy = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot d\varphi$$

Mais la projection, déformant l'espace, déforme aussi le Temps, indéfinissable sans

* SLIPHER — (Obervatoire Lowell) — Obtient les premiers spectres de nébuleuses, presque tous décalés vers le rouge.

** AMBARTSOUMIAN — «Rechercher les causes de la fuite mutuelle des Galaxies» (Congrès Astronom. de Moscou (Aout 1958).

l'espace. Si le Temps est défini par la rotation uniforme de la Terre, il est lié à la Longitude (g). L'Observateur équatorial de la carte, euclidienne en ce lieu, mesure $(d\,g)$ pour un petit intervalle de Temps. L'Observateur placé à la latitude (φ) mesure un Temps $(d\,e)$ plus petit $d\,e < d\,g$ défini par.

$$(b) \qquad d\,e = d\,g \cdot \cos\varphi$$

Conclusion : Les montres, non représentées sur la carte, retardent avec la latitude croissante. La fréquence de la rotation de leurs aiguilles décroit, la durée des heures s'allonge avec l'échelle spatiale. Au Pôle, la fréquence s'annule, le temps est indétérminé.

Multipliant membre à membre (a) et (b) il vient :

$$(c) \qquad d\,y \cdot d\,e = d\,\varphi \cdot d\,g$$

Pareillement sur le $d\,s^2$ de Schwarzschild on a :

$$(d) \qquad d\,l \cdot d\tau = d\,r \cdot d\,t$$

En d'autres termes les échelles spatiales et temporelles sont inverses l'une de l'autre : $m \cdot \cos\varphi$ et $m/\cos\varphi$

LE PROBLEME COSMOLOGIQUE

3 — L'Univers étant postulé hypersphérique, lorsque nous observons les astres la nuit, les rayons lumineux qui nous parviennent sont courbes. Notre oeil mène la tangente à ces rayons. Nous projetons ainsi l'Univers sur l'hyperplan tangent. L'antipode simple point géométrique sur l'hypersphère, se trouve représenté par la surface 4π du ciel. La déformation, transversale, y est *infinie :* il joue donc le rôle d'un centre de gravitation projectif : prédiction insoupçonnée datée Nov. 1909.

Cette projection que nous faisons instinctivement de l'Univers, ramenée à deux dimensions, s'appelle : Projection zénithale équidistante de GUILL. POSTEL.

En voici le mécanisme : Soit (P) le plan tangent à la Terre au Pôle Nord (O). Un plan mobile (Q) passant par la ligne des Pôles, coupe la Terre suivant un cercle méridien, et le plan P suivant une droite (D) tangente au méridien en (O). Un point M de distance polaire (n) sur le méridien, a pour image un point M_1 pris sur (D) à la distance rectiligne $O\,M_1 = r$ telle que $r = n$ ce qui définit la carte.

La métrique radiale reste euclidienne, les angles des méridiens entre eux sont conservés ainsi que les distances radiales. Les parallèles sont des cercles concentriques de rayon égal à la distance polaire. Le Pôle Sud est représenté par le cercle de rayon $\pi\,R$ qui limite la carte. La géométrie n'empêche pas de prolonger la carte àu delà de π (v. § 13).

Fig. 1 — Projection de G. Postel centrée sur le Pôle Nord.

Transversalement, la distance entre deux points pris sur un parallèle, est modifiée par l'échelle de la carte qui varie de 1 à l'infini quand (n) varie de zéro à π :

(10) $$E = n/\sin n$$

4 — La surface terrestre est ainsi représentée par l'intérieur *non euclidien* d'un cercle de rayon πR. Sur cette carte, à l'Observateur Nord correspond bien le point O. Mais le Pôle Sud antipode est représenté par la circonférence limite de rayon πR. Cette dissymétrie est la cause du champ géométrique centrifuge qui se lit sur ce canevas. (Fig. 1 et 2).

Par transposition des paragraphes 2 et 3 l'échelle temporelle est inverse; les montres

Fig. 2 — Projection de G. Postel centrée sur le Pôle Sud.

retardent avec la distance polaire. Sur le cercle antipode, les montres s'arrêtent, le Temps est indéterminé.

Un navire qui fait route radiale au Sud est accéléré, malgré la métrique euclidienne, car il parcourt des espaces égaux dans des temps de plus en plus courts. Pareillement le disque tournant d'EINSTEIN sur lequel l'accélération centrifuge est due à la modification *cinématique* de la métrique *transversale*.

L'HYPERCARTE

5 — Avec une dimension de plus, l'Univers se trouve ainsi à l'intérieur *non euclidien* d'une sphère de rayon πR. Cette représentation que nous voyons et observons, est une carte à trois dimensions, une HYPERCARTE. Le problème cosmologique se trouve tout résolu: Il suffit de la lire.

5a — Champ geometrique centrifuge

A l'Observateur central O correspond bien le point O. Mais le point antipode (A) est représenté par la surface 4π de la sphère limite, *déformation infinie*. Cette dissymétrie est la cause du champ géométrique centrifuge qui se lit sur ce canevas.

Les angles au centre étant conservés, la représentation transversale est conforme.

6 — Le temps se lit sur la carte

Les navires ne se déplacent sur la carte que par la volonté de l'homme, et leur accélération apparente n'est qu'un *effet*. La cause est le caractère non euclidien du canevas. L'unité de longueur varie avec l'échelle, donc aussi l'unité de Temps. En d'autres termes, la Géométrie détermine le Temps:

Inutile de s'en encombrer.

Il en résulte immédiatement que sur l'Hypercarte, à l'accroissement de l'échelle métrique ($E = n/\sin n$) correspond l'accroissement des longueurs d'onde, et naturellement la réduction des fréquences. C'est une propriété de la carte qui détermine le mouvement.

6a — A l'accélération des navires sur la carte correspond sur l'Hypercarte (espace dénué de frottement) le fait suivant:

Un point mobile, abandonné sans vitesse à quelque distance dn centre, s'éloigne indéfiniment, la sphère antipode étant le «centre» du champ géométrique centriguge. (v. § 13)

7 — Champ materiel centripete

La densité de matière ou d'énergie (ρ_0) est constante sur l'hypersphère, mais non sur l'hypercarte. En effet, on passe de l'une à l'autre par une transformation ponctuelle; les vitesses des astres restant toujours faibles vis à vis de celle de la lumière, les masses ne sont pas changées. La masse de l'hypercarte est donc la même que celle de l'hypersphère.

L'échelle radiale restant euclidienne, seules les deux coordonnées *transversales* sont modifiées. Si ρ_0 et R_0 sont la densité et le rayon constants de l'hypersphère, ces grandeurs deviennent sur l'hypercarte:

$$(11) \qquad \rho = \rho_0 \frac{\sin^2 n}{n^2} \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_0 E^{-2}$$

$$(12) \qquad R = R_0 \frac{n}{\sin n} \quad \text{ou} \quad R = R_0 \cdot E$$

on en déduit:

$$(13) \qquad \frac{dR}{R} = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dE}{E}$$

$$(14) \qquad \frac{dR}{R} = -\frac{1}{2}\frac{d\rho}{\rho}$$

et par comparaison:

$$(15) \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{d\rho}{\rho}.$$

La relation (15) montre l'existence d'un champ matériel centripète dû au gradient de densité, et opposé au champ géométrique centrifuge. Elle annonce la relation (35) ci après.

8 — Action concordante des deux champs sur le spectre

L'équation dimensionnelle d'une masse en fonction de la longueur et du temps s'écrit:

$$M = L^3 \cdot T^{-2} \quad \text{ou} \quad ML^{-3} = T^{-2}$$

ce qui montre que la densité est homogène à l'inverse carré d'une fréquence:

$$(17) \qquad T^{-2} = [\rho].$$

Comme la densité de l'hypercarte décroit du centre à la surface antipode, les fréquences vont en décroissant à partir du centre et s'annulent sur la surface antipode.

Ainsi le champ matériel centripète, et le champ géométrique centrifuge, bien qu'opposés, agissent sur les raies spectrales dans le

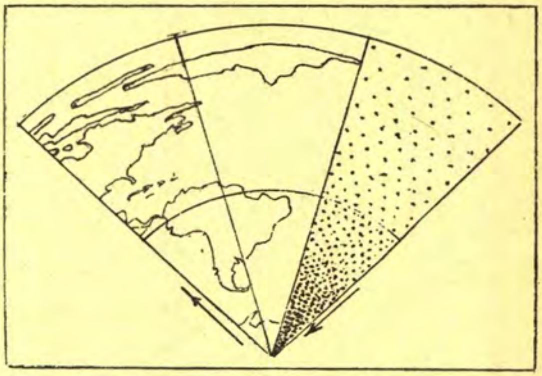

Fig. 3 — Le Champ géométrique centrifuge et le Champ matériel centripète

même sens, ce qui prouve que le décalage est un effet du second ordre, donc gravitationnel.

En effet, sans déformation, pas de champ de gravitation, pas de gradient de densité, pas de décalage. Mêmes conclusions de Schwarzschild.

Ainsi, l'analyse de l'hypercarte met en évidence, *déformés par la projection,* les deux champs géométrique et matériel des équations de la Relativité généralisée. (Fig. 3).

L'Observation confirme ces déductions.

9 — Diametres apparents

Dans l'espace euclidien, le diamètre angulaire (α) d'un objet de diamètre linéaire (d) décroit avec la distance $D = nR$ et tend vers zéro :

$$(e) \qquad \alpha = d / nR .$$

Il en va tout autrement sur la surface terrestre où le diamètre (β)

$$(f) \qquad \beta = d/R \sin n$$

commence par décroitre, passe par un minimum pour $n = \frac{\pi}{2}$ et croît ensuite. L'angle apparent est le même pour deux valeurs supplémentaires de la distance polaire (n). Par comparaison on tire :

$$(g) \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{\sin n} \qquad \beta > \alpha .$$

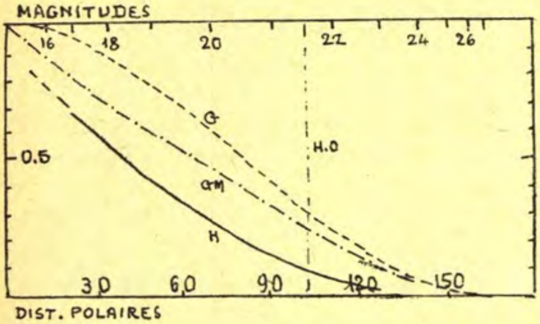

Fig. 3a — La densité
1° — En fonction de la distance polaire (en bas)
G Sous l'action du champ géométrique seul ($\rho = \rho_0 E^{-2}$) (§ 7)
GM — sous l'action combinée des 2 champs (§ 12) $\alpha = 1/4$
2° — En fonction de la magnitude (en haut)
H La densité observée (§ 19)
HO — Horizon optique $n = 104°$

Le diamètre apparent est plus grand sur la sphère que sur l'hyperplan. Avec une dimension de plus, ces résultats s'étendent à l'hypercarte (conservation des angles au centre).

Conséquence: La photométrie classique n'est plus valable en espace courbe. La mesure des distances qui s'en déduit en est gravement affectée.

9a — Remarque

Si la magnitude ne dépendait que du diamètre apparent seul, elle serait stationnaire au voisinage de la sphère équatoriale.

L'Observation doit montrer cet effet (v. § 20).

10 — Mesure des distances

Elle est faite à partir de relations telles que les suivantes établies dans un espace euclidien :

$$(25) \qquad m - M = 7{,}57 - 5 \log_{10} D_1$$

$$(26) \qquad I_\Delta = I_d \cdot \frac{d^2}{\Delta^2} .$$

Les distances D_1 croissent exponentiellement $D_1 = 10^{0{,}2(m-M)+c^{te}}$.

Mais l'Univers tel que nous voyons n'est pas euclidien. Les distances D_2, limitées à πR sont systématiquement plus courtes que les distances D_1. Les corrections à venir ne peuvent être que des diminutions infirmant la Loi de Hubble. (v. § 11).

La mesure des distances, très difficile, reste un problème ouvert.

10a — Correction aux magnitudes

Elle est donnée généralement sous la forme simple $\Delta m = B \frac{d\lambda}{\lambda_0}$. De la Loi de Pogson $\Delta m = -2{,}5 \log \left(1 + \frac{dW}{W}\right)$ et de (15)

$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dW}{W}=2\frac{d\lambda}{\lambda}$ qui entraine la correction double, on obtient en développant $\log\left(1+\frac{2\,d\lambda}{\lambda}\right)$ et en se limitant au premier terme :

$$(28) \qquad \Delta m = -2{,}17\frac{d\lambda}{\lambda_0}\cdots$$

Mais (28) est purement théorique ; la matière obscurante intervient et HUBBLE, lié à l'observation, employait $B=2{,}94$.

Question difficile, partie de la précédente.

11 — Relation décalage-distance

Le champ géométrique centrifuge est caractérisé par la relation

$$(29) \quad 1+\frac{d\lambda}{\lambda_0}=\frac{n}{\sin n}=1+\frac{n^2}{6}+\cdots$$

A l'action de ce champ se superpose celle de même sens du champ matériel. Le décalage $d\lambda/\lambda_0=\varphi(n)$ qu'il produit dépend du gradient de densité. La courbe (G) (fig. $3\,a$) montre que la fonction $\varphi(n)$, nulle à l'origine croît avec un maximum pour $n=70^\circ$, décroitensuite et s'annule pour $n=\pi$. Mais le décalage est lié au potentiel ; mettons en évidence la fonction $\varphi(n)$ en écrivant le potentiel par rapport au centre, d'une couche mince de rayon nR_0, d'épaisseur $R_0\,dn$ de masse (m) :

$$(29\,a) \qquad \frac{m}{nR_0}=4\pi\rho_0 R_0^2\,dn\cdot\frac{\sin^2 n}{n}.$$

La fonction cherchés est $\sin^2 n/n$ et nous pouvons poser :

$$\frac{d\lambda}{\lambda_0}=\frac{\sin^2 n}{n}=n-\frac{1}{3}n^3\cdots$$

quitte à vérifier que la relation (30) correspond bien à l'Obervation ; c'est le cas : Voyez ci-après : Densité apparente (§§ 12 et 19).

Mais ces deux champs ne sont pas indépendants ; posons donc

$$(30) \qquad 1+\frac{d\lambda}{\lambda_0}=\frac{n}{\sin n}+\alpha\frac{\sin^2 n}{n}$$

α étante un coefficient que l'observation précisera. La relation (14) suggère $\alpha=1/2$. J'ai essaayé aussi $\alpha=1/4$.

Aux petites distances, le second terme, prépondérant, commande un décalage proportionnel à la distance. Aux grandes distances, ce terme s'évanouit, et le champ géométrique l'emporte. Cette relation donne des distances angulaires affranchies des corrections de BAADE et SANDAGE. Points extrêmes :

$$\begin{array}{llll} \text{Virgo} & \frac{d\lambda}{\lambda_0}=0{,}00413 & \alpha=\frac{1}{4} & n=0^\circ 93 \\ N\ 30\ 295 & \phantom{\frac{d\lambda}{\lambda_0}=}\,0{,}4614 & & =67^\circ 7 \end{array}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\quad n=0^\circ 43 \qquad 48^\circ 5.$$

Dans le Ier cas (1/4) cette dernière n'est que 73 fois plus éloignée que VIRGO, contre 114 d'après HUBBLE.

Dans le second cas la Loi de HUBBLE est toujours valable.

12 — Explication de la Loi de Hubble

Les courbures des composantes $n/\sin n$ et $\sin^2 n/n$ s'opposent. La courbe composée est à peu près rectiligne jusqu'à $n=60^\circ$ ($\alpha=1/4$) et jusqu'à $n=90^\circ$ pour $\alpha=1/2$. Elle se relève ensuite.

Ainsi s'explique la Loi de HUBBLE qui n'est qu'une Loi limite.

Les distances obtenues sont inférieures à $\frac{\pi}{2}$ ce qui est conforme aux observations, et les diamètres apparents vont toujours décroissant. Ainsi nous observons l'hypercarte dissymétrique :

Sans déformation, pas de décalage spectral (v. § 8).

12 a — Densité apparente

Si le champ géométrique était seul, les relations (11) et (29) donneraient pour le décalage en fonction de la densité (ρ) et en supposant $\rho_0 = 1$

$$(29a) \qquad 1 + \frac{d\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \qquad 0 < \rho < 1$$

(ρ) est alors, sans dimension, un simple coefficient de déformation de l'espace. Il joue le même rôle que le coefficient (γ) du ds^2 de SCHWARZSCHILD (voir ci après § 13). Mais

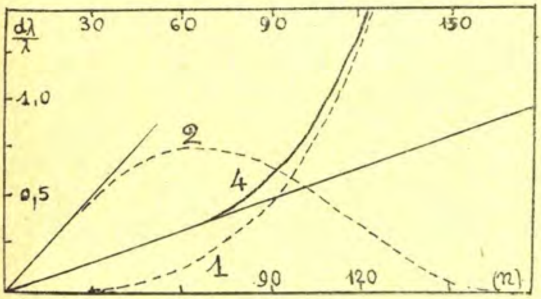

Fig. 4 — Le décalage en fonction de la distance
1 — Champ géométrique seul
2 — Champ matériel seul
4 — La courbe composée (fonction 31) avec $\alpha = 1/4$

l'observation ayant conduit à écarter la relation (29) pour adopter (31), l'intuition invite à poser

$$\frac{n}{\sin n} + \frac{1}{4}\,\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}}$$

(ρ_1) serait alors la densité apparente sous l'action combinée des deux champs Géométrique et Matériel (Courbe GM de la Fig. $3a$).

Si les observations (dénombrement de galaxies par HUBBLE et ses successeurs) parviennent à atteindre la densité apparente (ρ_1) en profondeur, la mise en graphique de (ρ_1) en fonction de la distance polaire doit faire apparaitre la courbe GM tournant sa concavité vers le haut. (Voir ci après § 19).

12 b — Vitesse de la Lumière (Voir ci après § 13)

La vitesse radiale de la Lumière, sous l'action du champ géométrique centrifuge seul, est donnée par (49)

$$(49) \qquad c = c_0 \frac{\sin n}{n}$$

ou, tenant compte de (11), $c = c_0 \sqrt{\rho}$.

En l'écrivant sous la forme $c_1 = c_0 \sqrt{\rho_1}$ elle tient compte des deux champs et la relation ($31\,a$) peut s'écrire ($31\,b$)

$$(31b) \qquad \boxed{1 + \frac{d\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} = \frac{c_0}{c_1}}$$

Cette relation reflète exactement le sentiment de l'un des astrophysiciens les plus féconds et les plus originaux de notre époque le Dr. ZWICKY qui écrit:

«—Le déplacement universel vers le rouge est provoqué par un retard gravitationnel de la Lumière, interprétation qui d'ailleurs semble lier quantitativement le phénomène de la masse d'inertie de la matière au taux de rougissement».

RAYON ET DENSITE DE L'UNIVERS

13 — Recherchons une relation entre le rayon de l'Univers et sa densité en nous servant précisément du décalage gravitationnel interprété comme une chute libre sur le point antipode.

La sphère antipode jouant le rôle d'un centre d'attraction géométrique, tout se passe comme si la masse entière de l'Univers s'y trouvait répartie. Supposons ce champ seul. Le mouvement qui suit est donc purement virtuel.

Un point mobile P_1 abandonné sur l'hypercarte à quelque distance du centre des coordonnées, s'éloigne d'un mouvement accéléré. Il atteindra l'antipode en A_1 avec la vitesse limite (c) Fig. (6).

Un point P_2 parti de même, mais dans la direction opposée, atteint l'antipode en A_2 avec aussi la vitesse (c). P_1 et P_2 se rencontrent sur l'hypersphère ; ils se rencontrent aussi sur l'hypercarte, car, la surface limite représentant le seul point antipode, A_1 et A_2 coïncident. A_2 peut être reporté en A_1 sur l'hypercarte prolongée au delà de π (v. § 3).

Le point P_2 parait alors venir de l'«extérieur» de l'hypercarte sous l'action du champ matériel centripète. Mais alors, le problème des deux corps est applicable, et l'action de

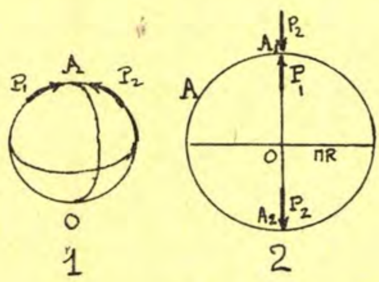

Fig. 5 — Réf. parag. 13 et 14
1 : L'hypersphère
2 : L'hypercarte

l'Univers sur P_2 la même que si toute sa masse était concentrée au point 0.

Le point P_2 tombant de l'infini sur l'hypercarte et atteignant la surface limite avec la vitesse (c), cela veut dire que πR, rayon de l'hypercarte est aussi son rayon gravitationnel.

Le théorème des forces vives donne alors :

$$(34)\quad c^2 = \frac{2\,k\,M}{\pi R} \quad \text{d'où} \quad (34\,a)\quad R_0 = \frac{2\,k}{\pi\,c^2} M$$

On peut aussi écrire le coefficient (γ) du $d\,s^2$ de SCHWARZSCHILD : Il est nul sur la surface antipode :

$$\gamma = 1 - \frac{m}{r} = 1 - \frac{2\,k\,M}{c^2\,\pi\,R} = 0$$

même résultat.

En remplaçant M par sa valêur $2\,\pi^2 R_0^3 \rho_0$ on obtient :

$$(35)\qquad R_0^2 = \frac{c^2}{4\,\pi\,k\,\rho_0}\,.$$

Les relations (34 a) et (35) expriment l'équilibre statique réalisé sur l'Univers Hypersphérique.

14 — Equilibre et stabilite de l'Univers Hypercarte

De la relation (34) on tire aisément

$$(37)\qquad \frac{k\,M^2}{\pi\,R} - \frac{1}{2} M c^2 = 0\,.$$

Exacte cette fois — c'est la relation de PASCUAL JORDAN, exprimant l'équilibre dynamique réalisé sur l'Hypercarte. Cette relation s'éclaire vivement en permutant les observateurs 0 et A : La masse de l'Univers se trouve alors répartie sur la surface antipode (0). Son potentiel par rapport par rapport à (A) est $\dfrac{k\,M}{\pi\,R}$ et son énergie pottentielle de gravitation : $\dfrac{k\,M^2}{\pi\,R}$. Tous les points matériels composant la masse M étant animés de la vitesse virtuelle (c), l'énergie cinétique totale est égale à l'énergie potentielle de gravitation qui est essentiellement négative. L'équilibre de l'Univers est donc stable : Autrement comment se serait-il formé ?

C'est aussi la vision prophétique de MACH inversant audacieusement son expérience.

15 — Deviation des raions lumineux

La déviation d'un rayon lumineux rasant la surface du Soleil a été donnée par EINSTEIN (1911-16) :

$$(38)\qquad \alpha = \frac{4\,k\,m}{c^2\,r}\,.$$

Or la relation (34 a) donne sans peine :

(39) $$2\pi = \frac{4kM}{c^2 R}.$$

Interprétation : La masse de l'Univers est telle que tout photon émis est dévié de 2π et ne peut quitter l'Univers hypersphérique qui garde toute son énergie.

16 — Masse et densite de l'Univers

La présente théorie donnant les distances polaires (n) et l'Observation — tant bien que mal — les distances linéaires D_2, on a :

$$R = \frac{D_2}{n} \text{ et par suite } M = \frac{\pi c^2}{2k} \cdot R.$$

Le densité (ρ_0) s'en suit immédiatement par la relation (35). Toute la masse de l'Univers y concourt, donc les masses obscures. Les déterminations directes de (ρ_0) donnent en général des nombres plus faibles : On pourrait hasarder : Il y aurait dans l'Univers autant de masses obscures que de masses brillantes.

17 — Vitesse de la Lumiere — *Sous l'action du champ géomètrique seul.*

Sur l'hypercarte, pour un déplacement radial du centre (0) au point $M(n)$, appliquons la relation (35) que nous écrivons :

(39 b) $$R^2 \rho = A c^2 \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{4\pi k}.$$

L'échelle radiale étant euclidienne, R reste la constante R_0.

La densité (ρ) seule varie. Nous écrirons donc :

au point (0):

$$R_0^2 \rho = A c^2$$

au point $M(n)$

$$R_0^2 \rho_0 \frac{\sin^2 n}{n^2} = A c^2$$

et par comparaison

(49) $$c = c_0 \frac{\sin n}{n}.$$

Ainsi la vitesse radiale de la Lumière va en diminuant avec la distance et s'annule sur la sphère antipode. Une intégration montre qu'elle met un temps infini pour y parvenir ; en effet :

(49) $$c = \frac{dn}{dt} = c_0 \frac{\sin n}{n}$$

on tire $t = \dfrac{1}{c_0} \displaystyle\int_0^{\to\pi} \frac{n}{\sin n} \cdot dn = \infty.$

17 — Le ciel noir

Le fond du ciel est noir parce que la surface antipode, centre de gravitation projectif, est une barrière (de potentiel) infranchissable ; rien ne peut en émaner, rien ne peut y parvenir. Enoncé dès Nov 1909 à l'Ecole Navale, en disant de la surface antipode. «C'est le mur de notre prison».

18 — Comparaison avec la Relativité

On y rencontre la relation (34 a). Tous les résultats ci-dessus s'inscrivent naturellement dans cette théorie. Et inversement, la relation (34 a) s'écrivant :

$$R c^2 = \frac{2k}{\pi} M$$

montre que si l'Univers évolue à masse constante, la vitesse de la Lumière tend vers zéro quand R augmente indéfiniment. C'est la caractéristique d'un centre de gravitation : la sphère antipode. Pareillement le rayon gravitationnel du Soleil est donné par $c^2 = \dfrac{2km}{r}$.

Mais la relation relativiste (34 a) s'écrivant $c^2 = \dfrac{2kM}{\pi R}$ la comparaison montre que πR

est le rayon gravitationnel de L'Univers sous sa forme projective de l'Hypercarte, indépendamment de la démonstration du paragraphe 13. La présente théorie est de bout en bout parallèle à la théorie de la Relativité.

18 a — Resultats numériques (Réf. § 11)

1° Cas de $\alpha = 1/4$ — En adoptant pour Virgo la distance de 55.10^6 *a/l* on trouve pour l'Univers $R = 3500.10^6$ *a/l* $M = 7.10^{55}$ cgs $\rho_0 = 0{,}97.10^{-28}$ cgs.

Une mesure directe de Neyman-Scott-Shane (1953) donne $\rho_0 = 0{,}5.10^{-28}$.

On pourrait hasarder: Il y aurait dans l'Univers autant de masses obscures que de masses brillantes.

2° Cas de $\alpha = 1/2$ — L'Univers est plus grand $R = 4900$ moins dense $\rho = 0{,}5$ — La relation décalage/distance est linéaire jusqu'au voisinage de $n = 90°$.

Ces résultats numériques sont essentiellement transitoires en raison de la difficulté et de l'imprécision des mesures de distances et surtout de densité.

a/l = année-lumière.

COMPARAISON AVEC L'OBSERVATION

19 — Densité apparent observée (§ 12 *a*)

Les dénombrements de Hubble et de ses successeurs donnent pour chaque magnitude, jusqu'à $mg = 21$ le nombre des galaxies comptées sur les clichés, en regard du nombre théorique dans un Univers euclidien.

Les chiffres avancés pour les magnitudes supérieures (22,23 ···) sont des extrapolations. (Encycl. Britan. 1960 — Art Nebula).

De ces données j'ai pu déduire la densité apparente (ρ) (Fig. 3 *a*).

Cette figure est tracée pour le *cas* $\alpha = 1/4$. En ordonnées la densité (ρ/ρ_0) allant de 0 à 1 — En abscisses euclidiennes (en bas) les distances polaires — En abcisses non euclidiennes (en haut), les magnitudes correspondantes calculées d'après les relations.

$$\log\left(c \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}\right) = 0{,}2\,m + 1{,}16$$

et la relation (31) avec $\alpha = 1/4$.

La densité observée, courbe H va en décroissant rapidement avec la distance. Ainsi

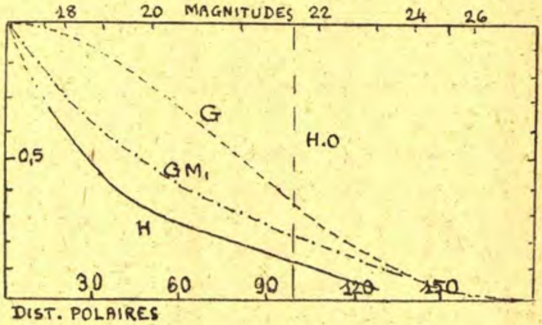

Fig. 3b — La densité
1° — En fonction de la distance polaire (en bas)
G — Sous l'action du champ géométrique seul ($\rho = \rho_0 E^{-2}$) (§ 7)
GM — Sous l'action combinée des deux champs (§ 12) $\alpha = 1/2$
2° — En fonction de la magnitude (en haut)
H La densité observée (§ 19)
HO = Horizon optique $n = 98°$

qu'il était annoncé (12 *a*) elle présente sa concavité vers le haut. Elle se situe au dessous de la courbe GM montrant ainsi l'existence de matière obscurante en proportion croissante avec la distance.

Cas de $\alpha = 1/2$ — La figure est modifiée, mais le résultat est le même. La courbe représentative $H(1/2)$ de la densité observée se situe toujours au dessous de la prédiction (courbe $GM(1/2)$).

La conclusion ne change pas: Il y a de la matière obscurante en proportion croissante avec la distance (Fig. 3 *b*).

En égard au caractère sommaire de ma documentation et de mon raisonnement, je ne puis dire la présente théorie confirmée sur ce point; mais la question se trouve posée aux astrophysiciens.

20 — Sphere equatoriale (Réf. § 9)

Les photographies montreraient aux extrêmes distances un nombre excessif de nébuleuses par rapport à la prédiction. Explication:

1º — Cas de $\alpha = 1/4$ — On voit sur la figure 3 *a* que si l'échelle des distances polaires est euclidienne, celle des magnitudes correspondantes (en haut) ne l'est pas. Et la bande comprise entre ($m\,g = 20$ $n = 70°$) et ($m\,g = 22$ $n = 111°$) représente (0,425) de la Masse de l'Univers. Cette bande est à cheval sur la sphère équatoriale au voisinage de laquelle le diamètre apparent est stationnaire, la magnitude ne variant alors que sous la seule action du décalage spectral.

2º — Cas de $\alpha = 1/2$ — L'explication précédente est renforcée: l'échelle des magnitudes n'est plus la même; et la même bande ($m\,g = 20$ $n = 51°$) ($m\,g = 22$ $n = 107°$) s'étend sur 51° contre 41° dans le cas précédent, soit (0,553) de la Masse de l'Univers (Fig. 3 *b*).

CONCLUSION

Basée sur la théorie des cartes géographiques, édifiée en marge des Cours de l'Ecole Navale, la présente théorie est simple et vérifiable. Elle a prévu la Récession des Nébuleuses, elle en rattache encore aujourd'hui la cause à une projection instinctive. Elle en explique en détail le mécanisme. Elle se prête à de nouvelles observations.

Je ne présente pas la projection de G. Postel comme une solution exacte, mais comme une approximation heureuse, éclairant les accès d'un problème difficile.

BIBLIOGRAPHIE

J. Becquerel, *Exposé élémentaire de la théorie d'Einstein* (1922) (Payot).

P. Couderc, *L'Expansion de l'Univers,* (1950), Presses Universitaires de France.

Ev. Schatzman, *Origine et Evolution des Mondes,* (1957), Albin Michel.

Nota sobre quasigrupos subtractivos

por *José Morgado*

Introdução

Numa nota recentemente publicada em *Gazeta de Matemática* ([1]), define-se *quasigrupo subtractivo* como um grupoide $<G\,,\,\cdot>$ (1) que verifica as seguintes condições:

$J1$: Existe em G um elemento i — *identidade direita* — tal que $a\,i = a$, para todo $a \in G$.

$J2$: $a\,b \cdot c = a\,c \cdot b$, quaisquer que sejam $a\,,b\,,c \in G$.

$J3$: $a \cdot b\,c = c \cdot b\,a$, quaisquer que sejam $a\,,b\,,c \in G$.

$J4$: $a\,a = i$, para todo $a \in G$.

Trata-se, na verdade, de um quasigrupo, porque cada uma das equações

$$a\,x = b \quad \text{e} \quad y\,a = b$$

(1) Um grupoide $<G\,,\,.>$ é o par constituído por um conjunto não vazio G e uma aplicação . de $G \times G$ em G. A imagem do par $(a\,,b) \in G \times G$ é representada por $a\,.\,b$ ou simplesmente $a\,b$.

Por $a\,b\,.\,c$ designamos o elemento $(a\,.\,b)\,.\,c$.

tem uma única solução ([1], Proposição 4).

É fácil verificar que os axiomas $J1 - J4$ não são independentes.

Assim, o axioma $J2$ é consequência dos axiomas $J3$ e $J1$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} i \cdot b\mathrm{c} &= \mathrm{c} \cdot b i, && \text{por } J3, \\ &= \mathrm{c} b && \text{, por } J1, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $b, c \in G$, tendo-se, por consequência,

$$a b \cdot c = i(c \cdot a b) = i(b \cdot a c) = a c \cdot b,$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.

Neste artigo, formulamos vários sistemas de axiomas independentes para quasigrupos subtractivos e mostramos que todo quasigrupo subtractivo está naturalmente associado a um grupo abeliano. Finalmente, damos uma axiomática para grupos em termos de uma das operações inversas da operação de produto.

1. Sistemas de axiomas para quasigrupos subtractivos

Teorema 1. *Se* $< \mathrm{G}, \cdot >$ *é um grupoide, então os seguintes sistemas de condições são equivalentes:*

Sistema A:

$A1$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bb} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$A2$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{ba}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema B:

$B1$: $\mathrm{b} \cdot \mathrm{ba} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$B2$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{ba}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema C:

$C1$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bb} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$C2$: $\mathrm{cb} \cdot \mathrm{ca} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema D:

$D1$: $\mathrm{b} \cdot \mathrm{ba} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$D2$: $\mathrm{cb} \cdot \mathrm{ca} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema E:

$E1$: $\mathrm{b} \cdot \mathrm{ba} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$E2$: $\mathrm{ac} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Dem. Para estabelecer a equivalência destes sistemas de axiomas, basta mostrar que têm lugar as seguintes implicações:

1) $A \Rightarrow B$.

Como $B2 = A2$, é suficiente mostrar que $A \Rightarrow B1$. Ora

$$\begin{aligned} b \cdot b a &= a \cdot b b, && \text{por } A2, \\ &= a && \text{, por } A1. \end{aligned}$$

2) $B \Rightarrow C$.

Tem-se

$$\begin{aligned} a \cdot b b &= b \cdot b a, && \text{por } B2, \\ &= a && \text{, por } B1, \end{aligned}$$

o que prova $C1$.

Tem-se também

$$\begin{aligned} c b \cdot c a &= a(c \cdot c b), && \text{por } B2, \\ &= a b && \text{, por } B1, \end{aligned}$$

o que prova $C2$.

3) $C \Rightarrow D$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} b \cdot b a &= (b \cdot b b)(b a), && \text{por } C1, \\ &= a \cdot b b && \text{, por } C2, \\ &= a && \text{, por } C1, \end{aligned}$$

donde se conclui $D1$ e, portanto, D, visto ser $D2 = C2$.

4) $D \Rightarrow E$.

Basta evidentemente provar que $ac \cdot bc = ab$. Ora

$$\begin{aligned} ac \cdot bc &= b(b \cdot ac) \cdot bc, && \text{por } D1, \\ &= c(b \cdot ac) && \text{, por } D2, \\ &= c(a(ab) \cdot ac), && \text{por } D1, \\ &= c(c \cdot ab) && \text{, por } D2, \\ &= ab && \text{, por } D1, \end{aligned}$$

como pretendíamos.

5) $E \Rightarrow A$.

Tem-se, com efeito,

$$\begin{aligned} a \cdot bb &= (b \cdot ba)(bb) && \text{, por } E1, \\ &= (b \cdot ba)(ba \cdot ba), && \text{por } E2, \\ &= b \cdot ba && \text{, por } E2, \\ &= a && \text{, por } E1, \end{aligned}$$

o que prova $A1$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} a \cdot bc &= (c \cdot ca)(bc) && \text{, por } E1, \\ &= (c \cdot ca)(ba \cdot ca), && \text{por } E2, \\ &= c \cdot ba && \text{, por } E1, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

TEOREMA 2. *Se* $<\mathrm{G}, \cdot>$ *é um grupoide, então* $<\mathrm{G}, \cdot>$ *é um quasigrupo subtractivo, se e só se tem lugar algum dos sistemas de axiomas* A, B, C, D, E.

Dem. Em virtude do teorema 1 e da observação feita na introdução, basta provar que os sistemas de axiomas A e $J = \{J1, J3, J4\}$ são equivalentes.

1) $A \Rightarrow J$.

É claro que é suficiente mostrar que $A \Rightarrow \{J1, J4\}$.

Ora, pondo $bb = i$, de $A1$ resulta $ai = a$ para todo $a \in G$, o que prova $J1$.

Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} aa &= a(a \cdot bb), && \text{por } A1 \\ &= bb \cdot aa && \text{, por } A2 \\ &= bb && \text{, por } A1, \end{aligned}$$

quer dizer, $aa = i$ para todo $a \in G$, o que prova $J4$.

2) $J \Rightarrow A$.

Basta evidentemente mostrar que $J \Rightarrow A1$; o que é imediato, porque

$$\begin{aligned} a \cdot bb &= ai, && \text{por } J4, \\ &= a, && \text{por } J1. \end{aligned}$$

2. Independência dos sistemas A, B, C, D, E.

Vamos agora mostrar que *os axiomas de cada um dos sistemas apresentados são independentes.* Para isso, consideremos os três grupoides $<G, \cdot>$, $<H, \cdot>$ e $<K, \cdot>$, onde $G = H = K = \{a, b\}$ e as operações são respectivamente definidas pelas tabelas seguintes:

G	a	b
a	a	a
b	b	a

H	a	b
a	b	b
b	b	b

K	a	b
a	b	a
b	b	a

É imediato que $<G, \cdot>$ verifica $A1$, mas não verifica $A2$, porque

$$b = ba = b \cdot aa \neq a \cdot ab = aa = a.$$

Vê-se também que o grupoide $<H, \cdot>$ verifica $A2$, mas não verifica $A1$, porque

$$b = a \cdot bb \neq a .$$

Por consequência, os axiomas $A1$ e $A2$ são independentes.

Anàlogamente se vê que os axiomas $B1$ e $B2$ são independentes; assim $<H, \cdot>$ verifica $B2$ e não $B1$ e $<K, \cdot>$ verifica $B1$ e não $B2$.

Utilizando os grupoides $<G, \cdot>$ e $<H, \cdot>$, estabelece-se fàcilmente a independência dos axiomas $C1$ e $C2$ e, utilizando os grupoides $<H, \cdot>$ e $<K, \cdot>$ estabelece-se a independência dos axiomas $D1$ e $D2$ e ainda a independência dos axiomas $E1$ e $E2$.

3. Quasigrupos que verificam a condição $ac \cdot bc = ab$

Comparando o sistema de axiomas E com os sistemas C e D, somos naturalmente levados a considerar um outro sistema de axiomas, a saber:

Sistema F:

$F1$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bb} = \mathrm{a}$,
quaisquer que sejam $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$F2$: $\mathrm{ac} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{ab}$,
quaisquer que sejam $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

É interessante, no entanto, observar que *o sistema* F *não é equivalente aos sistemas anteriores.*

Na verdade, vejamos que A *implica* F *mas* F *não implica* A.

Que A implica F resulta imediatamente de

$$\begin{aligned} ac \cdot bc &= c(b \cdot ac), && \text{por } A2, \\ &= c(c \cdot ab), && \text{por } A2, \\ &= ab \cdot cc, && \text{por } A2, \\ &= ab, && \text{por } A1. \end{aligned}$$

Para concluirmos que F não implica A, consideremos um grupo *não abeliano* $<G, \odot>$ e definamos em G a seguinte operação $\cdot$:

$$a \cdot b = a \odot b^{-1}, \text{ quaisquer que sejam } a, b \; G.$$

É imediato que $<G, \cdot>$ é um quasigrupo. Tem-se evidentemente

$$F1: \quad a \cdot bb = a \odot (b \odot b^{-1})^{-1} = a;$$

$$F2: \quad ac \cdot bc = (a \odot c^{-1}) \odot (b \odot c^{-1})^{-1} = \\ = a \odot b^{-1} = ab .$$

No entanto, $<G, \cdot>$ não verifica o sistema A; com efeito,

$$a \cdot bc = a \odot (b \odot c^{-1})^{-1} = a \odot (c \odot b^{-1}),$$

enquanto que

$$c \cdot ba = c \odot (a \odot b^{-1})$$

e, como $<G, \odot>$ é não abeliano, os elementos $a \cdot bc$ e $c \cdot ba$ não são necessàriamente iguais.

Teorema 3. *Seja* $<\mathrm{G}, \cdot>$ *um grupoide que satisfaz às seguintes condições:*

(a) *A equação* $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$ *tem pelo menos uma solução, quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

(b) $\mathrm{ac} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Então $<\mathrm{G}, \cdot>$ *é um quasigrupo com identidade direita e, se definirmos em* G *a operação* $\odot$ *pela condição*

$$\mathrm{a} \odot \mathrm{b} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{ib},$$

onde i *é a identidade direita, então o grupoide* $<\mathrm{G}, \odot>$ *é um grupo.*

Dem. Seja x uma solução qualquer da equação $ax = b$. Então, da condição (b) resulta que

$$bb = ax \cdot ax = aa .$$

Isto significa que o elemento

$$i = a\,a$$

é independente de a.

Então, em virtude de ser $i = x\,x$ e de ser válida a condição (b),

$$b\,i = a\,x \cdot i = a\,x \cdot x\,x = a\,x = b\,,$$

quer dizer, i é uma identidade direita.

Como

$$i \cdot a\,b = b\,b \cdot a\,b = b\,a\,,$$

tem-se

$$i\,b \cdot i\,a = (i \cdot a\,x)\,(i\,a) = x\,a \cdot i\,a = x\,i = x$$

e, por consequência, *a equação* $\mathrm{a\,x = b}$ *tem uma única solução*, a saber, $x = i\,b \cdot i\,a$.

Daqui resulta, em particular, que existe uma única identidade direita.

Consideremos agora a equação $y\,a = b$. Se existe alguma solução para esta equação, então, como

$$i\,b = i \cdot y\,a = a\,y\,,$$

tem-se

$$y = i\,(i\,b) \cdot i\,a = b\,i \cdot i\,a = b \cdot i\,a\,,$$

quer dizer, se a equação $y\,a = b$ é solúvel, então tem sòmente uma solução.

Mas o elemento $b \cdot i\,a$ é solução, visto que

$$(b \cdot i\,a)\,a = (b \cdot i\,a)\,(i \cdot i\,a) = b\,i = b\,,$$

donde se conclui que *a equação* $\mathrm{y\,a = b}$ *tem uma única solução, quaisquer que sejam* $\mathrm{a\,,b \in G}$.

Por consequência, *o grupoide* $<\mathrm{G}\,,\cdot>$ *é um quasigrupo com identidade direita* i.

É fácil ver que i é também identidade direita do grupoide $<G\,,\odot>$.

Na verdade,

$$a \odot i = a \cdot i\,i = a\,i = a$$

para todo $a \in G$.

Como

$$a \odot (i\,a) = a \cdot i\,(i\,a) = a\,a = i\,,$$

vemos que em $<G\,,\odot>$ cada elemento a tem inverso direito, a saber, o elemento $i\,a$.

Para concluirmos que $<G\,,\odot>$ é um grupo, vejamos finalmente que a operação $\odot$ é associativa.

Tem-se

$$(a \odot b) \odot c = (a \cdot i\,b) \cdot i\,c = (a \cdot i\,b)\,(x \cdot i\,b) = a\,x\,,$$

onde x é a solução da equação

$$x \cdot i\,b = i\,c$$

ou seja, da equação

$$i\,b \cdot x = c\,.$$

Por outro lado,

$$a \odot (b \odot c) = a \cdot i\,(b \cdot i\,c) = a\,(i\,c \cdot b) = a\,x\,,$$

porque

$$i\,c \cdot b = i\,(i\,b \cdot x) \cdot b = (x \cdot i\,b)\,(i \cdot i\,b) = x\,i = x\,,$$

o que completa a demonstração do teorema.

Suponhamos que $<G\,,\cdot>$ é um quasigrupo subtractivo. Então

$$a \odot b = a \cdot i\,b = b \cdot i\,a = b \odot a$$

isto é, $<G\,,\odot>$ é um grupo abeliano.

A recíproca é também imediata, de modo que é válido o seguinte

TEOREMA 4. *Sob as hipóteses do teorema 3, o grupoide* $<\mathrm{G}\,,\cdot>$ *é um quasigrupo subtractivo, se e só se o grupo* $<\mathrm{G}\,,\odot>$ *é abeliano.*

4. Uma definição de grupo.

Em [2], p. 6, é dada uma definição de grupo, em termos de uma das operações inversas da operação de produto. Assim, um grupo é definido como um grupoide $<G\,,/>$ que satisfaz aos seguintes axiomas:

$L1$: $a/a = b/b$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$L2$: $a/(b/b) = a$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$L3$: $(a/a)/(b/c) = c/b$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;

$L4$: $(a/c)/(b/c) = a/b$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;

Em termos da operação $/$, o inverso b^{-1} do elemento b é definido por

$$b^{-1} = (b/b)/b$$

e o produto $a \odot b$ é definido por

$$a \odot b = a/b^{-1}.$$

É fácil ver que *os axiomas* L 1 — L 4 *não são independentes.*

Com efeito, $L3$ é consequência de $\{L1, L2, L4\}$, visto que

$$\begin{aligned}(a/a)/(b/c) &= (c/c)/(b/c), \text{ por } L1, \\ &= c/b \qquad , \text{ por } L4.\end{aligned}$$

O teorema 3 vai permitir-nos formular uma definição de grupo em termos da operação $/$, utilizando sòmente dois axiomas.

TEOREMA 5. *Seja* $<G, />$ *um grupoide que satisfaz às seguintes condições:*

$G1$: $a/(((b/b)/b)/((a/a)/a)) = b$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$G2$: $(a/c)/(b/c) = a/b$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.

Então, definindo em G *a operação* $\odot$ *pela igualdade*

$$a \odot b = a/((b/b)/b),$$

o grupoide $<G, \odot>$ *é um grupo.*

Dem. Com efeito, o axioma $G1$ diz-nos que a equação $a/x = b$ tem pelo menos uma solução, a saber,

$$x = ((b/b)/b)/((a/a)/a),$$

isto é, $<G, />$ satisfaz às condições (*a*) e (*b*) do teorema 3 e daí resulta que $<G, \odot>$ é um grupo.

É fácil ver directamente que *os sistemas de axiomas* $\{L1, L2, L4\}$ *e* $\{G1, G2\}$ *são equivalentes.*

Vejamos que o primeiro sistema implica $G1$. Tem-se

$$\begin{aligned}&a/(((b/b)/b)/((a/a)/a)) = \\ &= ((b/b)/((b/b)/a))/(((b/b)/b)/((a/a)/a)), \text{ por } L2, \\ &= ((b/b)/((b/b)/a))/(((b/b)/b)/((b/b)/a)), \text{ por } L1, \\ &= (b/b)/((b/b)/b) \qquad , \text{ por } L4, \\ &= b \qquad , \text{ por } L2.\end{aligned}$$

Vejamos agora que $L1$ e $L2$ são consequências do segundo sistema.

Ora, utilizando sucessivamente $G1$ e $G2$, obtém-se

$$\begin{aligned}b/b &= (a/(((b/b)/b)/((a/a)/a)))/ \\ &\quad /(a/(((b/b)/b)/((a/a)/a))) \\ &= a/a,\end{aligned}$$

quer dizer, é válida a implicação

$$\{G1, G2\} \Rightarrow L1.$$

De $G1$ resulta, pondo $b = a$,

$$a = a/(((a/a)/a)/((a/a)/a)).$$

E, por consequência, tem-se:

$$\begin{aligned}a &= a/((a/a)/(a/a)), \text{ por } G2, \\ &= a/(a/a) \qquad , \text{ por } G2, \\ &= a/(b/b)\end{aligned}$$

porque, como vimos, $L1$ é consequência de $\{G1, G2\}$ [2].

A definição de grupo abeliano, em termos da operação $/$, assume uma forma especialmente simples.

Assim, o *grupoide* $<G \odot>$ *é um grupo abeliano se, no grupoide* $<G, />$, *têm lugar os dois axiomas seguintes:*

$G'1$: $a/(a/b) = b$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

$G'2$: $(a/c)/(b/c) = a/b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

---

[2] Os axiomas $G1$ e $G2$ são independentes. Assim, o grupoide $<H, \cdot>$ do § 2 verifica $G2$ e não verifica $G1$, enquanto que o grupoide $<L, \cdot>$, onde $L = \{a, b, c\}$ e a operação $\cdot$ é definida pela tabela

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

verifica $G1$ e não verifica $G2$.

Que $<G, \odot>$ é um grupo, é consequência imediata do teorema 3, visto que a equação $a/x = b$ tem pelo menos uma solução, a saber, $x = a/b$.

Em particular, tem-se

$$a/a = b/b.$$

Então tem-se

$$\begin{aligned} a \odot b &= a/((b/b)/b), \quad \text{por definição da operação } \odot, \\ &= (b/(b/a))/((b/b)/b), \quad \text{por } G'1, \\ &= (b/(b/a))/(((b/b)/a)/(b/a)), \quad \text{por } G'2, \\ &= b/((b/b)/a), \quad \text{por } G'2, \\ &= b/((a/a)/a), \quad \text{porque } a/a = b/b, \\ &= b \odot a, \quad \text{por definição da operação } \odot, \end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar.

BIBLIOGRAFIA

[1] Jayme Machado Cardoso, *Quase grupos subtractivos*, Gazeta de Matemática, **90-91** (1963), pp. 7-10.

[2] Marshall Hall, Jr., *The Theory of Groups*, New York, 1959.

Definição de quasigrupo subtractivo por um único axioma

por **José Morgado**

Num artigo anterior (ver [1]), formulámos vários sistemas de dois axiomas independentes para quasigrupos subtractivos. Por exemplo, vimos que um grupoide $<G, \cdot>$ é um quasigrupo subtractivo, se e só se são válidas as seguintes condições:

$E1$. $b \cdot ba = a$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

$E2$. $ac \cdot bc = ab$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

Em [2], mostra-se que um sistema $<G, \cdot, '>$, constituido por um conjunto não vazio G, uma operação binária $\cdot$ e uma operação unária $'$, definidas em G, é um grupo, se e só se tem lugar a seguinte condição:

$$ab \cdot c = ad \cdot e \text{ implica } b = d \cdot ec'.$$

Este resultado sugeriu-nos o teorema seguinte, por meio do qual se pode definir quasigrupo subtractivo, utilizando sòmente um axioma.

TEOREMA. *Se* $<G, \cdot>$ *é um grupoide, então o axioma*

S: $ab \cdot c = ad \cdot e$ *implica* $b = d \cdot ce$

é equivalente ao sistema de axiomas $\{E1, E2\}$.

DEM. Vejamos que o sistema $\{E1, E2\}$ implica S.

Na verdade, suponhamos que se tem

$$(1) \qquad ab \cdot c = ad \cdot e .$$

Então, utilizando sucessivamente $E1$, $E2$ e (1), conclui-se que

$$b = a \cdot ab = (ac)(ab \cdot c) = (ac)(ad \cdot e).$$

Ora, tem-se evidentemente

$$\begin{aligned}(ac)(ad \cdot e) &= (ad \cdot cd)(ad \cdot e) \text{ por } E2,\\ &= (ad \cdot cd)((ad \cdot cd)(e \cdot cd)) \text{ por } E2,\\ &= e \cdot cd \text{ por } E1,\\ &= (d \cdot de)(cd) \text{ por } E1,\\ &= (d \cdot de)(ce \cdot de) \text{ por } E2,\\ &= d \cdot ce \text{ por } E2,\end{aligned}$$

o que prova S.

Vejamos agora que o axioma S implica $\{E1, E2\}$.

Com efeito, como $ab \cdot c = ab \cdot c$, o axioma S permite concluir que

$$(2) \qquad b = b \cdot cc,$$

quaisquer que sejam $b, c \in G$.

De (2) resulta que

$$a(bb) \cdot c = a(cc) \cdot c ,$$

donde

$$bb = cc \cdot cc = cc ,$$

quaisquer que sejam $b, c \in G$, por S e por (2).

Tem-se, por consequência,

$$ab \cdot ab = aa \cdot bb ,$$

donde, em virtude de S e de (2),

$$b = a(ab \cdot bb) = a \cdot ab ,$$

quaisquer que sejam $a, b \in G$, o que prova $E1$.

Então, utilizando $E1$, podemos escrever

$$c = b \cdot bc = (a \cdot ab) \cdot bc$$

e, por outro lado, utilizando $E1$ e (2), podemos escrever

$$c = a \cdot ac = (a \cdot ac) \cdot aa .$$

Finalmente, da igualdade

$$(a \cdot ab) \cdot bc = (a \cdot ac) \cdot aa$$

resulta, em virtude de S e (2),

$$ab = ac \cdot (bc \cdot aa) = ac \cdot bc$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in G$, o que completa a demonstração do teorema.

Em resumo, podemos definir quasigrupo subtractivo como um grupoide que verifica a condição S.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOSÉ MORGADO, *Nota sobre quasigrupos subtractivos*, Gazeta de Matemática, **92-93** (1963), pp. 11-17.

[2] MICHAEL SLATER, *A single postulate for groups*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp. 346-347.

A numeração em povos iletrados: Bochimanes de Angola e Macondes de Moçambique (1)

por M. Viegas Guerreiro

Os Bochimanes, que são gente de pequena estatura e de cor amarelo-terrosa, vivem, hoje, confinados aos plainos semi-desérticos e desérticos do Sul de Angola, Sudoeste Africano e Calaari. Ocuparam outrora toda a região do Sul de África, de onde se dizem oriundos. Seu número é diminuto: uns 60.000 indivíduos, cerca de 10.000 dos quais em Angola. São, no conceito dos Bantos vizinhos, os selvagens ou bárbaros de África, do que se poderá concluir que não há povo, por primitivo que pareça, que se não julgue com direito aos seus «bárbaros».

Os Bochimanes de Angola, que constituem objecto deste estudo, designam-se a si próprios de *!Kung*. Deambulam pelo território imenso de entre Cunene e Cuando, separados pelo rio Cubango em duas grandes facções, que se não conhecem uma à outra. Os Bantos chamam *Vakwankala* aos que ficam a Ocidente e *Vassekele* aos de Leste.

Os Macondes são povo banto há muito estabelecido no planalto do seu nome, no extremo Norte de Moçambique. Corre já mundo a fama da sua escultura e não é menos conhecida, na África Austral, a sua vigorosa personalidade.

NUMERAÇAO BOCHIMANE

Os nossos *!Kung* (1) sabem contar pelos dedos como todos os povos, iletrados ou não. Só até 10 e do modo seguinte: levam o dedo mínimo da mão esquerda aos lábios e logo os outros, sucessivamente, e o mesmo com a direita, batendo finalmente com as palmas uma na outra, de dedos estendidos e unidos. Dez é total que raramente se atinge.

À numeração mímica corresponde uma pobríssima numeração falada. Os *Vakwankala* têm estes adjectivos numerais:

ka /ne (2) — um
ka tcha — dois
ka ko — três

E poucos são os que usam *ka ko*. Os *Vassekele* empregam *!nwona* em vez de *ka ko* (3).

Postos a contar, sem o auxílio dos dedos, dizem os dois ou três primeiros numerais, parecendo que não podem conceber abstractamente números maiores; e voltam-se então aos dedos. Ouvi de *Vakwankala* seriações diversas e até no mesmo indivíduo de um momento ao outro. Não consegui que ultrapassassem com palavras o número 5, ficando alguns em 3 e 4. Exemplos:

---

(1) Este artigo veio para aqui por sugestão e pedido do meu colega e amigo Dr. José da Silva Paulo. De um seu questionário resultam algumas das reflexões expostas.

(1) ! é sinal que representa um clique palatal, ruído a modo de estalo, típico da língua bochimane.

(2) /, outro sinal de clique, este dental.

(3) D. F. Bleek, «Bushmen of Central Angola», in *Bantu Studies*, vol. III, n.º 2, Julho de 1928, p. 110.

a) *ka / ne* — um
ka tcha — dois
ka ko — três
ka tcha ka tcha — quatro (dois e dois)
ka tcha ka tcha ka / ne — cinco (dois e dois e um)

b) *ka / ne* – um
ka tcha — dois
ka tcha ka / ne — três (dois e um)
ka tcha ka / ne ka / ne — quatro (dois e um e um)
ka tcha ka / ne ka / ne ka / ne — cinco (dois e um e um e um)

c) *ka / ne* — um
ka / ne ka / ne — dois (um e um)
ka / ne ka / ne ka / ne — três (um e um e um)

e assim por diante até cinco.

Estermann encontrou para cinco a série: *!ka tcha !ka tcha tchi ta !kan / e* (dois e dois e um) (1).

Note-se que as séries *a*) e *b*) nos põem em contacto com um rudimentar sistema binário de numeração (2). Este modo de contar figura entre os mais primitivos que ainda hoje se praticam. Usam-no certas tribos da Austrália, Nova Guiné e América do Sul.

(1) *Etnografia do Sudoeste de Angola,* Lisboa, Junta de Investigação do Ultramar, 1956, vol. I, p. 33.

(2) Os estudiosos que se têm ocupado dos Bochimanes do Sudoeste Africano e do Calaari depararam com análoga maneira de contar. Os Naron e Auen do Calaari, estudados por Miss Bleek, associam, no entanto, a este sistema binário um outro próximo do quinário: o número quatro é expresso pelas palavras «dois dedos e dois dedos» e cinco por «mão», embora igualmente se use «dois e dois e um»; dez por «as duas mãos» e 15 por «as duas mãos e um pé». Repare-se em que a contagem sobe, neste caso, a 15 (Vid. I. Schapera, *The Khoisan Peoples of South Africa.* Londres, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1955, p. 220).

As mulheres não contam de maneira nenhuma. Se se lhes pede isso, admiram-se, sorriem e dizem que não sabem. Uma mal pronunciou *ka / ne* e mais nada.

Não nos há-de, porém, surpreender a penúria desta aritmética. Povos de vida material tão simples pouco ou nada têm para contar. Nem os filhos se contam. Por mais de uma vez perguntei pelo número deles. Era uma aflição, não davam com a palavra exacta. E sempre assim: até dois tudo ia bem, depois tropeços sobre tropeços e respostas frequentemente erradas.

Não possuem, também, qualquer processo de numeração escrita.

NUMERAÇÃO MACONDE

Quando se pede a um maconde que conte, logo utiliza os dedos das mãos. Com o indicador da mão direita e os outros dedos recolhidos baixa o mínimo da mão esquerda até à palma da mão e em seguida o anelar, médio e indicador, indo o polegar acomodar-se sob o indicador, ficando o punho fechado. E vai dizendo:

1 — *imo*
2 — *mbili*
3 — *nnatu*
4 — *ncheche*
5 — *mwanu*

É, depois, o indicador da mão esquerda que faz baixar do mesmo modo cada um dos dedos da mão direita, e, contado o polegar, bate com os punhos um no outro ou com os dedos uns nos outros, a mão quase fechada, pronunciando o número 10:

6 — *mwanu na imo*
7 — » » *mbili*
8 — » » *nnatu*

Fig. 1 — Homem maconde, contando.

9 — » » *ncheche*
10 — *kumi.*

Se quer prosseguir, torna a contar do mesmo modo até 10, e, ao bater com os punhos um no outro, diz:

20 — *makumi mavili.*

E assim por diante até 100:

30 —	*makumi*	*matatu*	
40 —	»	*ncheche*	
50 —	»	*mwanu*	
60 —	»	*mwanu na limo*	
70 —	»	»	» *mavili*
80 —	»	»	» *matatu*
90 —	»	»	» *ncheche*
100 —	»	*kumi* (1).	

(1) Usa-se muito em vez desta expressão o vocábulo *swahili imia.*

Note-se que, com seis palavras apenas, se conta até 100. Usa-se um sistema quinário combinado com outro decimal.

Mwanu na imo — cinco e um
Mwanu na mbili — cinco e dois etc...

Kumi — dez, tem o plural *makumi* e *mbili* — dois, *mavili.* Vinte diz-se *makumi mavili* — dois dez, e trinta *makumi matatu* — três dez, sendo *matatu* o plural de *nnatu;* e assim por diante.

Não se dizem números separados dos nomes dos objectos. À pergunta de

— *Vapitile vanembo dachi?*
(Quantos elefantes passaram?)

respondem com o punho fechado, por exemplo:

— *Vandipita vanembo mwanu*
(Passaram cinco elefantes)

e não «Passaram cinco». Se tiverem de res-

Fig. 2 — Termo da contagem.

ponder 10, acompanharão as palavras do batimento de ambos os punhos. E isto tanto de dia como de noite, ainda que os punhos se não vejam. Somam-se aqui dois símbolos do concreto: nomes e dedos.

A abstracção máxima de que são capazes, neste domínio, é a que está contida na generalidade do vocábulo *vinu* — coisas:

— *Vinu dachi?* (Quantas coisas?)

— *Vinu mwanu.* (Cinco coisas).

Não pude achar qualquer relação de sentido entre os nomes dos números e pessoas ou coisas. Em lugar de *mwanu* — cinco, empregam, às vezes, *nkono umo* — uma mão, mas é, segundo afirmam, expressão recente e usada exclusivamente para copos de cerveja: «*Ngupimila nkono umo*», Dá-me uma mão (cinco copos de cerveja).

Não têm numeração escrita. O que fazem é riscos no chão para representar as dezenas; o do número 10 fica mais comprido. O processo é principalmente usado na marcação de pontos, nos jogos.

Para contar números maiores costumam dar nós num cordel de 10 em 10 unidades. É assim que os presos somam os dias de reclusão, afirma-se. Se trazem coisas para troca e as contaram deste modo em casa, vão desatando os nós à medida que as entregam.

Também juntam um a um, em grupos de 10, os objectos que querem trocar (batata doce, bananas, papaias, laranjas, peixes). E, se não estes, pedrinhas que os representem.

Em outro tempo utilizavam igualmente os dedos dos pés. Acabados os das mãos, descia o indicador da direita ao dedo grande do pé direito e passando pelos outros e para o outro pé completavam a segunda dezena fechando o número com as palavras:

20 — *kumi na ku madodo*
(dez e os dos pés).

Um homem vulgar sabe contar até 100 e muitas mulheres só até 10. Para além deste número hesitam e, sorrindo, com um sacudido encolher do ombro esquerdo exclamam: *Hi! Namanya!* (Não sei). Algumas encontrei, porém, a contar com desembaraço como os homens. Uma mulher de idade levou os nú-

Fig. 3 — Mulher maconde, contando.

meros até 100, acrescentando que aprendera isso no tempo em que ia vender borracha aos Brancos.

A influência do *kiswahili* é, hoje, todavia, muito grande e uma parte dos homens usa-o para contar as centenas e os grandes números.

É escusado dizer que foi o comércio com os Brancos e os trabalhos remunerados que, principalmente, puseram os Macondes na necessidade de ampliar a sua aritmética.

Deuxième Symposium sur l'harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les Universités d'Europe

Participants:

Allemagne — H. Behnke (Münster), organisateur du Symposium, F. L. Bauer (Mainz), W. Haack (Berlin), F. Sommer (Würsburg)
Autriche — L. Schmetterer (Wien)
Belgique — L. Bouckaert (Louvain), P. Gillis (Bruxelles)
Danemark — T. Busk (Aarhus)
France — H. Cartan (Paris), P. Germain (Paris), A. Lichnerowicz (Paris)
Italie — L. Amerio (Milano), E. Bompiani (Roma), C. Cattaneo (Roma)
Pays-Bas — N. H. Kuiper (Wageningen), R. Timman (Delft)
Suede — Å. Pleijel (Lund), C. E. Fröberg (Lund)
Suisse — G. de Rham (Lausanne), H. Stienel (Zürich)

Cette réunion avait pour but d'étudier la possibilité d'étendre aux «mathématiques appliquées» les projets d'harmonisation de l'enseignement des mathématiques établis à Paris, lors d'un premier colloque (3-5 octobre 1960). Ont participé aux deux colloques MM. Bouckaert, Cartan, Germain, Bompiani, Cattaneo, Kuiper, Pleijel et De Rham.

Les deux réunions ont été organisées sur l'initiative de l'Association Européenne des Enseignants. Celle de Paris avait été réalisée avec l'aide du Ministère français de l'Education Nationale (Direction de la Coopération avec la Communauté et l'Etranger); celle de Düsseldorf, l'a été grâce à l'aide du Gouvernement du Land Nordrhein-Westfalen.

Le but commun des deux réunions (celle de Paris et celle de Düsseldorf) était d'établir des projets d'harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les Universités et Ecoles Supérieures d'Europe, afin de faciliter ultérieurement la solution du problème de l'équivalence des diplômes universitaires, et de rendre possible dès maintenant les *échanges d'étudiants pendant le cours de leurs études fondamentales,* ce qui est pratiquement impossible aujourd'hui. Ainsi pourrait se créer peu à peu une véritable communauté européenne des étudiants.

1. Déroulement des travaux

Les séances de travail eurent lieu dans le magnifique cadre de la «Haus der Wissenschaften», siège de l'«Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen», mis à la disposition du Colloque par Monsieur le Secrétaire d'Etat Lee Brandt. Le Secrétaire d'Etat vint lui-même accueillir les participants à l'ouverture du congrès, et il présida un dîner offert le 23 Mars 1962 par le gouvernement du Land de Nordrhein-Westfalen.

Le Professeur HEINRICH BEHNKE, qui avait pris soin de l'organisation et du fonctionnement du Colloque, prononça un discours d'introduction. Puis HENRI CARTAN, organisateur du Colloque de Paris, rappela le but de ces réunions: c'est à titre privé que se trouvent réunis ici des mathématiciens venus de neuf pays d'Europe; ils ne sont mandatés par aucun organisme officiel, mais leurs travaux sont suivis avec intérêt par certains Ministères nationaux de l'Education, ainsi que par le Conseil de l'Europe et l'O.C.D.E. Ils se proposent, en toute liberté d'esprit, d'établir des projets et de faire des suggestions qu'ils s'engagent à soumettre ensuite à leurs collègues mathématiciens dans leurs pays respectifs.

H. CARTAN rappelle ensuite les conclusions auxquelles était parvenu le Colloque de Paris. Un accord s'y était fait sur un *programme de base* considéré comme souhaitable pour l'enseignement des mathématiques au niveau des Universités. Ce programme couvre le cours des études universitaires, à partir du moment où l'étudiant entre à l'Université, jusqu'au moment où, en France ou en Belgique par exemple, il termine sa «licence» (le procès-verbal des travaux du Colloque de Paris précise, pour chaque pays, la période d'études sur laquelle porte le programme de base). Bien que l'organisation des études et des examens diffère considérablement d'un pays à l'autre, il a paru possible d'établir un programme de base pour les enseignements fondamentaux, sans préjuger de la répartition des matières au cours des études, et en laissant de côté certains enseignements plus avancés ou spécialisés. La mécanique et les mathématiques appliquées sont restées en dehors de la discussion. Il a aussi été précisé que le programme de base était un programme minimum, auquel il faudrait ajouter, pour la formation des futurs mathématiciens, des matières à option que l'on n'a pas voulu préciser. Enfin, le programme de base a été conçu à *deux niveaux*, étant entendu qu'une même question peut être traitée deux fois, à des niveaux différents. Les deux niveaux correspondent en gros à ce qui, en France, s'appelle «enseignement propédeutique» et «enseignement de licence».

A la suite des échanges de vues qui ont suivi, dans chaque pays, le Colloque de Paris, le «programme de base» a été publié, et découpé en 16 rubriques (7 pour le premier niveau, 9 pour le deuxième niveau). Ce découpage est destiné à faciliter les références. On a en effet décidé, à Paris, d'instituer un *«livret européen de l'étudiant»*, qui pour le moment n'aurait aucun caractère officiel, mais serait simplement un outil d'information pour les professeurs: lorsqu'un étudiant changerait d'Université, il pourrait demander à ses professeurs de mentionner, sur son livret, les parties du programme de base dont il a une sérieuse connaissance (cette inscription sera facilitée par le découpage du programme en numéros), et éventuellement de fournir toute autre information sur les autres connaissances de l'étudiant. L'étudiant pourra alors être utilement conseillé à son arrivée dans une Université d'un autre pays. Bien entendu, le livret de l'étudiant ne saurait constituer déjà une solution au problème de l'équivalence des diplômes, mais son institution devrait contribuer à faciliter ultérieurement cette solution.

Un projet précis a été établi pour le Livret de l'Etudiant et a été soumis aux participants du Colloque de Paris. Mais il a été décidé d'attendre, pour le mettre en pratique, qu'un second colloque ait étudié la possibilité d'étendre aux «mathématiques appliquées» les projets d'harmonisation établis à Paris pour les «mathématiques pures». Tel est le but de la présente réunion de Düsseldorf.

2. Conclusions du Colloque

Il n'a pas été jugé utile de consigner en détail, dans ce procès-verbal, les discussions qui se sont déroulées pendant deux journées et demie. Il suffit d'énumérer les conclusions auxquelles on a unanimement abouti.

I — *Niveau un*

Il est décidé qu'à un *premier niveau* (qui couvre à peu près deux années d'études), *une même formation est souhaitable pour tous les futurs mathématiciens,* qu'ils se destinent aux mathématiques pures ou aux mathématiques appliquées. Cette décision de principe conduit à introduire des modifications au programme de base adopté à Paris pour le premier niveau.

Aux sept anciens numéros du programme, qui subissent quelques légers remaniements, sont adjoints trois nouveaux numéros :

n.º 8 — analyse numérique («numerische Analysis»);
n.º 9 — cinématique et cinétique (ce numéro absorbe une partie de l'ancien numéro 7);
n.º 10 — introduction au calcul des probabilités (une quinzaine de leçons de 60 minutes).

Il est entendu que les numéros 1 à 7 sont considérés comme constituant un programme de base minimum, programme qu'il est souhaitable de compléter par *deux au moins* des trois numéros 8, 9 et 10. Il est précisé que le n.º 9 est enseigné, dans certains pays, soit au titre de la physique théorique, soit au titre de la mécanique.

II — *Niveau deux (mathématiques pures)*

Rien n'est changé en ce qui concerne le programme de base minimum du deuxième niveau, *pour les mathématiques pures.* Seul l'ancien numéro 9 (algèbre linéaire) subit de légères modifications. Il est rappelé que ce programme de base peut être complété par des options, que l'on ne veut pas préciser.

III — *Niveau deux (mathématiques appliquées)*

Les participants du Colloque de Düsseldorf sont partis du principe que les Mathématiques appliquées s'orientent, en gros, dans trois grandes directions :

— Analyse numérique et machines calculatrices ;
— Probabilités et statistique ;
— Mécanique et physique mathématique.

(Par «physique mathématique» on entend l'étude mathématique des théories physiques contemporaines).

Sans chercher à proposer des programmes pour ces diverses disciplines, le Colloque a préféré proposer un *programme commun* qui semble utile en tout cas, quelle que soit l'orientation future de l'étudiant. Ce programme se situe *au niveaux deux.* Il a été admis que ce programme, qui est plus chargé que le programme de même niveau (deux) pour les mathématiques pures, est un programme *souhaitable,* et qu'on ne prétend pas l'exiger intégralement de chaque étudiant. Voici les rubriques du programme :

— Algèbre.
— Fonctions holomorphes d'une variable complexe.
— Intégrale de Lebesgue-Stieltjes.
— Espaces fonctionnels.
— Equations intégrales.
— Equations différentielles ordinaires.
— Equations aux dérivées partielles.
— Calcul des variations.
— Distributions, transformations de Fourier et de Laplace.
— Fonctions spéciales.

Le détail du programme est donné ci-dessous.

IV — *Livret européen de l'étudiant*

L'édition du livret soulève le problème des langues à utiliser. La couverture et la première page peuvent facilement être imprimées en 4 langues (allemand, anglais, français, italien), ainsi que les pages intercalaires destinées à recueillir les appréciations des professeurs. Mais il ne saurait être question d'imprimer le programme en quatre langues, car il est désirable que le format et l'épaisseur du carnet ne dépassent pas ceux d'un passeport. La majorité des participants propose que le programme soit imprimé en français ; toutefois, il semble avoir été admis qu'il y aura aussi une édition contenant la version anglaise du programme, qui sera préparée par M. TIMMAN.

Un éditeur français semble disposé à faire les frais de l'édition du Livret européen de l'Etudiant, á condition que ses droits soient préservés. Les participants se rallient à l'idée de faire prendre un copyright par l'Association Européenne des Enseignants, à charge pour cette dernière de traiter avec le ou les éditeurs du Livret.

Il est suggéré que les Instituts de Mathématiques d'une part, les Associations d'étudiants d'autre part, pourraient acheter un certain nombre d'exemplaires du Livret de l'Etudiant. Il sera prudent de ne faire qu'un tirage limité, sujet à des révisions qui pourraient s'avérer utiles.

PREMIER NIVEAU [1]

1. Notions générales d'algèbre.

Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions. Ensembles finis et analyse combinatoire.

Entiers rationnels, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble ; relations d'équivalence, relations d'ordre. Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps (se borner à des définitions et à quelques exemples, sans théorie générale).

Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes. Formule du binôme. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Enoncé du théorème de d'ALEMBERT-GAUSS. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. Géométrie analytique et géométrie différentielle classiques à 2 et 3 dimensions.

Equation des droite, plan, cercle, sphère. Problèmes d'angles et de distances dans R^2 et R^3.

Coordonnées polaires dans R^2.

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple). Génération et représentation de surfaces diverses.

Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

Etude d'une courbe plane donnée sous la forme $y=f(x)$ ou sous forme paramétrique: allure générale, étude locale en un point à distance finie ou à l'infini.

Etude locale d'une courbe de R^3 au voisinage d'un point: plan osculateur, courbure, formules de FRENÊT ; vitesse et accélération d'un mobile, accélération tangentielle et accélération normale.

(1) L'énumération des matières du programme n'implique pas un ordre pour les traiter.

3. Algèbre linéaire (niveau 1).

Définition des espaces vectoriels; sous-espaces vectoriels, produits d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels. Indépendance linéaire; bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications linéaires; somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéaires, équations linéaires.

Formes multilinéaires; déterminants.

Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme; équation caractéristique. Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes, et à la forme triangulaire dans le cas général.

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques; formes hermitiennes.

Espaces affines; parallélisme, vecteurs libres, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur R: norme, distance, produit scalaire et normes associées: inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Bases orthonormales dans R^n.

Groupe des déplacements, groupe des rotations autour d'un point, angle de deux vecteurs, orientation de R^n; produit vectoriel dans R^3.

4. Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire.

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensembles de nombres réels: majorants, minorants. Borne supérieure et borne inférieure. Intervalles. Suites bornées, suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de CAUCHY; théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

Fonctions d'une variable réelle: limites, continuité. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues numériques sur un intervalle (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme).

Fonctions monotones; existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.

Théorème de ROLLE; théorème des accroissements finis. Formule de TAYLOR. Maxima et minima des fonctions numériques d'une variable réelle.

Fonctions trigonométriques directes et réciproques d'une variable réelle. Fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Comparaison des croissances de deux fonctions. Développements limités, applications; division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de TAYLOR.

Fonctions de plusieurs variables; continuité. Fonction différentiable en un point, différentielle en ce point. Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivées d'une fonction composée. Interprétation géométrique: tangente, plan tangent. Calcul des dérivées d'une fonction implicite.

Dérivées partielles d'ordre supérieur; permutabilité. Formule de TAYLOR. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

5. Calcul intégral.

Définition et propriétés de l'intégrale définie d'une fonction intégrable au sens de RIEMANN; intégrabilité des fonctions continues, des fonctions monotones. Propriétés de la forme linéaire définie par l'intégrale. Relation entre intégrale indéfinie et fonctions primitives. Exemples de fonctions primitives. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Méthodes d'intégration. Intégration des fractions rationnelles et des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle quelconque (éventuellement infini): convergence, convergence absolue.

Définition et propriétés élémentaires de l'intégrale de RIEMANN-STIELTJES par rapport à une mesure positive sur la droite numérique.

Longueur d'une courbe paramétrée; expression de la longueur pour une paramétrisation continuement dérivable. Intégrales curvilignes.

Notions élémentaires sur les intégrales doubles et triples, et sur leur mode de calcul. *Règles du calcul différentiel extérieur, leur application aux intégrales de surface, à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, et aux transformations des intégrales multiples (Stokes).* (On ne donnera pas de démonstrations; on pourra se borner à démontrer la formule de RIEMANN, dans le plan, pour un contour simple). Cas particuliers: gradient, divergence, rotationnel.

6. Séries.

Séries à termes réels ou complexes; convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs: comparaison, critères classiques de convergence. Séries à termes positifs décroissants: comparaison avec une intégrale.

Séries absolument convergentes. Séries non absolument convergentes, séries alternées.

Suites et séries de fonctions; convergence simple, convergence uniforme. Continuité, dérivation et intégration des suites et séries dans le cas de la convergence uniforme.

Développements en série de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^a$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$.

Théorie élémentaire des séries entières d'une variable, réelle ou complexe. Cercle de convergence. Dérivation; intégration dans le domaine réel. Définitions et propriétés de e^z, $\sin z$ et $\cos z$ pour z complexe.

Notions élémentaires sur les séries de FOURIER: calcul des coefficients.

7. Equations différentielles.

Notions fondamentales sur les équations différentielles; trajectoires d'un champ de vecteurs, problèmes de valeurs initiales, problèmes aux limites. Illustration de ces problèmes par des équations intégrables par quadrature; équations linéaires à coefficients constants.

Théorème de superposition linéaire pour les solutions des équations ou des systèmes d'équations linéaires à coefficients variables, avec ou sans second membre.

8. Analyse numérique.

Systèmes d'équations linéaires; méthode d'élimination et méthode d'approximations sucessives. Optimation linéaire; approximation au sens de TCHEBYCHEFF et au sens de GAUSS. Algorithmes simples pour le calcul des valeurs propres.

Polynômes et algorithmes de division, comme exemples simples d'algorithmes. Majoration et calcul de racines, méthode d'approximation de NEWTON, interpolation par les polynômes; fractions continues.

Procédés d'intégration numérique. Equations différentielles ordinaires: méthodes d'itération, méthode de RUNGE-KUTTA pour des valeurs initiales. Méthode des différences pour des problèmes aux limites.

Travaux pratiques sur des machines.

9. Cinématique et cinétique.

Equivalence des systèmes de vecteurs: torseurs.

Cinématique:

Définition d'un mouvement par rapport à un repère. Compléments de cinématique du point. Exemples simples de détermination de mouvements à partir de l'accélération et des conditions initiales (mouvements à accélération centrale).

Champ des vitesses d'un solide. Changement de repère: composition des vitesses et des accélérations.

Cinétique:

Masse d'un système. Conservation de la masse. Centre d'inertie. Torseur des quantités de mouvement. Torseur des quantités d'accélération. Energie cinétique. Cas du solide. Torseur d'inertie. Exemples simples de mouvements de solides.

10. Introduction au calcul des probabilités.

Axiomes du calcul des probabilités.

Quelques lois de probabilité à une dimension: loi binomiale, loi de POISSON, loi de LAPLACE-GAUSS.

Espérance mathématique d'une fonction; fonction génératrice des moments. Valeurs typiques.

Lois de probabilité à deux dimensions. Méthode des moindres carrés, corrélation, régression.

DEUXIEME NIVEAU
(Mathématiques pures)

11. Algèbre des ensembles et algèbre (niveau 2).

Notions élémentaires sur le calcul logique.

Opérations sur les ensembles; notations. Produit d'ensembles.

Applications d'un ensemble dans un autre; image directe, image réciproque, formules.

Relations binaires: relation d'ordre, relation d'équivalence.

Notions sur les cardinaux; puissance du dénombrable, puissance du continu.

Axiome du choix; théorème de ZORN (sans démonstration).

Lois de composition; propriétés (associativité, etc.).

Groupes; sous-groupes, groupes-quotients; théorème d'homomorphisme. Exemples: Z/nZ, R/Z. Plongement d'un ensemble muni d'une loi commutative et associative, régulière, dans un groupe; exemples. Produit de groupes, produit direct de sous-groupes.

Groupe symétrique: signature d'une permutation.

Groupes de transformations; transitivité, transitivité simple; trajectoires: exemples. Exercice possible: théorème de SYLOW.

Anneaux et algèbres; idéaux; anneau-quotient. Exemples (quaternions).

Algèbre des polynômes à une ou plusieurs variables.

Corps. règles de calcul. Caractéristique d'un corps; exemples.

12. Algèbre linéaire (niveau 2).

Révision de l'algèbre linéaire (niveau 1).

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie; application aux équations linéaires.

Elements d'algèbre extérieure.

Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes; orthogonalité. Formes quadratiques et hermitiennes; réduction à une somme de carrés; loi d'inertie. Groupe orthogonal, groupe unitaire, opérateurs hermitiens.

13. Topologie générale.

Topologie de R, de R^n; théorème de Borel-Lebesgue.

Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts ou par les fermés); exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produits d'espaces topologiques.

Espaces compacts; théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes; image d'un espace connexe par une application continue.

Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.

Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion). Méthodes des approximations sucessives.

Familles sommables dans un espace normé complet; convergence normale.

14. Espaces fonctionels.

Distance de la convergence uniforme sur l'espace des applications dans un espace métrique; cas où ce dernier est complet; cas des applications continues.

Espaces vectoriels normés; espaces de Banach. Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Stone-Weierstrass, ou tout au moins théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Espaces préhilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet (avec l'intégrale de Lebesgue). Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet, et plus généralement sur un convexe complet; la projection est une application contractante. Espaces préhilbertiens à base dénombrable; orthogonalisation de Schmidt. Applications: suites de polynômes spéciaux, séries de Fourier.

15. Intégration (niveau 2).

Intégrale (Riemann ou Lebesgue, de préférence Lebesgue) de fonctions numériques définies dans R^n. Théorème de Lebesgue-Fubini (intégrations sucessives). Changement de variables. Application: calcul de volumes.

Séries et intégrales dépendant de paramètres: continuité, dérivation, intégration. Nombreux exercices comportant des contre-exemples.

16. Calcul différentiel.

Différentielle (du premier ordre) d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé dans un autre. Propriétés; calcul.

Théorème des fonctions implicites pour les fonctions continûment différentiables.

Formes différentielles; calcul différentiel extérieur. Formule de Stokes dans des cas simples. Primitives locales d'une forme différentielle fermée de degré un.

Systèmes différentiels: existence et unicité locales dans le cas lipschitzien. Variation de la solution en fonction des données. Cas d'un système différentiel linéaire.

Intégrales premières d'un système différentiel: résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

Eléments de calcul des variations.

17. Fonctions analytiques d'une variable complexe.

Séries entières formelles, séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent. Théorème du maximum. Résidus.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact; critère de compacité (familles normales).

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

Systèmes différentiels holomorphes: méthodes des majorantes.

Représentation conforme. Notions sur les surfaces de Riemann; exemples.

18. Géométrie différentielle des courbes et des surfaces de R^3.

Notamment: les deux formes fondamentales d'une surface. Méthode du repère mobile: courbure normale, courbure géodésique, torsion géodésique d'une courbe tracée sur une surface. Géodésiques d'une surface. Courbure totale d'une surface, et peut-être formule de Gauss-Bonnet.

19. Bloc élémentaire.

Théorie des entiers naturels; opérations; divisibilité, nombres premiers, théorème d'unique factorisation. Corps des entiers modulo p (p premier).

Corps des rationnels. Corps des réels: caractérisation axiomatique et existence. Corps des complexes.

Existence des représentations continues du groupe additif R sur le groupe multiplicatif des nombres complexes dont la valeur absolue est égale à 1.

Géométrie de R^2 ou de R^3 muni du produit scalaire canonique: déplacements, angles, orientation. Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes.

Axiomatisation de la géométrie euclidienne: notions succintes.

DEUXIEME NIVEAU
(Mathématiques appliquées)

20. Compléments d'algèbre.

Groupes: sous-groupes, groupes-quotients, théorème d'homomorphisme. Exemples.

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et valeurs propres (révision).

Produit tensoriel d'espaces vectoriels; algèbre tensorielle, contraction.

Formes quadratiques et hermitiennes: loi d'inertie; réduction simultanée de deux formes dont l'une est définie positive.

Groupe orthogonal, groupe unitaire.

21. Fonctions analytiques d'une variable complexe.

Séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent. Théorème du maximum. Résidus.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Exemples de surfaces de Riemann. Représentation conforme.

22. Compléments de calcul intégral.

Intégrale de Lebesgue-Stieltjes dans R^n pour les fonctions numériques: énoncé (sans démonstration) des théorèmes fondamentaux.

23. Espaces fonctionnels.

Espaces métriques; limite, continuité. Espaces métriques complets.

Espaces vectoriels normés; espaces de Banach. Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de WEIERSTRASS (approximation par les polynomes).

Approximations successives pour une application strictement contractante. Application aux fonctions définies par des équations fonctions implicites).

Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet.

24. Equations intégrales.

Equation de VOLTERRA.

Equation de FREDHOLM: cas d'un noyau continu, cas qui s'y ramènent. Cas d'un noyau hermitien.

Développement en série de fonctions orthogonales.

25. Equations différentielles ordinaires.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique complexe. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires.

Théorème de FUCHS pour une équation linéaire du second ordre.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas réel. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires dans le domaine réel.

Etude, sur quelques exemples, des solutions d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier (col, noeud, foyer).

Problèmes aux limites du type STURM-LIOUVILLE.

26. Equations aux dérivées partielles.

Une équation quasi-linéaire du premier ordre: problème de CAUCHY, caractéristiques.

Définition des caractéristiques d'un système quasi-linéaire de deux équations du premier ordre à deux variables.

Equation de PFAFF complètement intégrable.

Equation du deuxième ordre: séparation des variables.

Equations du deuxième ordre à coefficients constants:

— Type elliptique: équation $\Delta\varphi=0$; théorème de la moyenne, solution élémentaire; unicité pour les problèmes de NEUMANN et de DIRICHLET; fonction de GREEN, formule de POISSON pour la sphère; intégrale d'énergie (DIRICHLET). Equation $\Delta\varphi+k^2\varphi=0$: la condition de radiation; réduction à une équation intégrale.

— Type hyperbolique: équation des ondes à 1, 3 et 2 variables d'espace; solution élémentaire; problème aux limites; formules de POISSON et de KIRCHOFF. Méthode de descente. Intégrale d'énergie.

— Type parabolique: équation de la chaleur à une variable d'espace; solution élémentaire; problème aux limites.

27. Calcul des variations.

Equations d'EULER-LAGRANGE pour les intégrales simples ou multiples.

Conditions aux limites naturelles. Multiplicateurs de LAGRANGE.

28. Distributions, transformations de Fourier et de Laplace.

Définition des distributions sur R^n. Dérivation des distributions; exemples.

Transformations de FOURIER et de LAPLACE: introduction à la théorie. Applications aux dérivées partielles.

Exemples de développements asymptotiques.

29. **Fonctions spéciales.**

1) Fonction $\Gamma(z)$. Développements asymptotiques.

2) Un choix entre les fonctions suivantes:
— fonctions de BESSEL-HANKEL-NEUMANN; expression asymptotique, expressions intégrales.
— fonctions de LEGENDRE, de LEGENDRE associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) éventuellement, un choix parmi les fonctions suivantes:
— fonctions hypergéométriques;
— polynômes de LAGUERRE;
— polynômes d'HERMITE;
— fonctions de MATHIEU;
— fonctions elliptiques.

L'Enseignement des Mathématiques dans les Lycées Danois

par ***Hans Jorgen Helms***

Le lycée danois dure trois ans et l'âge normal des élèves varie de 16 à 18 ans.

L'enseignement est presque entièrement assuré par des professeurs agrégés, et bien qu'un curriculum soit fixé par le Ministère de l'Education Nationale, les professeurs conservent une assez grande liberté dans leur enseignement journalier ainsi que dans leur sélection des manuels.

L'enseignement se termine à la troisième classe du lycée, sanctionné par un examen sous contrôle d'état (Baccalauréat). Le baccalauréat est l'examen d'admission aux universités et grandes écoles.

Pour chaque matière enseignée au lycée, le Ministère de l'Education Nationale a nommé deux inspecteurs qui rendent régulièremeut visite aux professeurs dans un but d'inspection et de consultation. Entre autres responsabilités, ils assurent la surveillance de l'instruction pédagogique des jeunes professeurs. Les inspecteurs sont choisis parmi des professeurs agrégés éminents et ils continuent à enseigner à mi-temps dans leurs propres lycées.

A partir de la nouvelle année scolaire (août 1963), la structure du lycée danois sera celle indiquée au tableau 1.

<table>
<tr><td>Première Classe</td><td colspan="3">Série Linguistique</td><td colspan="3">Série Mathématique</td></tr>
<tr><td>Deuxième Classe</td><td rowspan="2">Branche Langues Modernes</td><td rowspan="2">Branche Langues Classiques</td><td rowspan="2">Sciences Politiques</td><td rowspan="2">Sciences Politiques</td><td rowspan="2">Mathématique-Physique</td><td rowspan="2">Biologie</td></tr>
<tr><td>Troisième Classe</td></tr>
</table>

L'enseignement des mathématiques est donné dans toutes les séries et branches. Les heures des cours de mathématiques sont en série Mathématique et Branche Mathématique-Physique: Première classe, 5 heures, Deuxième classe, 6 heures, et Troisième classe, 6 heures.

Simultanément avec l'adoption de la nouvelle structure, on a révisé les curricula dans les diverses matières et le curriculum des mathématiques a subi un changement assez radical.

Les pages suivantes donnent une traduction française du curriculum fixé pour l'enseignement des mathématiques dans la Série Mathématique et la Branche Mathématique--Physique. Ce curriculum est inclus dans un arrêt publié par le Ministère de l'Education Nationale.

Le curriculum est rédigé par un petit comité composé par des mathématiciens et professeurs agrégés de mathématique, nommés par le Ministère.

Des groupes de mathématiciens et professeurs de mathématiques ont récemment publié des manuels tenant compte du nouveau curriculum. De plus, on a fait des efforts considérables pour faire adopter par les professeurs les idées modernes dans l'enseignement des mathématiques. Entre autres, on a organisé un certain nombre de cours d'été, qui ont été fréquentés par un grand nombre de professeurs sur une base volontaire.

a. Table des matières

1. *Conceptions générales auxiliaires de la théorie des ensembles et de l'algèbre.*

Ensemble, sous-ensemble, complément d'un ensemble, intersection des ensembles, réunion des ensembles. Relation d'équivalence, relation d'ordre. Application d'un ensemble à et dans un ensemble (conception de la fonction), application biunivoque, application réciproque (fonction réciproque). Ensembles dénombrables. Lois de composition, les conceptions de groupe, d'anneau et de corps.

2. *Les nombres entiers, rationnels, réels et complexes.*

Les nombres entiers naturels. Axiome de récurrence. Nombres premiers. Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide. L'anneau des nombres entiers, classes de restes. Le corps des nombres rationnels. Le théorème : L'ensemble des nombres rationnels est un ensemble dénombrable. Le corps des nombres réels, les propriétés de continuité de l'ensemble des nombres réels, le théorème : L'ensemble des nombres réels est un ensemble non-dénombrable. Borne supérieure et inférieure. Fractions décimales infinies. Le corps des nombres complexes. Valeur absolue.

3. *Analyse combinatoire.*

Combinaisons et permutations, formule du binôme. Espaces finis de probabilité. Exemples de calcul de probabilité basé sur les combinaisons.

4. *Equations et inégalités.*

Equations et inégalités de premier et deuxième ordre à une grandeur inconnue. Equations et inégalités de premier ordre à deux grandeurs inconnues. Exemples simples d'autres équations. Equation binôme et équation de second degré dans le corps des nombres complexes.

5. *Géométrie plane.*

Coordonnées cartésiennes. Changement des coordonnées. Vecteurs et leurs coordonnées. Calcul des vecteurs y inclus le produit scalaire de deux vecteurs. Applications analytiques des droites. Distances et angles.

Applications analytiques des cercles. Aire du triangle et du parallélogramme. Définition at application analytique de la parabole, ellipse et hyperbole. Application d'un plan sur lui-même: Translation, rotation, homothétie et produits de ses transformations. Affinité linéaire.

6. *Géométrie dans l'espace*

Coordonnées cartésiennes. Vecteurs et leurs coordonnées. Calcul des vecteurs y inclus le produit scalaire de deux vecteurs. Applications paramétriques des droites. Applications analytiques des plans. Distances et angles. Equation de la sphère. Coordonnées sphériques. Distance sphérique entre deux points (formules du cosinus). Polyèdres. Théorème d'Euler, les polyèdres réguliers. Volume du prisme, pyramide, cylindre de révolution, cône de révolution et sphère. Aire de surface du cylindre de révolution, cône de révolution et sphère, aire d'un triangle sphérique. Coïncidence et symétrie.

7. *Fonctions élementaires*

La fonction linéaire d'une variable. La fonction linéaire de deux variables. Lignes de niveau. Polynômes d'une variable, décomposition d'un polynôme en facteurs, nombre maxima des racines, détermination des racines rationnelles d'un polynôme des coëfficients entiers. Fractions rationnelles d'une variable. Fonctions logarithmiques. Échelle logarithmique, utilisation de la règle à calcul et la table logarithmique. Fonctions exponentielles, fonctions puissances. Fonctions trigonométriques, règles d'addition, règles logarithmiques. Applications des fonctions trigonométriques à l'étude des oscillations et calcul des triangles. Fonction linéaire d'une variable complexe et son interprétation géométrique.

8. *Calcul infinitésimal*

Limites. Continuité et dérivation d'une fonction réelle d'une variable. Continuité et dérivation d'une fonction vectorielle d'une variable réelle (vecteur tangente). Propriétés de dérivation. Formule de Taylor (polynômes approximatif), différentielles. L'intégrale definit comme limite des sommes. Primitives. Opérations sur intégrales et primitives y inclus intégration par parties et changement de variable.

9. *Applications du calcul infinitésimal.*

Etude de l'ensemble des valeurs d'une fonction et de la variation d'une fonction. Exemples simples sur l'étude des propriétés asymptotiques d'une fonction. Construction des courbes planes représentées par une fonction explicite ou une application paramétrique simple. Vecteur vitesse, vecteur accélération. Calcul des aires et volumes au moyen d'intégrales. Exemples sur l'étude des espaces probabilités au moyen de fonctions fréquences. Exemples d'équations différentielles simples. Exemples sur l'application du calcul infinitésimal aux problèmes tirés d'autres spécialités.

10. *Sujet facultatif.*

b. Remarques générales

La table des matières établie paragraphe a., n'est pas une liste chronologique donnant une suite ou les sujets doivent être obligatoirement traités dans l'enseignement. Le professeur peut modifier l'ordre dans lequel il lui parait le plus satisfaisant, en considération de ses propres vues pédagogiques et systématiques en tenant compte des relations étroites avec la physique, la chimie et la biologie.

On accorde une grande importance et il est considéré comme très utile pour l'enseignement des mathématiques ainsi que pour la physique que soit établie une coordination propre entre les programmes relatifs aux deux sujets. En conséquence de cet enseignement parallèle, on peut dire par exemple que le chapitre consacré au calcul infinitésimal sera traité au plus tard au début de la deuxième classe.

En relation avec les matières convenables presentées aux élèves, ces derniers doivent résoudre les problèmes que posent le calcul numérique. A ce titre on donne les exemples suivants: Résolution des équations de premier et deuxième ordre avec nombres décimaux comme coefficients, calcul des triangles, calculs des probabilités basés sur les fonctions fréquences. Résolution approximative des équations algébriques et transcendantes simples, calcul approximatif des valeurs des fonctions au moyen des polynômes approximatifs, et calcul approximatif des intégrales par sommation. Pour résoudre ces problèmes sur le plan pratique on doit utiliser: La règle de calcul (25 cm) qui outre les échelles de base ordinaires doit porter des échelles pour x^{-1}, x^2, x^3, $\log x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$. On doit également utiliser la table de logarithmes à quatre chiffres, les tables trigonométriques à quatre chiffres et la table des carrés. Occasionnellement d'autres moyens sont bons pour faire des calculs, notamment les nomogrammes, feuilles de fonctions ou des tables sur des fonctions autres que celles déjà mentionnées.

Pour des raisons professionnelles et plus particulièrement culturelles il est d'importance de ne pas sous-estimer l'origine et l'évolution historique de quelques unes de ces conceptions fondamentales en relation avec le procédé général de ces conceptions. De plus on doit introduire des courtes analyses biographiques sur ces mathématiciens. Leurs œuvres, l'importance qu'elles ont eues dans le cadre des matières traitées.

On suppose que la connaissance des élèves à «l'école royale» (école préparant le lycée) relative aux opérations simples algébriques et supplée par un enseignement au lycée. Par exemple, les élèves doivent connaître et être capables d'appliquer les formules de la somme d'une série arithmétique et géométrique.

La théorie sur les nombres distances des droites et des arcs, nombres aires des domaines plans et surfaces, et nombres volumes des solides, peut être basé sur un système de axiomes où l'on suppose l'existence de telles mesures additives.

Occasionnellement, on doit traiter des problèmes et exemples tirés d'autres spécialités (la physique, la chimie, la biologie, les sciences politiques etc.). Ces exemples doivent être vus sous un angle très vaste et plus particulièrement montrer d'une manière approfondie les applications mathématiques dans la mesure du possible.

Des exemples tirés de la physique, le professeur doit essayer de montrer à ses élèves, que l'application dans la physique des conceptions mathématiques suit la définition de ces conceptions, bien que le langage et le raisonnement dans la physique, pour des raisons pratiques, soient très souvent plus courts que dans ceux des mathématiques.

c. Remarques relatives aux différents points de la table des matières

Au point 1.

Les conceptions générales sur la théorie des ensembles ont pour but d'éclairer des conceptions fondamentales, ainsi que d'être le fondement d'une manière d'expression précise et moderne. Les conceptions sur la théorie des ensembles doivent être définies lorsque d'autres conceptions sont étudiées et dans ces circonstances peuvent illustrer les conceptions générales au moyen d'exemples divers. De plus, on attache beaucoup d'importance à démontrer aux élèves comment quelques unes de ces conceptions simples trouvent leur application dans la logique.

D'une manière générale la conception de fonction doit être exposée comme suit: Application d'un ensemble dans un ensemble, démonstration qui permet de faire compendre aux élèves comment la conception de fonction est une conception qui s'applique partout dans les mathématiques de même qu'elle permet de démontrer et illustrer les moyens par lesquels une fonction représentée doit être variée selon la nature des deux ensembles.

En ce qui concerne les conceptions algébriques on ne doit pas exposer une théorie systématique. Les conceptions, lois de composition, groupe, anneau et corps doivent servir comme base pour une description des propriétés algébriques des ensembles de nombres. De plus, divers exemples sur ces conceptions fondamentales permettent de montrer une homogénéité entre les différentes disciplines qui d'ailleurs ne paraissent pas à priori s'apparenter.

Au point 2.

Dans la partie consacrée aux entiers naturels, on doit faire remarquer le rôle fondamental de l'axiome de récurrence ainsi que son utilisation fréquente comme moyen de démonstration.

En ce qui concerne les nombres premiers on peut se borner au théorème: La série des nombres premiers est infinie, et le théorème sur la décomposition unique d'un nombre en facteurs premiers.

Les élèves devront être attentifs quand sera étudié l'important chapitre sur la valeur absolue, car ils trouveront maintes applications dans leurs problèmes tant dans les équations et inégalités que dans l'étude des fonctions.

Concernant les nombres réels, on ne réclame pas une théorie constructive des nombres irrationnels.

Au point 3.

Les élèves doivent prendre connaissance de la conception générale suivante: Un espace probabilité fini, également, on ne doit pas se borner à des espaces où toutes les épreuves ont la même probabilité.

En d'autres termes, cela consiste à presenter un modèle mathématique simple et utiliser la langage propre qui s'attache à ce modèle.

Au point 4.

Parmi les différents types d'équations où il se révèle nécessaire de citer des exemples, il faut mentionner: Un système à trois équations linéaires avec trois grandeurs inconnues, un système de deux équations avec deux graddeurs inconnues, où une équation est du premier ordre et l'autre du deuxième ordre équations où la grandeur inconnue est sous signe radical, équations exponentielles et trigonométriques avec une grandeur inconnue. Tous les exemples d'équations et systèmes d'équations doivent être simples et le sujet ne doit pas subir une conclusions systématique.

Au point 5.

Les transformations des coordonnées doivent inclure translation et rotation du système des coordonnées.

En géométrie analitique la conception des vecteurs doit jouer un rôle central et les élèves doivent avoir l'habitude d'opérer avec des vecteurs de manière à ce qu'une transformation en coordonnées ne soit pas toujours nécessaire.

L'expression «applications analytiques des droites» comprend d'une part équation coordonnée, et par ailleurs équation vectorielle, ainsi que l'application paramétrique et équation normée.

L'étude sur la théorie des coniques peut se limiter à la dérivation des équations pour la parabole, l'ellipse et l'hyperbole, ayant pour base les définitions géométriques de ces courbes. On doit déterminer les asymptotes d'une hyperbole. Les propriétes spéciales des coniques peuvent être étudiées dans le cadre réservé aux exercices. Il s'agit notamment des théorèmes sur les tangentes, des diamètres.

Comme il est indiquée à la table des matières, on suppose que les applications mentionnées doivent être traitées comme applications d'un plan sur lui-même, non seulement comme applications des figures singulières, mais comment doivent être étudiées les propriétés des figures (mesure distance, angles et aires) et leur évolutions pendant l'application (propriétés variantes et non-variantes). Plus particulièrement, on doit montrer que l'ellipse est l'image d'un cercle par une affinité linéaire. On étudiera l'application paramétrique de l'ellipse.

Au point 6.

Sans preuve, on détermine les théorèmes fondamentaux sur le parallélisme et l'ortogonalité des droites et plans dans la mesure où c'est nécessaire pour l'introduction des coordonées cartésiennes et le traitement des polyèdres.

L'application analytique du plan doit inclure l'équation coordonnée, l'équation vectorielle, ainsi que l'équation normée.

Les exercises pratiques des coordonnées sphériques doivent renfermer entre autres des problèmes géographiques et astronomiques.

En ce qui concerne les polyèdres reguliers, on suppose seulement une étude développée pour le tétraèdre, l'hexaèdre et l'octaèdre.

Au point 7.

Dans l'étude de la fonction linéaire à deux variables, et ses lignes de niveau, on peut traiter les problèmes sur la détermination des maxima et minima d'une telle fonction dans un domaine représenté par un système d'inégalités linéaires (programmation linéaire).

La mention des polynomes doit en regard de l'étude du point de vue théorie des fonctions tenir également compte du rapport algébrique sur l'ensemble des polynômes est un anneau et un soulignement d'analogie entre l'ensemble des entiers et l'ensemble des polynômes.

L'étude de la régle à calcul doit se résumer à son principe même et à l'exercice des opérations fondamentales. On ne doit pas consacrer beaucoup de temps à démontrer des finesses techniques. L'importance des calculs logarithmiques étant en régression, ces calculs doivent s'effacer du programme dans les lycées. Dans le calcul des triangles, il est rationnel de montrer aux élèves que les fonctions trigonométriques servent de base pour la détermination générale des côtés et angles d'un triangle basé sur la connaissance de trois d'entre eux. De manière à ne pas introduire l'étude du système des formules logarithmiques, on peut se limiter à indiquer les formules de sinus et cosinus.

A travers les diverses applications des fonctions trigonométriques à l'étude des oscillations, on suppose qu'en démontrant le théorème, une combinaison linéaire d'oscillations harmoniques avec la même fréquence est une oscillation harmonique, et on peut donner des exemples sur la décomposition des fonctions trigonométriques dans les oscillations harmoniques.

Au point 8.

En rapport avec la conception des limites, il faut mentionner les théorèmes sur les opérations des limites des séries des nombres et des fonctions. On peut se borner à démontrer un seul de ces théorèmes.

Concernant les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, le professeur appréciera lui-même combien et quels théorèmes il doit démontrer.

En relation avec la formule de Taylor, les élèves doivent être capables de réaliser eux-même des calculs approximatifs des valeurs de certaines fonctions.

Au point 9.

Le calcul du volume par l'intégration doit inciure l'étude du volume des solides à révolution et de la pyramide.

On suppose que la place des fonctions de fréquence comme base de détermination des espaces probabilité finie dans le cas singulier doit être fondée sur un postulat concernant l'existence d'une telle fonction telle que la répartition de probabilité correspondant à n'importe quelle division finie d'intervalle peut se déterminer par l'intégration de cette fonction sur les intervalles individuels. On insère le sujet dans le cadre des espaces probabilité fini et de cette manière les problèmes sont essentiellement des problèmes d'intégration exposés au langage de la théorie de probabilité. L'étude des équations différentielles peut être limitée aux équations suivantes:

$$dy/dx = f(x) \quad \text{et} \quad dy/dx = g(y)\,(g(y) \neq 0)\,.$$

A titre d'exemples des applications en physique notons entre autres des calculs simples de moments d'inertie et déterminations simples du centre de gravité.

Au point 10.

On suppose que le sujet facultatif s'étendant sur une période de travail de deux mois environ, peut être inclus dans l'instruction générale au moment le plus favorable, et ceci bien entendu en fonction du caractère du sujet. Il ressort donc que le sujet facultatif n'est pas nécessairement étudié à la fin de la troisième classe. D'ailleurs, on peut judicieusement faire coordonner un enseignement parallèle entre le sujet facultatif et ceux obligatoires.

Le choix du sujet facultatif doit supposer être fait de telle sorte qu'il ne soulève pas de difficultés insurmontables pour les élèves, et doit se situer dans un niveau de compréhension égal au niveau des mathématiques enseignés dans les lycées.

Le sujet facultatif pourra être tiré des exemples suivants: Histoire des mathématiques, théorie des nombres, matrices et déterminants, théorie des groupes, théorie des ensembles, l'algèbre logique, équations différentielles, séries et développement en séries, théorie de probabilité, théorie de statistique, théorie de jeu, topologie, géometrie projective, théorie des coniques, géométrie non-euclidienne, géométrie à plusieurs dimensions, constructions géométriques.

De plus, le sujet facultatif peut être choisi de manière à ce qu'il soit étudié en combinaison avec l'étude spéciale dans l'enseignement de la physique (sujet facultatif dans l'enseignement de la physique). Comme exemples, on donne: Théorie de probabilité et théorie moléculaire cinétique, équations différentielles et circuits d'oscillation.

Enfin, on peut traiter le sujet facultatif en relation avec des matières autres que la physique. A titre d'exemple, on cite: Théorie de probabilité et génétique.

Le sujet facultatif doit être soumis à l'inspecteur général pour son approbation.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

O PAPEL E A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA CLÁSSICA E DA MATEMÁTCA MODERNA NA SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS NACIONAIS *

O desenvolvimento das matemáticas sofreu no decorrer da primeira metade do Século XX uma transformação extraordinária.

Esta transformação é, por um lado, consequência de evolução particularmente rápida das condições de vida do Homem e da consequente repercussão na actividade científica; por outro lado resulta duma relativa e momentânea situação de crise em determinados ramos da matemática clássica.

Por isso, em nível superior de abstracção, novos conceitos se organizaram em novas teorias que constituem por sua vez o tema de grande percentagem da actual actividade da investigação cientifica em matemática.

Mas sempre em relação de causa e efeito, as matemáticas «modernas ou abstractas» são um reflexo do progresso e da actividade humanas e constituem uma estrutura que assenta natural e necessàriamente na respectiva base — as matemáticas clássicas; estas por sua vez devem, do mesmo modo *responder* às necessidades imediatas da vida social.

Encarando esta realidade no âmbito de uma actividade científica nacional, conclui-se que a investigação no domínio das matemáticas abstratas *tem interesse nacional* apenas num país em que exista profundo conhecimento das matemáticas clássicas, baseado em sólidas aplicações das mesmas. Doutra forma cai-se no perigo de malbaratar ou desprezar os frutos resultantes da maior conquista do Homem que tão bem caracteriza a nossa época: a ciência como via e instrumento da solução para os múltiplos problemas da vida comum.

*

Começam a ser conhecidas em Portugal as necessidades de cálculo automático não só em múltiplos problemas de engenharia civil, como sejam os decorrentes dos estudos de estruturas sujeitas a esforços, de previsão de remoção de terras, etc., como também em outros de hidrodinâmica relacionados com a análise das características hidrográficas do país e seus aproveitamentos.

De igual modo, porém, problemas de meteorologia e aerodinâmica, mecânica dos solos e sismologia são tratados nas unidades destinadas ao cálculo automático — os calculadores electrónicos.

De modo geral, todos os problemas relativos à produção e distribuição de energia eléctrica, metalurgia e siderurgia, destilação e refinação de produtos químicos, principalmente orgânicos; todos os problemas de transmissão de calor que se apresentam nas nossas fábricas e centrais eléctricas; ocupação e utilização de linhas telefónicas; em geral todo o tráfego, quer seja o de automóveis nas ruas de Lisboa quer o dos transportes de mercadorias por via terrestre ou marítima, devem ser actualmente tratados em calculadores electrónicos.

É certo que, desde há muito a humanidade vive em grandes edifícios, constrói grandes barragens, serve-se da energia eléctrica, dos produtos metálicos e químicos, utiliza o telefone, os transportes motorizados terrestres ou marítimos, etc., e até há pouco *nunca sentira a necessidade do calculador.*

Efectivamente, tais problemas são sempre resolvidos de acordo com o espírito que caracteriza o engenheiro; é preciso fazer-se e faz-se *com o que se têm às mãos.*

Mas o engenheiro de agora tem à sua disposição a possibilidade de cooperação com economistas e outros representantes da Ciência, nomeadamente os matemáticos e os físicos, e a de utilizar o benefício resultante da introdução nos seus cálculos de novos parâmetros que conduzem a soluções consideràvelmente mais económicas, mercê dessa cooperação.

Como se sabe, esses parâmetros traduzem a situação instantânea e a previsão da evolução do país no que respeita a factores de produção e consumo, novos métodos de fabrico, etc.

Em suma, se até há pouco um sistema, um fenómeno eram traduzidos e estudados por meio de funções dependentes de duas quando muito quatro variáveis, actualmente os mesmos sistemas e fenómenos exprimem-se em muitas dezenas ou em várias centenas de parâmetros.

---

* A Redacção da G. M. considera de interesse, pelos pontos de vista então expressos, registar a «Proposta para a Actividade no Campo da Matemática» apresentada aos Sócios da Cooperativa da Actividade Científica, DIÁLOGO, em Agosto de 1961. Foi a partir desta proposta que se constituiu o Centro de Tratamento da Informação (CENTI), segundo notícia dada no N.º 88-89.

O nosso engenheiro *sentindo* o benefício da cooperação com o economista e o físico-matemático é *forçado* a utilizar os modernos métodos e meios de cálculo: apenas pela singela razão de querer produzir melhor *mas principalmente mais barato!*

Há pouco, o director de um gande centro de cálculo de francês afirmava: «quando os nossos engenheiros põem um novo problema na máquina os resultados obtidos são de tal modo surpreendentes que nos forçam a rever completamente toda a nossa política económica anterior»!

Pode objectar-se a estas considerações que, numa empresa industrial a organização de um Centro de Cálculo é problema sério: se por outro lado a aquisição da unidade fundamental — o calculador — envolve despesa da ordem de várias dezenas de milhar de contos, por outro a empresa pode não possuir volume de actividade que justifique ocupação rendável do mesmo centro.

Mas, para novas condições, novas soluções!

As pequenas empresas dos grandes países e as grandes empresas dos pequenos países colaboram actualmente em muitas realizações que não seriam viáveis por meio de esforço individual.

Temos como exemplo a constituição de muitos centros de cálculo em vários países europeus, asiáticos e da América do Sul.

O caso português

No nosso país, reflectindo condições em que se processam certos aspectos da vida nacional, a «matemática, pela matemática», isto é, desligada das aplicações, ainda é infelizmente aceite na sua generalidade.

Daqui resultam naturalmente limitações de prespectivas, quer dos iniciados quer dos iniciandos, deficiências incontroláveis de actuação no que respeita a formação de especialistas, dificuldade de uma actualização de programas de ensino e do nível de conhecimentos gerais, etc.

Na base de uma «cooperação da actividade científica» nacional, o condicionalismo existente pode alterar-se por forma sensível, permitindo a eliminação de algumas lacunas consequentes de concepção não realista sobre a importância e utilidade da matemática em Portugal. Por outro lado, a indústria nacional tem problemas próprios que necessitam solução rápida e rigorosa. Mas à semelhança do que acontece com a indústria dos restantes países europeus, deve saber aproveitar-se das possibilidades actuais técnicas e científicas (doutra forma não se evitará estagnação e atrofiamento resultantes da competição com mercados estrangeiros).

Apenas existe uma diferença de escalas traduzível por exemplo no quadro:

Consumo, per capita, de energia nos países europeus

(1952 — aproximadamente em ton. equival. — carvão)

Noruega	5
Reino Unido e Suécia	4,5
Bélgica e Luxemburgo	4
Irlanda e Alemanha	3
França e Suíça	2,5
Dinamarca, Holanda, Áustria, Finlândia e Irlanda	2
Itália	1
Portugal, Turquia e Grécia	0,5

Da análise conjunta desta dupla situação resultou a proposta de trabalho adiante formulada.

Um campo de utilização da matemática clássica e da matemática moderna

Em torno da constituição e da utilização de um ou mais centros de cálculo no país, podem os matemáticos portugueses encontrar actividade de grande interesse sob a forma de cooperação com representantes da indústria e de algumas casas comerciais portuguesas.

*

O problema das diverssas línguas cientifícas nacionais

Outro aspecto que poderá interessar a cooperação entre matemáticos e mais cientistas, particularmente filólogos e linguistas é o da conversão de várias línguas na língua pátria.

A confusão linguística nas ciências promete aumentar em futuro próximo.

O quadro seguinte [1] mostra as percentagens dos números actual e futuro previsível de cientistas e técnicos (os números potenciais são estabelecidos a partir da suposição de que a percentagem dos cientistas na população tornar-se-á em geral a mesma em todos os países) [2].

[1] MAKKING — *The language Problem and the WFSW* — «Le Monde Scientifique» V. 2 — 1961.

Neste quadro o autor admite que na Índia e Paquistão acabará por ser adoptada uma língua única; o mesmo no que respeita à China.

[2] Assim, o número potencial dos cientistas e técnicos pode ser expresso como a percentagem da população de cada região linguística em relação à população mundial.

Região linguística	Cientistas e Técnicos % actual	% potencial
Inglês	27	9
Russo	21	7
Chinês	10	22
Indiano	5,5	17
Japonês	2,5	1
Português	2	3
Outros	32	41
	100	100

Nele se observa que a língua portuguesa ocupa uma posição importante (1), tendo em conta o número de pessoas que a utilizam como língua materna.

Por outro lado, o novo quadro (2) mostra as percentagens dos cientistas e técnicos capazes de ler as principais línguas científicas.

Países	Inglês	Alemão	Francês	Russo
R. Unido	100	20	20	1,2
E. Unidos	100	10	5	0,1
URSS	55,5	66,9	44,5	100
França	8,2	4,1	100	—
Alemanha	31	100	27	11
Japão	91,7	25	8,3	—
China	10	10	5	10

O facto de ser a URSS o país com maior percentagens de cientistas capazes de ler as principais línguas científicas estrangeiras não impede de ser ao mesmo tempo o país que mais interesse mostra na resolução do problema da tradução automática das línguas científicas (3).

Efectivamente, as línguas como elemento de difusão e aquisição de informação científicas podem ser encaradas de dois pontos de vista diferentes.

a) individuais;

b) nacional, ou melhor, como língua materna.

(1) Precisamente o oitavo lugar, segundo a Enciclopédia Universal Herder, 1957, cf. citação em «Electricidade» 14 1960, pág. 137.

(2) W. V. Falkenhahn — «Traduction Automatic ou étude des Langues Scientifiques «Le Monde Scientifique» IV, 2 — 1960.

(3) Cf., por exemplo, *Information Processing* — «Proceedings of the International Conference on Information Processing», UNESCO Paris 15-20 June 1959.

O indivíduo atribui maior valor á língua na medida em que esta lhe proporciona maior valor de conhecimentos; portanto àqueles cujos países possuem maior quantidade e melhor qualidade de cientistas.

Eis a razão por que *actualmente* são considerados de maior importância o inglês, o russo, o alemão e o francês.

Mas, de acordo com os princípios característicos de uma educação e instrução democráticas, e, atendendo a uma situação que para nós se terá que definir em futuro próximo (ela é já evidente e bem real em países desenvolvidos) o problema é totalmente diferente. Interessa facultar a todo o indivíduo de uma comunidade nacional o acesso às publicações científicas de origem estrangeira. Este acesso, porém, só será eficiente quando realizado na língua materna, na do estudioso.

Daí o grande interesse da tradução das línguas científicas na língua materna, em relação à adopção de uma língua científica internacional única, como, por exemplo, o esperanto.

O caso da língua portuguesa

O português, como língua materna é das mais generalizadas, como acabamos de ver.

É pois problema nacional da máxima importância e problema mundial de relativa importância o de facultar a literatura científica de origem estrangeira aos indivíduos que utilizam o português como língua materna em português. Tal tarefa poderá ser realizada por meio da tradução automática, possível, como se sabe, utilizando calculadores numéricos.

Proposta de actividade no campo da matemática

De acordo com as observações feitas, consideramos de grande interesse para a vida nacional a constituição de um Centro de Cálculo português. Este poderá resultar quer da iniciativa isolada de uma casa comercial representante de empresa estrangeira construtora de calculadores quer da colaboração de representantes de empresas diferentes quer ainda da iniciativa individual ou colectiva da indústria interessada, ou mesmo de condições criadas dentro da nossa Sociedade Cooperativa.

A necessidade da criação de um Centro de Cálculo em Portugal é uma realidade que impulsiona não só o estudo de ramos bem definidos da matemática como a teoria da informação mas a subida do nível dos conhecimentos básicos particularmente no campo da matemática clássica que mais interessa nas aplicações: equações diferenciais, ordinárias ou parciais, equações integrais, etc. (1).

Em conformidade, propomos aos matemáticos portugueses a consideração de dois problemas:

a) necessidades nacionais de cálculo automático;

b) o problema da tradução automática em português, que exigirá a elaboração de novos meios de análise e discrição da nossa língua por métodos precisos com base na matemática, nomeadamente na Álgebra.

21 de Agosto de 1961

José Gaspar Teixeira

(1) Em apêndice foi apresentado resumo dos programas de matemática necessários aos elementos responsáveis pela actividade de um Centro de Cálculo.

Cf. E. M. Grabbe, S. Ramoo, D. E. Wooldridge, «Handbook of Automation, Computation and Control», Vol. I, John Willey & Sons.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 15-7-1963.

5584 — 1) Prove que a sucessão $u_1 = a$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$ é monótona. Qual é o seu limite?

Nota: Considere os casos $a > 0$ e $a < 0$.

R: *Com* $a > 0$ *todos os termos da sucessão são positivos e tem-se* $u_{n+1} < u_n$, *isto é, a sucessão é decrescente e lim* $u_n = l \geqq 0$. *Como* l *deve satisfazer à equação* $l = \dfrac{l}{1+\sqrt{1+l^2}}$, *resulta imediatamente* $l = 0$.

Com $a < 0$ *todos os termos da sucessão são negativos e, como* $|u_{n+1}| < |u_n|$, *vem* $u_{n+1} > u_n$, *isto é, a sucessão é monótona crescente e lim* $u_n = l_1 \leqq 0$. *Como* l_1 *deve satisfazer à equação* $l_1 = \dfrac{l_1}{1+\sqrt{1+l_1^2}}$, *resulta imediatamente* $l_1 = 0$.

2) Seja $B_0 + \dfrac{B_1}{1!}x + \dfrac{B_2}{2!}x^2 + \cdots$ o desenvolvimento em série de Mac-Laurin da função

$$\frac{1}{1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots}.$$

Deduza a fórmula de recorrência

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0$$

e aproveite-a para calcular, em particular, os valores de B_0, B_1, B_2 e B_3.

R: *Será*

$$1 = \left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)\left(B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots\right)$$

ou

$$1 = B_0 + \left(\frac{B_0}{2!\,0!}+\frac{B_1}{1!\,1!}\right)x + \cdots +$$

$$+\left(\frac{B_0}{n!\,0!}+\frac{B_1}{(n-1)!\,1!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{1!\,(n-1)!}\right)x^{n-1}+\cdots$$

isto é, $B_0 = 1$ *e* $\dfrac{1}{n!}\dfrac{B_0}{0!}+\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{B_1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{1!}\dfrac{B_{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot (n = 2, 3\cdots)$.

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $n!$ *vem imediatamente a fórmula pretendida. Tem-se* $B_0 = 1$ *e os valores de* B_1, B_2 *e* B_3 *obtém-se das equações:*

$$\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = B_0 + 2B_1 = 1 + 2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -1/2$$

$$\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 = $$

$$= 1 - \frac{3}{2} + 3B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}$$

$$\binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3 = B_0 + 4B_1 +$$

$$+ 6B_2 + 4B_3 = 1 - 2 + 1 + 4B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = 0.$$

3) Refira-se à utilização da fórmula de TAYLOR no estudo dos máximos e mínimos de $f(x)$.

Ache os extremantes de $y = x^m (b-x)^n$ (m e n naturais, $b > 0$).

R: $$y' = m x^{m-1} (b-x)^n - n x^m (b-x)^{n-1} = x^{m-1} (b-x)^{n-1} [m b - x (m+n)]$$

Os pontos de estacionaridade são $x_1 = 0$, $x_2 = b$ *e* $x_3 = \frac{m b}{m+n}$. *Fàcilmente se reconhece que em* $x_1 = 0$ *a função é crescente se* m *é impar e tem um mínimo se* m *é par; em* $x_2 = b$ *a função é decrescente se* n *é impar e tem um mínimo se* n *é par; em* $x_3 = \frac{m b}{m+n}$ *a função tem um máximo.*

4) Estude a continuidade de

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-y^2} & (y \neq \pm x) \\ 0 & (y = \pm x) \end{cases}$$

no seu campo de existência e nos conjuntos

$C_1 = \{(x,y) / y = x\}$ e $C_2 = \{(x,y) / y = -x\}$.

Calcule $g'_x(0,0)$ e $g'_y(0,0)$.

R: *A função não é contínua no seu campo de existência pois as rectas* $y = x$ *e* $y = -x$ *são linhas de descontinuidade. No entanto, nos conjuntos* C_1 *e* C_2, *a função é contínua pois* $g(x,y) \equiv 0$.

$$g'_x(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{x^3} = \mp \infty$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = \lim_{y=0} - \frac{1}{y^3} = \pm \infty$$

5) Sejam $y_i = y_i(x_1, \cdots x_n)$ $(i = 1, \cdots n)$ n funções diferenciáveis das n variáveis $x_1, \cdots x_n$ e designem $x_i = x_i(t_1, \cdots t_m)$ n funções diferenciáveis das m variáveis $t_1, \cdots t_m$. Prove a igualdade matricial $\left\{\frac{\partial y_i}{\partial t_k}\right\} = \left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right\} \times \left\{\frac{\partial x_j}{\partial t_k}\right\}$.

R: *Pelo teorema da derivação de uma função composta vem* $\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_k}$ (j *mudo corrente de* 1 a n) e *daqui resulta imediatamente a igualdade matricial proposta.*

6) Discuta, utilizando a teoria dos determinantes, o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= k \end{aligned}$$

Interprete geomètricamente a discussão.

R: *Considere-se a matriz do sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fàcilmente se vê que o determinante principal é $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *e, construindo o característico*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = k - 1,$$

o teorema de ROUCHÉ *permite afirmar que o sistema é possível (simplesmente indeterminado) quando* $k = 1$ *e impossível quando* $k \neq 1$.

A interpretação geométrica é óbvia: no primeiro caso, o plano representado pela equação $2x + 3y + z = 1$ *contem a recta definida pelos outros dois; no segundo caso, o plano* $2x + 3y + z = k$ $(k \neq 1)$ *é paralelo à recta definida pelos outros dois.*

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova escrita = 19-7-1963.

5585 — Estude a natureza da série $\sum_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

R: *Considerando a serie associada* $\sum_0^\infty \left|\frac{x}{1+x}\right|^n$, *como* $\sqrt[n]{\left|\frac{x}{1+x}\right|^n} = \left|\frac{x}{1+x}\right|$, *a série dada será absolutamente convergente quando* $\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1$, *isto é, quando* $x > -\frac{1}{2}$.

Quando $\left|\frac{x}{1+x}\right| > 1$, *ou* $x < -\frac{1}{2}$, *a série é divergente pois o termo geral não tende para zero.*

Para $x = -\frac{1}{2}$ *obtem-se a série de* EULER $\sum_0^\infty (-1)^n$ *que é divergente.*

2) Enuncie e demonstre o teorema de ROLLE para as funções regulares. Aplicando esta proposição a $\varphi(x) = f(x) e^{-kx}$, prove o seguinte teorema: «Se $f(x)$ é regular e não identicamente nula em $[a,b]$ e $f(a) = f(b) = 0$, a função $f'(x)/f(x)$ assume todo o valor real k em $[a,b]$.

R: *Como* $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ *e* $\varphi(x)$ *é regular em* $[a,b]$, *o teorema de* ROLLE *aplicado a esta função diz que* $\varphi'(c)=0\ (a<c<b)$. Ora $\varphi'(x)=e^{-kx}[f'(x)-kf(x)]$ *e* $\varphi'(c)=0 \Longrightarrow k=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$.

3) Calcule $P\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

R: $$\frac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2}{(x-1)^3}+\frac{S_0}{x^2+1}$$

Cálculo de a_0, a_1 e a_2:

$R_1(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+1}$ *e, fazendo* $x-1=t$, *vem* $R_1(1+t)=\dfrac{2+4t+5t^2+\cdots}{2+2t+t^2}$.

Efectuando a divisão ascendente do numerador pelo denominador e levando o cociente até ao grau 2, obtem-se $1+t+t^2=1+(x-1)+(x-1)^2$, *isto é,* $a_0=a_1=a_2=1$.

Cálculo de S_0:

Fazendo $\Delta=x^2+1$, *ordene-se o numerador e o denominador de* $R_\Delta(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-1)^3}$ *segundo as potências crescentes de* Δ. *Obtem-se*

$$R_\Delta(x)=\frac{-4x+\cdots}{(2+2x)+\cdots}$$

e, como $-4x$ *não é divisível por* $2+2x$ *tome-se* α_0 *por forma que* $-4x-\alpha_0\Delta$ *fique divisível por* $2+2x$. *A equação* $(-4x-\alpha_0\Delta)_{x=-1}=0$ *dá* $\alpha_0=2$ *e o novo coeficiente será* $-2x^2-4x-2$. *Vem imediatamente* $S_0=\dfrac{-2x^2-4x-2}{2+2x}=-x-1$.

$$\frac{x^3+2x^2-3x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$P\frac{x^3+2x^2-3x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=P\frac{1}{(x-1)^3}+P\frac{1}{(x-1)^2}+P\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1}-P\frac{1}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\log|x-1|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\operatorname{artg}x.$$

4) Mostre que a equação $x^2y^3+x^2y^2-2xy+x+y=0$ define uma função implícita $y(x)$ na vizinhança de $P(0,0)$. Escreva a equação da tangente à curva representativa de $y(x)$ em $P(0,0)$ e verifique que, na vizinhança deste ponto, a curva está abaixo da tangente.

R: *Fazendo* $f(x,y)=x^2y^3+x^2y^2-2xy+x+y$, *vem* $f(0,0)=0$, $f'_x(x,y)$ *e* $f'_y(x,y)$ *continuas e* $f'_y(0,0)\neq 0$, *o que garante a existência de* $y(x)$.

Como $y'(0)=-\dfrac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)}=-1$, *a equação da tangente em* $P(0,0)$ *é* $y=-x$.

Como

$$y''(0)=-\frac{f''_{x^2}(0,0)+2f''_{xy}(0,0)\,y'(0)+f''_{y^2}(0,0)\,[y'(0)]^2}{f'_y(0,0)}=$$
$$=-4<0$$

a curva tem a concavidade voltada para baixo na vizinhança de $P(0,0)$.

5) A tabela

x	$g(x)$
1	1
4	0,25

foi construída tomando $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Ache o polinómio de grau mínimo que para aqueles valores de x toma os correspondentes valores de $g(x)$.

Supondo que utiliza esse polinómio para achar valores de $g(x)$ em [1,4], mostre que o erro máximo que se pode cometer é 0,25 (em valor absoluto) e indique o valor de x para o qual o erro assume esse valor.

R: *O polinómio interpolador é*

$$I(x)=1-0{,}25(x-1)=-0{,}25x+1{,}25.$$

Fazendo $R(x)=\dfrac{1}{x}-(-0{,}25x+1{,}25)=\dfrac{1}{x}+0{,}25x-1{,}25$, *determine-se o extremo desta função em* [1,4]. *Como* $R'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+0{,}25$, *a equação* $R'(x)=0$ *dá* $x=2$ *(minimizante). Como* $R(2)=-0{,}25$, *vem* $|R(2)|=0{,}25$ *como se queria demonstrar.*

6) Seja A uma matriz quadrada real de ordem n cujos elementos satisfazem à condição $|a_i^j| \leq k$. Mostre que os elementos de $A^2, \cdots A^p$ são majorados, respectivamente, por $n\,k^2, \cdots n^{p-1}\,k^p$.

Aproveite este resultado para mostrar que cada um dos elementos da matriz

$$S_p = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^p}{p!}$$

tende para um limite finito quando $p \to \infty$.

R: *Fazendo* $B = A^2$, *é* $b_i^j = a_i^\alpha a^j$ *e portanto* $|b_i^j| \leq |a_i^\alpha|\,|a_\alpha^k| \leq n k^2$. *O elemento generico de* $C = A^3$ *é* $c_i^j = b_i^\alpha a_\alpha^j$, *donde* $|c_i^j| \leq |b_i^\alpha|\,|a_\alpha^j| \leq n^2 k^3$, *etc.*

Designando por $s_{i(p)}^j$ *o elemento genérico de* S_p, *vem*

$$s_{i(p)}^j = \varepsilon_i^j + a_i^j + \frac{b_i^j}{2!} + \frac{c_i^j}{3!} + \cdots + \frac{h_i^j}{p!} \text{ e, como}$$

$$|\varepsilon_i^j| \leq 1, |b_i^j| \leq n\,k^2, \cdots |h_i^j| \leq n^{p-1}\,k^p,$$

resulta imediatamente

$$|s_{i(p)}^j| \leq 1 + k + \frac{n\,k^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{p-1}\,k^p}{p!}.$$

A série $1 + k + \frac{n\,k^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{p-1}\,k^p}{p!} + \cdots$ *é absolutamente convergente (com qualquer* n *e* k*) e assim cada termo de* S_p *tem limite finito quando* $p \to \infty$.

É costume escrever

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^p}{p!} + \cdots$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro — Prova escrita — 1-10-1963.

5586 — 1) Dá-se o nome de *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B, e designa-se por $A \Delta B$, ao conjunto definido do seguinte modo:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Demonstre as seguintes propriedades da diferença simétrica:

a) $A \Delta A = \emptyset$

b) $A \Delta B = B \Delta A$

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

d) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

R: *a)* $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

b) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$

c) $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)] = [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] = (A \cap B - A \cap C) \cup (A \cap C - A \cap B) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

d) Em virtude da definição de diferença simétrica, tem-se

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B &\Longleftrightarrow \{(x \in A) \wedge [\sim (x \in B)]\} \vee \{(x \in B) \wedge \\ &\wedge [\sim (x \in A)]\} \Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge \{(x \in A) \vee \\ &\vee [\sim (x \in A)]\} \wedge \{[\sim (x \in B)] \vee (x \in B)\} \wedge \\ &\wedge \{[\sim (x \in B)] \vee [\sim (x \in A)]\} \Longleftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge \\ &\wedge [\sim (x \in A \cap B)] \Longleftrightarrow x \in [(A \cup B) - (A \cap B)]. \end{aligned}$$

2) No conjunto das funções reais de variável real considere a seguinte relação binária:

$$\varphi(x) \sim \psi(x) \Longleftrightarrow \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

a) Mostre que se trata de uma relação de equivalência.

b) Estarão na relação dada as funções $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x - x$ e $\operatorname{tg} x - x$, com $a = 0$?

R: *a) A relação é visivelmente reflexiva, simétrica e transitiva.*

b) Como
$$\begin{aligned} \lim_{x=0} \frac{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x - x}{\operatorname{tg} x - x} &= \lim_{x=0} \frac{2 \cos x - \cos 2x - 1}{\sec^2 x - 1} = \\ &= \lim_{x=0} \frac{-2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x}{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x} = \\ &= \lim_{x=0} \frac{-2 + 4 \cos x}{2 \sec^2 x \cdot \frac{1}{\cos x}} = 1, \end{aligned}$$

as funções estão na relação dada.

3) Calcule:

a) $P \dfrac{x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.

b) $P \dfrac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$;

R:

a)
$$\begin{aligned} P \frac{x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} &= P \frac{x}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})} = \\ &= P \frac{x}{e^x} = -P\,x\,e^{-x}(-1) = -e^{-x}x + P\,e^{-x} = \\ &= -e^{-x}x - e^{-x} + C. \end{aligned}$$

b) Faça-se $\operatorname{tg} x = t$. *Então*

$$\mathrm{P}\frac{1}{cos^2\,\mathrm{x}-sen^2\,\mathrm{x}}=\mathrm{P}\frac{1}{1-\mathrm{t}^2}=-\mathrm{P}\frac{1}{(\mathrm{t}-1)\,(\mathrm{t}+1)}=$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{1}{\mathrm{t}-1}+\frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{1}{\mathrm{t}+1}=\frac{1}{2}\,log\left|\frac{\mathrm{t}+1}{\mathrm{t}-1}\right|+\mathrm{C}=$$
$$=\frac{1}{2}\,log\left|\frac{tg\,\mathrm{x}+1}{tg\,\mathrm{x}-1}\right|+\mathrm{C}\,.$$

4) Seja $f(x,y)$ homogénea de grau α, isto é,

$$f(x+x\,t,y+y\,t)=(1+t)^{\alpha}f(x,y)\cdot$$

Desenvolvendo $f(x+x\,t,y+y\,t)$ pela fórmula de Taylor e $(1+t)^{\alpha}$ pela fórmula do binómio, deduza as seguintes igualdades:

$$x\,f'_x+y\,f'_y=\alpha\,f\,,\;x^2 f''_{x^2}+2\,x\,y\,f''_{xy}+y^2 f''_{y^2}=$$
$$=\alpha\,(\alpha-1)\,f,\ \text{etc.}$$

R: $$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})+(\mathrm{x}\,\mathrm{f}'_{\mathrm{x}}+\mathrm{y}\,\mathrm{f}'_{\mathrm{y}})\,\mathrm{t}+$$
$$+\frac{1}{2!}(\mathrm{x}^2\mathrm{f}''_{\mathrm{x}^2}+2\,\mathrm{x}\,\mathrm{y}\,\mathrm{f}''_{\mathrm{xy}}+\mathrm{y}^2\mathrm{f}''_{\mathrm{y}^2})\,\mathrm{t}^2+\cdots=$$
$$=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\alpha\,\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{t}+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{t}^2+\cdots$$

e, identificando ambos os membros, ficam deduzidas as igualdades.

5) Deduza as fórmulas de Girard e aproveite-as para determinar o valor de m tal que as raízes do polinómio $x^3-3\,x^2-x+m$ estejam em progressão aritmética. Indique também as raízes.

R: *As raízes são* $\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_1+\mathrm{h}$ *e* $\mathrm{r}_1+2\,\mathrm{h}$ *e, como* $\mathrm{r}_1+(\mathrm{r}_1+\mathrm{h})+(\mathrm{r}_1+2\,\mathrm{h})=3$, *vem imediatamente* $\mathrm{r}_1+\mathrm{h}=1$. *Assim uma das raizes é* 1 *e portanto* $1-3-1+\mathrm{m}=0\Rightarrow\mathrm{m}=3$.

Dividindo $\mathrm{x}^3-3\,\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+3$ *por* $\mathrm{x}-1$, *obtem-se o cociente* $\mathrm{x}^2-2\,\mathrm{x}-3$ *que tem as raízes* -1 *e* 3. *As raízes do polinómio dado são pois* $-1,\ 1$ *e* 3.

6) Determine k por forma que os planos

$$\begin{aligned} x+\ \ y+z&=2\\ x-\ \ y+z&=0\\ x+2\,y-z&=1\\ 2\,x+\ \ y+z&=k \end{aligned}$$

tenham um ponto comum. Mostre que esse ponto é único e calcule as suas coordenadas.

Escreva as equações da recta que passa por esse ponto e faz ângulos de 45° com os eixos Ox e Oy (eixos coordenados triortogonais).

R: *A matriz do sistema é* $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&-1\\2&1&1\end{bmatrix}$

e, como $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=4$, *a característica de* A *é* $\mathrm{r}=3$. *Construindo o característico*

$$\Delta'_4=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&-1&1&0\\1&2&-1&1\\2&1&1&k\end{vmatrix},$$

terá de ser $\Delta'_4=0$ *o que implica* $\mathrm{k}=2$.

Como $\mathrm{r}=\mathrm{n}$, *o sistema será determinado e a sua solução obtem-se fàcilmente pela regra de Cramer:* $\mathrm{x}=0,\ \mathrm{y}=1$ e $\mathrm{z}=1$.

Como os cosenos directores da recta satisfazem à relação $cos^2\,\alpha+cos^2\,\beta+cos^2\,\gamma=1$ *vem*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+cos^2\,\gamma=1\Rightarrow cos\,\gamma=0\,.$$

A recta pretendida terá as equações normais

$$\frac{\mathrm{x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\mathrm{y}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\mathrm{z}-1}{0}\quad ou\quad \frac{\mathrm{x}}{1}=\frac{\mathrm{y}-1}{1}=\frac{\mathrm{z}-1}{0}\,.$$

Enunciados e resoluções dos n.os 5584 a 5586 de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Exame final da 6.ª cadeira — Epoca de Julho — 1962-1963.

(Responda apenas a quatro questões)

5587 — 1 — Considere o campo vectorial definido pelo vector $\mathbf{v}=v_1(x,y,z)\,\mathbf{i}+v_2(x,y,z)\,\mathbf{j}+v_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$ sendo v_1,v_2,v_3 funções contìnuamente deriváveis até à segunda ordem num certo domínio $\mathfrak{D}$.

a) Defina divergência e rotacional do campo e mostre que

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})=0\,.$$

b) Supondo que $\mathbf{a}$ é um vector constante mostre que

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{v})=-\,\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})\,.$$

2 — Mostre que as superfícies

$$x y + y z - 4 z x = 0 \quad \text{e} \quad -5 x + y + 3 z^2 = 0$$

tem planos tangentes perpendiculares no ponto (comum) $P = (1, 2, 1)$. Determine nesse ponto as equações cartesianas e equações vectoriais da tangente e do plano normal à linha intersecção das superfícies.

3 — a) Quando é que se diz que um sistema de funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ integráveis no intervalo $[\alpha, \beta]$ é ortogonal nesse intervalo?

Mostre que o sistema formado pelas funções

$$f_n(x) = \operatorname{sen}(n x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

é ortogonal no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Mostre que para $0 < x < a$ se tem

$$x = \frac{2a}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{a} - \cdots\right)$$

4 — Calcule o valor do integral

$$\iiint_{\mathfrak{D}} z \, d v$$

sendo $\mathfrak{D}$ o domínio limitado pelo plano $x O y$ e compreendido entre as superfícies de revolução obtidas por rotação em torno do eixo dos $z z$ das linhas

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, & z \leqslant 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{4} y^2 - 1, & z \leqslant 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

5 — a) Mostre que $y = x$ e $y = x e^x$ são soluções particulares da equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - x(x+2)\frac{d y}{d x} + (x+2) y = 0.$$

b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar, pelo método da variação das constantes arbitrárias, o integral geral da equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - x(x+2)\frac{d y}{d x} + (x+2) y = \frac{1}{2} x^3.$$

Enunciado de A. César de Freitas

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

155 — B. A. Trahtenbrot — **Algorithmes et machines à calcular** — Monographies Dunod — Dunod — Paris VI.

A teoria das funções recursivas, mais propriamente a TEORIA dos ALGORITMOS é um ramo da matemática com pouco mais de um quarto de século de existência, e que desempenha no século XX um papel equivalente ao da Teoria dos Conjuntos no século XIX e no correspondente desenvolvimento de toda a matemática dos nossos dias.

A presente monografia constitui uma iniciação na referida Teoria dos Algorítmos e traduz algumas das características fundamentais da Escola russa matemática contemporânea, de uma maneira geral, e particularmente neste domínio:

a) preocupação da ligação entre esta Teoria e os problemas de automatísmo, questões na ordem do dia na URSS.

b) preocupação de natureza pedagógica, essencial em domínios onde as complicações técnicas decorrentes do rigor necessário «encobrem por vezes a simplicidade do raciocínio».

c) preocupação de avaliar a potência máxima dos calculadores automáticos.

Na base deste livro situam-se conferências populares e exposições gerais realizadas pelo Autor, desde 1951, na pequena cidade de Penza, perante diversos auditórios, e vários artigos escritos no jornal elementar *Matemática na Escola* (n.os 4-5, 1956).

A exposição esclarece de forma particularmente feliz as duas noções de base da teoria dos algorítmos: a noção de algorítmo e a noção de autómato de memória infinita (máquina de Turing). Depois da descrição da noção de algorítmo, a diferença entre algorítmos pràticamente realizáveis e algorítmos realizáveis apenas teòricamente é exemplificada pela «táctica» e pela «estratégia» do jogo de xadres: este exemplo é precedido pelo estabelecimento dum algoritmo de estratégia, para certos jogos, pelo método «arborescente». Em seguida, o estudo das máquinas automáticas em geral e dos algorítmos ou «programas» para estas máquinas precede o estudo das máquinas de Turing e das máquinas universais. Finalmente nos últimos dois capítulos são tratados problemas algorìtmicamente insolúveis, os primeiros resultados dos quais, publicados em 1855 pelo jovem Novikov, produziram grande impressão no mundo matemático.

Esta pequena obra destina-se a matemáticos e engenheiros, mas pode ser lida por estudantes das escolas de engenharia e ciências, pois não exige conhecimentos profundos.

J. G. T.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1964 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºˢ 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºˢ 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática.* Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºˢ 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºˢ 16 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºˢ 51 a 75 cada número simples	17$50
N.ºˢ 78 a 93 » » duplo	35$00
N.ºˢ 76-77	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449