GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXV N.° 96-97 JULHO-DEZ. 1964

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXV — N.º 96-97 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JULHO/DEZ. — 1964

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Sobre uma generalização da fórmula de Taylor

por **F. Teixeira de Queiroz**

O estudo das funções de variável complexa reduz-se, quase exclusivamente, ao das funções holomorfas. Em consequência, um tal estudo, abandona, quase por completo, funções tão simples como $|z|$ ou tão importantes como as funções reais de variável complexa. A razão de ser dum tal abandono reside na impossibilidade de derivação, e na ausência dum método que substitua esta no estudo do comportamento de funções nas vizinhanças dum ponto.

Procuraremos nesta nota mostrar uma maneira simples de abordar o estudo das funções duma variável complexa de forma a permitir o estudo duma classe de funções muito mais geral que a das funções holomorfas. Reservamos para um artigo ulterior a apresentação duma aplicação à física matemática da matéria aqui desenvolvida.

1. O operador $\dfrac{D}{Dz}$.

Seja $z = x + iy$ (com x e y reais) uma variável complexa e $f(z) = X(x, y) + i\,Y(x, y)$ uma função dessa variável, definida num domínio ou em todo o campo complexo.

Seja z_0 um ponto interior a esse domínio. Designemos por $\dfrac{D}{Dz}$ o operador

$$(1) \qquad \frac{Df(z)}{Dz} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\uparrow} \frac{f(z)\cdot dz}{(z-z_0)^2}$$

em que Γ é o círculo de centro z_0 tal que $|z - z_0| = R$.

O operador $\dfrac{D}{Dz}$ assim introduzido faz corresponder, sempre que o limite exista, a toda a função $f(z)$ uma nova função de variável complexa. Além disso a fórmula de Cauchy garante-nos que

$$\frac{Df(z)}{Dz} = f'(z)$$

qualquer que seja a função holomorfa $f(z)$.

Desta forma, o operador acima introduzido é uma extensão do operador de derivação. Vê-se também, duma forma imediata que ele é não só linear como iterativo, e, que, se designarmos por $\dfrac{D^2}{Dz^2}$ o operador resultante dessa iteração, será

$$\frac{D^2 f(z)}{Dz^2} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\uparrow} \frac{\dfrac{Df(z)}{Dz}\cdot dz}{(z-z_0)^2}.$$

Da mesma forma, como quando $z \to z_0$ $\bar{z} \to \bar{z}_0$, pode-se definir o operador

$$(2) \quad \frac{Df(z)}{D\bar{z}} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{\downarrow}} \frac{f(z)\cdot d\bar{z}}{(z-\bar{z}_0)^2}.$$

Por iteração dos operadores (1) e (2) definem-se os operadores de ordem superior. Em particular, tem sentido falar no operador $\dfrac{D^2}{D z D\bar{z}}$, que não tem correspondente nas derivadas de funções holomorfas visto exigir destas propriedades contraditórias que só podem ser verificadas por constantes.

A definição dos operadores (1) e (2) está dependente duma passagem ao limite. Nada nos garante que tal limite exista quando aplicado o operador a uma dada função. É porém possível definir uma classe de funções na qual tem sentido a aplicação dos operadores $\dfrac{D}{Dz}$ e $\dfrac{D}{D\bar{z}}$. É isso que passamos a fazer:

2. Funções de classe C_n.

Diremos que, num ponto, uma função é de classe não inferior a C_n se, nesse ponto, a parte real e a parte imaginária da função admitirem derivadas parciais contínuas de ordem n em relação à parte real e à parte imaginária da variável. Diremos que a função é de classe C_n se for de classe não inferior a C_n mas já não for de classe não inferior a C_{n+1}.

Dada uma função de classe não inferior a C_n no ponto $z_0 = x_0 + i y_0$, pode escrever-se nas vizinhanças desse ponto

$$\begin{aligned} f(z) &= X(x,y) + iY(x,y) \\ &= X + \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \cdots + R_n + \\ &\quad + i\left(Y + \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \cdots + R'_n\right) \end{aligned}$$

em que as funções do segundo membro são calculadas no ponto x_0, y_0.

Será então, fazendo $z - z_0 = R e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} &= \frac{i}{R}\int_0^{2\pi} (X+iY)e^{-i\theta} d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial X}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial X}{\partial y}\sin\theta + \right. \\ &\left. + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\sin\theta\right)\right] e^{-i\theta} i\,d\theta + R_1 \\ &= \pi i\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right] + R_1. \end{aligned}$$

Donde

$$(3) \quad \frac{Df}{Dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

Duma forma análoga se provava ser

$$(4) \quad \frac{Df}{D\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Destas igualdades tiram-se imediatamente as seguintes propriedades dos operadores introduzidos:

Se $f(z)$ é uma função holomorfa de z

$$\frac{Df}{Dz} = f'(z).$$

É condição necessária e suficiente para que $f(z)$ seja uma função holomorfa de z que

$$\frac{Df}{D\bar{z}} = 0.$$

Portanto o operador inverso de $\dfrac{D}{Dz}$ só pode ser conhecido a menos duma função holomorfa de $\bar{z}$.

Sendo $dz = dx + i\,dy$, verifica-se, para toda a função de classe C_1, que

(5) $$\frac{Df}{Dz}dz + \frac{Df}{D\bar{z}}d\bar{z} = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right).$$

Se $Z = f(z)$ e $z = \varphi(u)$ são funções de classe C_1 será

(6) $$\frac{DZ}{Du} = \frac{DZ}{Dz}\frac{Dz}{Du} + \frac{DZ}{D\bar{z}}\frac{D\bar{z}}{Du}.$$

Tem-se

$$\frac{DZ}{D\bar{z}} = \overline{\frac{D\bar{Z}}{Dz}}.$$

Todas estas igualdades são de fácil dedução, para o que basta substituir nos primeiros membros os valores tirados de (3) e (4).

De (3) e (4) obtemos por iteração que

(7) $$\frac{D^2f}{Dz^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}\right)$$

(8) $$\frac{D^2f}{Dz\,D\bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right) - \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)$$

(9) $$\frac{D^2f}{D\bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}\right) - \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}\right)$$

conjunto de igualdades este que conduz à identidade

(10) $$\frac{D^2f}{Dz^2}dz^2 + 2\frac{D^2f}{Dz\,D\bar{z}}dz\,d\bar{z} + \frac{D^2f}{D\bar{z}^2}d\bar{z}^2 = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}dy^2 + i\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}dy^2\right).$$

Esta identidade pode ser generalizada para os operadores de ordem n. A demonstração faz-se por recorrência. Se admitirmos que a igualdade é válida para os operadores de ordem n, será, com $j+k=n$

(11) $$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{D^n f}{Dz^j\,D\bar{z}^k}dz^j\,d\bar{z}^k = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n X}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j\,dy^k + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n Y}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j\,dy^k.$$

Se a função for de classe não inferior a $n+1$, tal igualdade aplica-se às funções $\frac{Df}{Dz}$ e $\frac{Df}{D\bar{z}}$, podendo então escrever-se

$$\frac{Df}{Dz}dz + \frac{Df}{D\bar{z}}d\bar{z} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{D^{n+1}f}{Dz^{j+1}\,D\bar{z}^k}dz^{j+1}\,d\bar{z}^k + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{D^{n+1}f}{Dz^j\,D\bar{z}^{k+1}}dz^j\,d\bar{z}^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j dy^k(dx+i\,dy) + i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(-\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j dy^k(dx+i\,dy) + \right.$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j\,dy^k(dx-i\,dy)+$$

$$+i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j\,dy^k(dx-i\,dy)\Bigg]$$

Dado que é $\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}=\binom{n+1}{j}$, esta igualdade simplifica-se e mostra que a igualdade (11) ainda é válida para a ordem $n+1$. Como a igualdade é válida para a ordem 1, ela será válida para qualquer ordem inferior ou igual à da classe da função.

Como consequência da identidade (11) podemos escrever que se $f(z)$ é de ordem não inferior a C_n no ponto z_0, então

$$(12)\quad f(z_0+dz)=f+\frac{Df}{Dz}dz+\frac{Df}{D\bar{z}}d\bar{z}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{D^2f}{Dz^2}dz^2+2\frac{D^2f}{Dz\,D\bar{z}}dz\,d\bar{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{D^2f}{D\bar{z}^2}d\bar{z}^2\right)+\cdots+R_n$$

onde as funções do segundo membro são calculadas no ponto z_0.

Trata-se duma generalização da fórmula de TAYLOR.

Com efeito, se a função é de classe não inferior a C_n, as suas partes real e imaginária podem ser desenvolvidas pela fórmula de TAYLOR e, aplicando sucessivamente a identidade (11), obtém-se (12).

A igualdade (12) permite fazer o estudo local duma função não holomorfa e a extensão a estas de grande número de propriedades das funções holomorfas.

Como aplicação da fórmula deduzida consideremos os primeiros termos do desenvolvimento de $|z|=X(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, num ponto diferente da origem. Temos

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{x}{|z|},\ \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y}{|z|},\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\frac{y^2}{|z|^3},$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{|z|^3},\quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=\frac{x^2}{|z|^3}$$

ou seja

$$\frac{D|z|}{Dz}=\frac{\bar{z}}{2|z|},\ \frac{D|z|}{D\bar{z}}=\frac{z}{2|z|},$$
$$\frac{D^2|z|}{Dz^2}=-\frac{\bar{z}^2}{4|z|^3},\ \frac{D^2|z|}{Dz\,D\bar{z}}=\frac{|z|^2}{4|z|^3},$$
$$\frac{D^2z}{D\bar{z}^2}=-\frac{|z|^2}{4|z|^3}$$

e portanto

$$|z+dz|=|z|+\frac{\bar{z}}{2|z|}dz+\frac{z}{2|z|}d\bar{z}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{\bar{z}^2}{4|z|^3}dz^2+2\frac{|z|^2}{4|z|^3}dz\,d\bar{z}-\right.$$
$$\left.-\frac{z^2}{4|z|^3}d\bar{z}^2\right)+R_3.$$

Se considerarmos apenas valores reais e acréscimos reais da função, teremos

$$|x+dx|=|x|+h(x)\,dx+\delta(x)\,dx^2+R_3$$

em que fàcilmente se reconhece serem $h(x)$ e $\delta(x)$ respectivamente a função de HEAVISIDE e a distribuição de DIRAC.

Apesar da função considerada não ser de classe C_1 na origem, ainda é possível, a partir de (1) e (2), calcular os operadores nesse ponto verificando-se que

$$\frac{Dz}{Dz}=\frac{Dz}{D\bar{z}}=\frac{D^2z}{Dz^2}=\frac{D^2z}{D\bar{z}^2}=0$$
$$\frac{D^2z}{Dz\,D\bar{z}}=+\infty.$$

La Inducción Matemática

por **Eduardo H. del Busto**

(Conclusão do número anterior)

3. 2. El clérigo Francisco Maurolico, citado bajo las formas latinizadas de sus nombres por Franciscus Maurolicus o Maurolikus (conocido por la dialectización itálica de Marullo o la pronunciación esdrújula de su apellido, originariamente grave) nació en Messina (Sicilia) en 1494 y murió en la misma ciudad, donde había residido, en el año 1575. Era de ascendencia griega.

Por la larga y talentosa labor que desplegó como astrónomo, poeta, historiador, matemático y profesor, sus conciudadanos le tuvieron en gran estima y le dieron el apodo de *Segundo Arquímedes*. En lo que respecta a nuestro ensayo, el apodo es merecido y elocuente de por sí.

Escribió sobre aritmética especulativa, sobre perspectiva (materia donde demuestra conocer el método de la proyección central), sobre óptica (tema que le debe la primera explicación cientifíca de la función que cumplen las gafas), sobre música (ciencia matemática según la tradición pitagórica), sobre álgebra, sobre esférica, sobre el astrolabio y la gnomónica.

Se conoce la nómina de las obras de Maurolico por una carta dirigida al Cardenal Bembo, pero la gran mayoría de los escritos del maestro siciliano se han perdido. Se le adjudican una Cosmografía, 1543, muy citada, y un tratado de álgebra que no se ha conservado. Parte de sus escritos se hallan en el libro intitulado *Opuscula Mathematica*, 2 vol., publicado en Venecia en 1575, obra interesante cuyo primer volumen proviene de una redacción de 1553, y cuyo segundo volumen incluía los *Arithmeticorum libri duo,* escritos en 1557 y publicados en volumen aparte en 1580.

Referente a la aritmética, Maurolico no se salió grandemente del estudio de los neopitagóricos Teón de Esmirna y Nicómaco de Gerasa. Es evidente el profundo conocimiento que tenía de los libros aritméticos euclídeos, según se infiere con facilidad observando su copiosa obra de erudito y crítico traductor. En efecto, examina y considera insuficiente la edición que de los *Elementos* euclídeos había hecho en 1505 el veneciano Bartolomeo Zamberti, uno de los responsables del apelativo erróneo atribuido por largo tiempo a Euclides («Euclides *Megarensis*, philosophi platonici», decía equivocadamente).

Maurolico tradujo al latín los *Phenomena* de Euclides.

Tampoco satisfizo al erudito siciliano la edición de las *Cónicas* de Apolonio, publicada por el veneciano Memo en 1537; edición incompleta, que sólo comprendía los cuatro primeros libros, ya que los restantes aún no habían sido hallados. En una publicación, Maurolico se aventuró a conjeturar el contenido de los libros quinto y sexto. Cuando posteriormente se descubrieron las versiones árabes de aquellos dos libros, se comprobó que Maurolico habia acertado en cuanto a la materia del VI; no así en cuanto al V. El acierto significa la agudeza del siciliano; y el desacierto, con ser tal, prueba, no obstante, que Maurolico es el primer innovador en la teoría de las cónicas, después de Apolonio. En ambas cosas demostraba talento creador.

Realizó otros estudios geométricos como

los correspondientes al geómetra Sereno, y se dedicó a profundas reflexiones sobre las obras astronómicas de Autolico de Pitana, Teodosio de Trípoli y Menelao de Alejandría, todas ellas traducidas al latín por Maurolico.

Así como Regiomontano recomendó el uso de la tangente (con ventajas sobre el seno y el coseno), Maurolico, como después Georg Joachin-aquel discípulo de Copérnico llamado corrientemente Rhaeticus (1514 a 1577) — recomendó el empleo de una nueva línea trigonométrica que definió y tabuló para valores de 0° a 45° en la *Tavola benefica*, 1558. Dicha línea fue bautizada por Fincke con el nombre de *secante*.

Maurolico prestó gran atención a las obras de Arquímedes de Siracusa, el genial geómetra helenístico (también de Sicilia) con quien se lo iba a parangonar. Le interesó el tema concerniente a los centros de gravedad, renovando el impulso de su estudio en Europa donde, por entonces, se desconocían los trabajos árabes en torno a esta ciencia arquimediana. El clérigo de Messina es, pues, el primer europeo que retorna a ella.

Acaso el excesivo celo platónico por menospreciar las cosas tangibles había apartado a los científicos europeos de aquel *método* de Arquímedes, simbiosis de mecánica y arte deductivo, de tantos logros en la teoría del baricentro, en los problemas de cuadraturas y en otras conquistas del famoso defensor de Siracusa. A pesar del veto de los platónicos, Maurolico pone su atención, precisamente, en la determinación de los centros de gravedad, porque cree que por allí pasa el buen camino que le ayudará a resolver el problema de la trisección del ángulo. Estaba equivocado, sí, pero lo que nos importa destacar es que no vacila en echar mano a estudios no muy ortodoxos desde el punto de vista platónico, y que en buena medida — como se ve en «El Método» de Arquímedes —, se basan en la Física más que en la Matemática pura. Sabido es que Arquímedes los empleaba como recursos de descubrimiento, hábiles para sopesar conjeturas de origen empírico.

Los estudios, las ediciones críticas y las traducciones de Maurolico se difundieron en todos los centros cultos de Europa, donde cundió su fama de profundo conocedor de Euclides, Arquímedes, Apolonio, aparte de su reconocida versación en un cúmulo de materias diversas. Por eso sus enseñanzas y sus lecciones se recordaban y alababan mucho tiempo después de su muerte.

La biografía del clérigo siciliano se ha recogido en tres obras fundamentales:

— «Vida de Maurolico escrita por su sobrino», 1613;

— D. Scina, *Elogio di Francesco Maurolico*, Palermo, 1808;

— C. Macrì, *Maurolico nella vita e negli scritti*, Messina, 1901.

Respecto del principio de inducción completa, lo que se ha atribuido a Maurolico merece comentario aparte.

3. 3. En el primero de los *Arithmeticorum libri duo*, Maurolico emplea razonamientos donde se exhiben procesos hereditarios, como hemos venido llámándolos hasta aquí. Al efectuar la demostración de las proposiciones 13, 15, 65, 66 y 67, Maurolico razona sin mayores variantes en la forma, pero dándose perfecta cuenta de que se halla empleando un procedimiento demostrativo especial y diferente de otros muy comunes en la matemática.

Así, al iniciar el tratamiento de un conjunto de proposiciones aritméticas, declara abiertamente que está «anhelando muchas veces demostrarlas por un camino más fácil» y — prosigue — «o bien hacer la demostración de algunas antes descuidadas u olvidadas». El camino *más fácil*, en el decir de Maurolico, es el método de recurrencia.

En efecto, el asunto que preocupaba a Maurolico en las proposiciones antes enumeradas, se refería a ciertas propiedades numéricas. Presentaba una tabla de números en la disposición que sigue, y preguntaba por algunas relaciones entre diversas columnas de enteros positivos.

Observemos primero la tabla.

Números enteros	Pares	Impares	Triangulares	Cuadrados	Números de la forma $n(n-1)$
1	0	1	1	1	0
2	2	3	3	4	2
3	4	5	6	9	6
4	6	7	10	16	12
5	8	9	15	25	20
6	10	11	21	36	30
7	12	13	28	49	42
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	e_n	o_n	t_n	s_n	L_n

En la nomenclatura de Maurolico, los números de la misma fila y distinta columna se llaman *colaterales*.

En los subpárrafos *a*), *b*), *c*) y *d*) transcribimos cuatro de los teoremas demostrados por Maurolico de acuerdo con ese camino más fácil que él mencionaba. En *c*) y *d*) vamos a transcribir también la demostración del siciliano; no así en *a*) y *b*), donde rigen los mismos métodos, pero no consideramos necesario dilatar la extensión de este capítulo con simples repeticiones.

a) *Los números impares se obtienen de la unidad por sucesivas adiciones del* 2.

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$o_n + 2 = o_{n+1})$$

b) *Un número cuadrado más el impar colateral del siguiente da el cuadrado siguiente.*

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$s_n + o_{n+1} = s_{n+1})$$

c) *Todo entero más el entero que le precede iguala al número impar colateral del primer entero.*

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$n + (n-1) = o_n)$$

Demostración de Maurolico. El entero 2 más el 1 da el entero 3, impar colateral del 2. Además, $2 + 3 = 5$, número que en virtud de la proposición *a*) es impar. Pues bien, cuando a 4 le sumamos 3, le estamos sumando un 2 al 5, y esto da 7, colateral del 4. Y así *ad infinitum.*

d) *La suma de los* n *primeros impares es igual al* n*-ésimo número cuadrado.*

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$o_1 + o_2 + \cdots + o_n = s_n)$$

Demostración de Maurolico. Vemos que $1 + 3 = 4$, segundo número cuadrado. Este 4 agregado al tercer impar, que es 5, da 9: tercer número cuadrado. Análogamente, $9 + 7 = 16$, cuarto número cuadrado. Y así sucesivamente. La proposición queda demostrada apoyándosela en un teorema anterior de Maurolico: «Todo número cuadrado más el siguiente impar iguala al cuadrado siguiente».

Fijémonos bien en el procedimiento seguido en la demostración de estas proposiciones. En primer lugar, se hace la verificación de la propiedad para un primer elemento; después se busca convalidar dicha propiedad respecto de un elemento diverso del primero; por fin, se observa que el proceso es hereditario y que continúa, sin modificaciones, indefinidamente. ¿Qué significa este «indefinidamente» sino la *totalidad* de los casos?

La semejanza del método de Maurolico y el de Arquímedes es perfecta. La índole de los teoremas expuestos según este método por el clérigo de Messina, es aritmética; pero el esquema es enteramente igual al empleado por el autor de *Sobre el equilibrio de planos.*

3. 4. Quien primero llamó la atención de los matemáticos sobre el proceso inductivo de Francesco Maurolico fue el historiador italiano Giovanni Vacca, quien, aparte de unas breves notas que había agregado al *Formulaire de Mathématiques* de Peano (el primero de cuyos cinco volúmenes apareció en Turín en 1895) con motivo del principio de inducción matemática, escribió también, en 1903, una investigación más prolija publicada después en el *Bulletin of the American Mathematical Society,* tomo XVI (1909-1910), pág. 70, bajo el elocuente título de.

«Maurolycus, the first discover of the principle of mathematical induction».

Los comentarios de Vacca fueron reproducidos en la *Revue de Métaphysique et de Morale,* año 1911, pág. 30.

No cabe duda que las afirmaciones de estos artículos debían de resultar muy interesantes por entonces, pues hasta ese momento predominaba la opinión de Moritz Cantor, quien atribuía a Pascal el descubrimiento (o el explícito reconocimiento) del método de inducción matemática.

La tesis sostenida por Giovanni Vacca no se remonta a Arquímedes y, además, deja la impresión de que dicho método surge en Maurolico sin precedente ninguno. El retroceso hasta Arquímedes, no obstante, nos parece en la actualidad muy comprensible, atendiendo a la función desempeñada por el clérigo siciliano en su larga trayectoria como erudito crítico y traductor de obras de los clásicos griegos, en los cuales ha inspirado sus mayores éxitos.

W. H. Bussey (de Minesota) es autor de un artículo titulado «The origin of the mathematical induction», *The American Mathematical Monthly,* XXIV, 1917, pág. 199, en donde la tesis de Giovanni Vacca está desarrollada e iluminada con ejemplos oportunos y comentarios sumamente precisos, tan necesarios para comprender mejor el pensamiento de Maurolico, cuyas obras no son de fácil acceso para el lector corriente.

PASCAL, FERMAT Y OTROS, SOBRE EL MISMO TEMA

4. 1. Se admite por lo común que uno de los opúsculos más significativos de Blaise Pascal (1623 a 1662) es el que lleva por título *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader.* No se sabe bien cuándo fue escrito, aunque se presume data de 1654 o, a más tardar, de 1658.

Era hacia 1655 cuando Pascal ingresaba al monasterio cirterciense de Port-Royal, cerca de París, el más célebre centro de disputas teológicas y de las más sutiles elucubraciones lógicas de toda Francia. Era hacia 1654 cuando Pascal concluia el *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière.*

Correlacionando las fechas antes citadas, es fácil comprender que el genial francés pasaba por un período particularmente fecundo dentro de su corta vida, sumido en profundas reflexiones acerca de cuestiones lógicas y en los diversos modos de razonamiento.

Por ello no debe extrañarnos que, aún cuando se entretuviese considerando las propiedades del *triángulo aritmético,* se preocupara tanto por poner en plena luz el proceso argumental seguido por él al establecer la verdad de un teorema. El tema es de Combinatoria (si bien esta palabra no estaba en uso todavía) y, al tratarlo con detalle, llega a una proposición — por Pascal denominada *Consecuencia 12* — cuya demostración realiza por inducción completa.

Va de suyo que el autor del *Traité,* movido por su finísimo espíritu lógico, expone las fases del proceso de recurrencia con una justeza, claridad y elegancia que carecen de precedentes.

Por no entretener al lector con comentarios largos (por ejemplo, acerca de la definición y denotación del triángulo aritmético), nos limitamos a glosar la observación que precede a la prueba de la citada Consecuencia 12, donde se ofrece el esquema pascaliano de la inducción completa.

Poco más o menos, dice Pascal: «Aunque esta proposición (la Consecuencia 12) tenga una infinidad de casos, daré de ella una demostración muy corta suponiendo *dos* lemas:

«El primero, evidente por sí mismo, es que la proposición es cierta en un primer caso, como se verifica con sólo observar la disposición del triángulo;

«El segundo, que si la proposición vale en un caso *cualquiera*, valdrá *necesariamente* en el siguiente.

«De donde surge que vale necesariamente en todos los casos, pues vale en el primero por el primer lema; entonces por el segundo lema vale en el segundo caso; entonces, en el tercero, y así hasta el infinito».

Esta certera y luminosa explicación de Pascal precediendo a la famosa Consecuencia 12, indujo a Moritz Cantor a afirmar que en ella se halla el primer empleo completo y sistemático del principio de inducción. En verdad, nadie lo había enunciado antes con tan notable precisión.

Blaise Pascal utiliza el mismo principio en la demostración de varias proposiciones de combinatoria, como son las números 9, 10 y 11 del *Traité des ordres numériques*. Pero nos informa, también puntualmente, que su venerado amigo Pierre de Fermat (1601 a 1665), en ocasión de haberse ocupado de análoga materia, había llegado a una consecuencia similar a la 12 de Pascal, salvo acaso en el enunciado.

En el *Traité du triangle arithmétique* Pascal no cita a Maurolico. Pero conocía bien la obra del siciliano, pues, en una carta dirigida al Consejero del Rey Pierre de Carcavi, fechada en 1658, en la cual da cuenta de sus estudios sobre el centro de gravedad, materia de estirpe arquimediana que le obliga a ciertas digresiones sobre propiedades numéricas, manifiesta textualmente Pascal:

«Cela est aisé par Maurolic et de là paraît la verité de ma proposition».

4. 2. Sin duda, también conocía Pascal la obra de Bachet, según lo deja entrever la copiosa correspondencia mantenida con Pierre de Fermat con relación al Cálculo de Probabilidades y a cuestiones anexas a la teoría de los números, donde ambos franceses habían incursionado — en forma particularmente sobresaliente, Fermat — prosiguiendo la trayectoria marcada por Diofanto de Alejandría trece siglos antes.

Claude-Gaspar Bachet, Señor de Méziriac (1581 a 1638), fue un erudito humanista francés cuya gloria mayor consiste en la edición crítica de la *Aritmética* de Diofanto, obra a la cual enriqueció con notas y comentarios substanciales, característicos de un matemático profundo.

La Historia lo recuerda asimismo por los *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres,* libro donde se reinicia la vía de la matemática recreativa, interrumpida en la *Antología griega*, corriente en la Edad Media. Compuso además unos *Elementos de aritmética,* que no dio a la prensa, pero, sobre todo, se destaca por haber reactivado el interés por las disciplinas algebraicas, hasta entonces tenidas muy en menos en virtud del incuestionable predominio de los estudios geométricos euclídeos.

Se suele citar a Bachet entre quienes hacían uso de la técnica de la inducción completa de Maurolico, antes del mismo Pascal. Por ese conducto acaso, también sea heredero Pascal de Maurolico.

4. 3. Sería injusto e históricamente incorrecto no detenerse un instante en Pierre de Fermat (1601 a 1665) al trazar el desarrollo del razonamiento por recurrencia. Fermat, de quien Pascal había dicho

«celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre».

había estudiado los libros de Diofanto en la edicción de Bachet, utilizando los márgenes del texto para anotar, muy sumariamente, algunos de los más notables resultados de la teoría de los números.

Aparte de esas notas muy poco ha dejado escrito Fermat y menos aún acerca de los métodos de descubrimiento y demostración usados por él. No obstante, existe una carta que le remitió al matemático aficionado Pierre de Carcavi, en la cual se explica el *método del descenso infinito,* por otro nombre, *método de las cascadas*, del que daremos una ligera idea.

Fermat no era un matemático profesional, sino un probo funcionario que en sus momentos de ocio se entretenía con las matemáticas. En uno de esos momentos descubrió que *todo número primo de la forma* $4n+1$ *es la suma de dos cuadrados,* como por ejemplo, $13=3^2+2^2$, $17=4^2+1^2$, $101=10^2+1^2$, etc. La demostración del teorema no fue dejada por Fermat, pero, en el año 1659, en carta a Carcavi, menciona las dificultates que había tenido para procurarse la prueba, a la cual había llegado — dice — utilizando un «nuevo procedimiento» cuya descripción es como sigue:

Parto — nos dice Fermat — suponiendo lo contrario de lo que voy a demostrar y, así, supongo que algún número primo de la forma $4n+1$ no es la suma de dos cuadrados. Entonces *demuestro* que existe otro número primo, *menor que aquél* y también de forma $4n+1$, que tampoco es suma de dos cuadrados. De este caso, a mi vez, desciendo a otro primo menor todavía pero de la misma forma, que tampoco es suma de dos cuadrados. Y contínúo así hasta llegar al 5, el menor de todos los primos de la forma $4n+1$, del cual en virtud de la demostración que vengo siguiendo debo afirmar que no es igual a la suma de dos cuadrados. He aquí, al cabo, una contradición, pues $5=2^2+1^2$.

La contradición proviene de haber supuesto un número primo de la forma $4n+1$ que no sea suma de dos cuadrados. Queda, pues, demostrado por el absurdo el teorema descubierto por Fermat ··· Lástima grande que su descubridor no nos explicó cómo se trasladaba de un caso al anterior, para obtener la certeza de que la propiedad erróneamente supuesta se transfería en forma necesaria durante el retroceso. Por ello el talento de Leonhard Euler (1707 a 1783) consumió siete años en búsqueda de la demóstración del teorema de Fermat, hallándola por fin.

El método de las cascadas es de muy difícil aplicación, porque no se halla, por lo general, la manera de retroceder deductivamente y llegar a un primer caso donde se advierta la contradicción. Por esta razón, el método de Fermat no alcanzó la difusión que podía preverse dado lo sencillo que parecía.

El descenso infinito se basa en un principio y en un tipo de razonamiento probablemente conocidos ya por Giovanni Campano de Novara, capellán de Urbano IV y traductor de los *Elementos* de Euclides al latín (1482). En la traducción (que incluye los libros XIV y XV hoy tenidos por apócrifos) Campano anota la necesidad de admitir un *nuevo postulado* para poder fundar la aritmética, a saber: «todo grupo de números admite un mínimo».

Pues bien, en la precitada carta a Carcavi, Fermat explica el descenso infinito partiendo del principio de que *un entero positivo no puede ser disminuido indefinidamente,* cosa que en términos actuales se reseña con el nombre de postulado de la buena ordenación. El método de Fermat incluye, como el principio de inducción completa, un ingrediente hereditario; pero, en lugar de demostrar cómo pasa ese ingrediente de un caso al siguiente, prueba cómo retrocede al anterior hasta arribar al primero de la sucesión, donde la proposición resulta falsa por evidencia inmediata. Como sostiene Giovanni Vacca, el método del descenso infinito es una metamorfosis del principio de inducción completa, pues la buena ordenación de los números naturales permite deducir dicho principio, y recíprocamente, como el lector sabe bien.

Aparte de Euler, fue Joseph-Louis, conde de Lagrange (1736 a 1813) y unos pocos matemáticos más quienes aplicaron el método de Fermat, de cuya dificultad demostrativa hemos hablado.

4. 4. En cambio, el procedimiento demostrativo empleado por Pascal era más sencillo y el principio sustentador estaba enunciado con lucidez sin precedentes en el *Traité du triangle arithmétique*.

Jakob I Bernoulli (1654 a 1705), de honda huella en Probabilidades, en Combinatoria y en muchas otras disciplinas matemáticas, hizo a partir de 1686 el más extenso desarrollo del principio enunciado por Pascal, dejándolo incorporado definitivamente a las técnicas demostrativas. Su *Ars conjectandi* contiene tan notables aplicaciones del procedimiento en el estudio de las series y en la combinatoria, que algunos pensadores (como Ernst Mach, por ejemplo) no han vacilado en llamar método de Bernoulli a la demostración por recurrencia.

TEOREMA O AXIOMA

5. 1. (Julius Wilhelm) Richard Dedekind (1831 a 1916) pretendió fundamentar los números y la aritmética toda a partir de ideas primitivas un tanto remotas respecto del concepto corriente de entero natural. Algo similar intentó también Georg Cantor, aunque en una dirección y con un alcance que no conciernen a nuestro tema.

En el difundido libro de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* (primera edición 1888, segunda edición 1893, tercera edición 1911) se elabora la magistral teoría partiendo de cinco ideas primitivas antepuestas a la de número natural. El propósito es deducir éste de aquellas ideas primitivas.

No menos de cinco definiciones especiales exige el punto de vista de Dedekind: (1) representación o aplicación de una clase, (2) cadena, (3) cadena de un elemento, (4) inducción completa en enunciado muy generalizado, (5) sistema simplemente infinito.

La representación, φ, es una correspondencia biunívoca o plurívoca entre los elementos a de una clase A y los elemetnos $a_{\prime}$ de una clase A'. En caso de ser la correspondencia biunívoca, la representación y las clases respectivas se dicen *semejantes*.

La semejanza es una relación ecuable y, por tanto, posibilita la clasificación de las clases por semejanza con una clase dada.

La representación de una clase *en sí misma* es una correspondencia que se establece entre los elementos de una misma clase. Cuando existe tal tipo de representación en sí misma ocurre que $A' \subset A$.

Si C es una parte de A y es φ una representación de A en sí misma, y si además $\varphi(C) \subset C$, entonces C se llama *cadena de* A *respecto de* φ. (Sí φ fuese biunívoca, el lector comprenderá que la cadena de A no podría ser finita).

Siendo a un elemento cualquiera (o una colección cualquiera de elementos) de una clase, pueden existir muchas cadenas respecto de la representación plurívoca φ, que contengan a a. La intersección o parte común de todas esas cadenas se denota por A_0 y se llama *cadena de* a *respecto de* φ (1).

Con el recurso de todas estas nociones previas Dedekind pasa a demostrar la forma generalizada de la inducción completa, con el enunciado:

«Sea a un elemento cualquiera (o una colección cualquiera de elementos) de una clase A. Sea dada φ. Hállese en A la intersección de A' con la cadena de a. Entonces se deduce que la cadena de a está contenida en A».

La proposición anterior, algo abstrusa a primera vista, es análoga al principio de inducción matemática, del cual difiere sólo en dos puntos: no requiere la particularización de un elemento primero y no exige que la representación sea biunívoca. Nos interesa destacar que Dedekind *demuestra* esa proposición como *teorema* dentro de su teoría general.

Con la inducción completa generalizada y con la noción adicional de *clase simplemente infinita* (Clase N que admite una representación semejante φ sobre sí misma, respecto de la cual N resulta cadena de un elemento no contenido en $\varphi(N)$), Dedekind arriba finalmente al concepto de número natural (ordinal).

Se ha reprochado a tan maravillosa construcción el empleo de argumentos extramatemáticos (Se cita, por ejemplo, éste: «Existen clases infinitas porque el espíritu tiene la facultad de hacer objeto de pensamiento a todas las cosas»). Pero aún ello aparte, el principal defecto es no ser clara la concepción. Nada se gana — y, al contrario, mucho se pierde — haciendo descender la idea de número natural, que se posee en forma intuitiva, de una sistematización mental artificiosa y lamentablemente oscura.

5. 2. El italiano Giuseppe Peano (1858 a 1932) se decidió por una actitud más práctica y sencilla: la de considerar al número natural directamente, dando de él una definición implícita por vía axiomática. Este punto de vista se halla expuesto en sus *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* 1889, y reiterado en *Sul concetto di numero* (Riv. mat., 1891), en *Aritmetica generale ed Algebra elementare*, 1902, y, sobre todo en las páginas del muy famoso *Formulaire de Mathématiques* antes citado, libro éste que funda la escuela matemática italiana más importante del siglo XX.

Como se sabe, las ideas primitivas sobre las cuales Peano fundamenta axiomáticamente el número natural, son apenas tres: *número, primer elemento o unidad* y *siguiente;* todas ellas muy próximas a nuestro conocimiento directo y sin apelación a sistemas argumentales especiales, al contrario de lo realizado por Dedekind. Aquellas tres ideas primitivas quedan caracterizadas por los *cinco axiomas de Peano*, el quinto de los cuales constituye el principio de inducción completa: «Si S es una clase de números que contiene a la unidad, y si la clase formada por los siguientes de los elementos de S está contenida en S, entonces todo número está contenido en S».

Pero el quinto postulado de Peano no es tan claro e intuitivo como los cuatro que le preceden. Esto se advierte de inmediato cotejando los enunciados. Peano lo mantiene por su notoria utilidad, pues junto a los demás postulados permite una rápida caracterización de la operación de suma y de la relación de orden, llegando luego a la demostración de un teorema que equivale a declarar que los números naturales gozan de la propiedad de la *buena ordenación*.

Alessandro Padoa (1868 a 1937), en la *Revue de Mathématiques* dirigida por Peano,

(1) Por ejemplo, si a es el número *15*, la *cadena de* 15 *respecto de la relación* «menor que» entre números naturales, será la intersección de todas las clases de números no menores que *15*.

El lugar apropriado de este ejemplo vendría mucho más adelante en la teoría de Dedekind.

elaboró entre 1902 y 1906 una fundamentación más severa, apoyándose solamente en dos ideas primitivas: la de *número* y la de *siguiente*. Necesitó enunciar cuatro axiomas, el último de los cuales es, de nuevo aquí, el principio de inducción completa.

En 1908, Mario Pieri (1860 a 1913) modifica aún más la axiomática de la escuela italiana, movido por la opinión de que el principio de inducción completa es una proposición más complicada que la de los restantes axiomas. Así, empleando como ideas primitivas la de *número* y la de *siguiente*, propone cuatro axiomas, el último de los cuales reemplaza a la inducción completa y es el principio de la *buena ordenación:* «En cualquier clase no nula de números, existe por lo menos uno que no es el siguiente de ningún número de la clase».

Al revés de lo que hacen Peano y Padoa, Pieri sienta como axioma la buena ordenación y deduce luego, como teorema, la inducción completa. El trabajo de Pieri se titula *Sopra gli assiomi aritmetici* y apareció en el Boll. dell'Accademia Gioenia de Scienze Naturali di Catania. La deducción del principio de recurrencia es similar a la que presentamos en el párrafo 5.3.

5. 3. Por tratarse de una obra que contribuyó a formar buena parte de los matemáticos de la segunda y tercera décadas del siglo XX, vamos a citar el libro de E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series.*

El camino seguido parte del postulado de que el conjunto de los números naturales está bien ordenado, es decir, cualquier subconjunto de él, posee un primer elemento.

Esto admitido, se enuncia el

«*Teorema de la inducción completa.*» Para demostrar que una propiedad P de los números naturales es general para todos los números mayores o iguales que uno de ellos llamado m, basta verificar:

a) que P se verifica para m;

b) que supuesto que P se verifica para $n \geqq m$, se prueba que P se verifica para $n+1$ ».

Demostración por el absurdo. Llamaremos M al conjunto de naturales donde P no se verifique. M tiene un elemento mínimo según el postulado de la buena ordenación; sea p ese elemento mínimo. Digo que debe ser $p < m$.

En efecto, si fuera $p = m$, el enunciado a) nos asegura que p verifica la propiedad P; si fuera $p > m$, el número $p - 1$ (que es mayor o igual a m), por ser menor que p, verifica a P; y, por el enunciado b), el siguiente de $p-1$ (es decir, p) verificará también a P, contra lo supuesto.

Entonces, p (y lo mismo vale para los demás elementos de M) debe ser menor que m. O sea, todos los números mayores o iguales a m satisfacen a P.

(5. 3. 1) Si se desea una demostración más elegante y moderna, aconsejaríamos tomar el texto de Lucienne Félix, *Exposé moderne des mathématiques élémentaires,* Dunod, París, 2a. edición. Helo a continuación.

Si se trata de alguna propiedad tal que respecto de un número $a \in N$ no puede sino ser verdadera o falsa, entonces el teorema de la demostración por recurrencia asume la siguiente expresión:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1. & \text{La propiedad es verdadera para } a = 1; \\ 2. & [\forall p \in N\text{: verd. para } a = p] \Rightarrow \\ & \Rightarrow [\text{verd. para } a = p+1] \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{verd. } \forall a \in N].$$

Demostración. Repartimos N en dos subconjuntos: el V donde la propiedad es verdadera, y el F, donde es falsa. Como se cumplen 1 y 2, vamos a probar que es imposible que F no sea vacío.

En efecto, si F no es vacio, por la *buena ordenación* de los números naturales debe contener un primer elemento q. Este q no puede ser 1, por la primera condición del enunciado. Entonces, es mayor que 1 y $q-1$ existe.

El número $q-1$ pertence, pues, a V; pero la segunda condición del enunciado impone que $q-1+1=q$ pertenezca a V, lo cual contradice la hipótesis de que q pertenece a F. Luego F es vacío.

5. 4. Queremos sintetizar las observaciones que la lectura de este capítulo nos conduce a formular casi insensiblemente.

El punto de vista de Dedekind logra introducir el principio de recurrencia como un teorema. Pero el precio pagado por esta conquista es muy alto. Por una parte, necesita una construcción demasiado vasta sostenida por ideas primitivas poco claras y alejadas de nuestro conocimiento directo. Por otra parte, dicha construcción queda sin consolidar a su vez; y esto no sería lo peor, sino que se basa en razonamientos extramatemáticos sobre cuya autenticidad no queda más recurso que aceptarlos por actos de fe.

La fundamentación ofrecida por la escuela matemática de Peano es al comienzo más sincera. El método axiomático no discute filosóficamente la cimentación de una teoría matemática. Acepta las cosas tal cual se usan en esa teoría y evita dar definiciones explícitas de aquellos conceptos primordiales sobre los cuales se edifica. Los axiomas revelan el esquema fundamental que enlaza las ideas primitivas y dan lugar a la derivación deductiva de las propiedades subsiguientes. Es claro que no consiguen — ni procuran — dilucidar problemas concernientes a la íntima esencia del quehacer matemático.

Pero aún así, autores como Pieri no se manifiestan insensibles al tipo de axiomas que escogen. Acaso por una actitud cuyas raíces se encuentren rastreando la problemática que dio origen a las geometrías no euclidianas, advierten que algunos postulados son «más complejos» que otros. Pieri nota esta *peculiaridad* en el axioma de la inducción aceptado por Peano y por Padoa, y, para quedar en paz con su conciencia, propone reemplazarlo por el axioma de la buena ordenación. Con este axioma, la inducción completa pasa a ser un teorema···, aunque, fuerza es reconocerlo, un teorema también *muy peculiar*.

¿ Se reducirá todo entonces, a gustos ?

No. La cuestión pasó a mayores todavía. Históricamente, la afirmación de Henri Poincaré acerca de la lógica y de la matemática (afirmación de la que daremos noticias en el capítulo siguiente) es la primera responsable de una dilatada controversia mantenida por quienes creen que el principio de recurrencia resulta de la aplicación lisa y llana de la lógica ordinaria (y, en particular, del principio de contradicción), en contra de los que creen en la naturaleza extralógica de la inducción matemática.

FILOSOFIA, MATEMATICA E INDUCCION COMPLETA

6. 1. Los filósofos del siglo XIX que se dedicaron al examen de los fundamentos de la inferencia, tuvieron que prestar atención al método de la inducción que los matemáticos venían aplicando en forma más o menos explícita desde muy antiguo, y cuyo esquema habían trazado con claridad Pascal y Bernoulli.

Era notoria la necesidad de distinguir entre la inducción en general, de cuyos frutos se sustenta la ciencia de la naturaleza, y la inducción (axioma o teorema) de que echan mano los matemáticos. Fue el original matemático inglés Augustus de Morgan (1806 a 1870) quien propuso para esta última la designación especial de *inducción sucesiva*, después llamada *inducción matemática* por Poincaré y, posteriormente aún, *inducción completa*.

La obra principal de Augustus de Morgan sobre el particular es *Formal Logic,* 1847.

La palabra *inducción* no es feliz al ser aplicada a argumentaciones matemáticas, predominantemente deductivas. El francés Jacques Hadamard (n. 1865) en la *Encyclopédie Francaise,* por ejemplo, utiliza la denominación de *razonamiento por recurrencia* para el tipo de argumentación que sirve para *cualquier* elemento de una sucesión si se lo basa sobre la idea de *siguiente.* Sin embargo, como la matemática emplea razonamientos que también han sido llamados *de recurrencia* y que valen en el dominio de los números transfinitos, recomiéndase designar por *recurrencia simple* a la inducción matemática de que hemos venido ocupándonos hasta ahora, para distinguirla de la *recurrencia transfinita* (inducción transfinita) aplicable entre los conjuntos infinitos ([1]). Como hemos venido haciendo hasta este punto, continuaremos sin embargo empleando la denominación de recurrencia como sinónima de inducción matemática, y sólo haremos el distingo entre recurrencia simple y transfinita cuando lo exija la claridad de la exposición. Lo mismo debe hacer, a muestro parecer, el profesor de enseñanza secundaria, pues él, con toda seguridad, no va a tratar en sus lecciones el tema de los conjuntos transfinitos.

Nos toca ahora completar el panorama que hemos venido rastreando, en un enfoque histórico de cuyos pretendidos alcances hemos hablado en la *Introducción* del presente ensayo. Estamos en posesión de la pista que nos ilumina los orígenes de la inducción completa; conocemos la terminología elaborada a través de luengos años; ¿qué podemos decir, sin salirnos de los límites razonablemente elementales que nos hemos impuesto, acerca de las arduas cuestiones que se suscitaron a partir de fines del siglo XIX?

6. 2. Para Henri Poincaré (1854 a 1912) el principio de inducción completa, por su naturaleza *típicamente matemática,* constituye la prueba irrefutable de que *el razonamiento matemático no es reducible al razonamiento lógico.* Conforma y condiciona una especie de argumentación comparable a la basada en los juicios sintéticos *a priori,* que transcienden tanto a la pura demostración analítica como a la inducción de origem empírico.

Aceptar el principio de recurrencia equivale a reconocerlo como una capacidad propia del espíritu: la de poder concebir la *repetición indefinida* de un mismo acto, aún cuando dicho acto se haya manifestado una sola vez. De tal específica capacidad, el hombre tiene la intuición directa. Por consiguiente, la inducción matemática se nos manifiesta como una forma del pensamiento, exclusiva y típica de la matemática, que, en el decir de Poincaré, consiste en admitir que «si una propriedad es verdadera para el número 1, y si se establece que es verdadera para $n+1$ siempre que lo sea para n, será verdadera para todos los números naturales».

Característico de esa forma de pensamiento es la facultad de condensar una *infinidad de silogismos* — así se expresa Poincaré — en una sola fórmula. Pretender la demostración del principio de inducción será siempre a la postre tarea vana, porque hemos de recaer necesariamente en la admisión de algún axioma que lo equivalga.

Los puntos de vista de Henri Poincaré están expuestos con brillo excepcional en muchas de sus obras, producidas a lo largo de dieciocho fecundos años, según el detalle cronológico que nos ha recordado E. W. Beth («Poincaré et la Philosophie», conferencia pronunciada en 1954):

([1]) La diferencia es esencial. El «siguiente» de un número transfinito no puede ser considerado evidentemente como «infinito más uno», pues en este dominio no valen las reglas de la aritmética ordinaria.

1894: *Sur la nature du raisonnement mathématique* (Rev. M. M., vol. 2; reproducido en *La science et l'hypothèse,* 1902);

1905-1906: *Les mathématiques et la logique* (Rev. M. M., vol. 13 y 14; reproducido con modificaciones en *Science et Méthode,* 1908);

1906: *À propos de la logistique* (Rev. M. M., vol. 14);

1908: Les derniers efforts des logisticiens (en *Science et Méthode*, 1908);

1909: *La logique de l'infini* (Rev. M. M., vol. 17; reproducido en *Dernières Pensées,* 1913);

1912: *Les mathématiques et la logistique* (en *Dernières Pensées*).

En los precedentes escritos se hallan los hilos principales de la larga controversia sostenida contra los logicistas. También debe agregarse la referencia al libro *La valeur de la Science,* 1912, muy difundido en nuestros medios, y de lectura amenísima.

La cuestión promovida vigorosamente por Poincaré y sus adversarios es saber si la diferencia entre la lógica y la matemática es insalvable o no lo es. Con sólo atender a las proyecciones que esta cuestión tuvo en la filosofía de la matemática, nos damos cuenta de que centraliza uno de los problemas más arduos y que no estamos todavía en condiciones de encarar con eficacia. Señalemos, sin embargo, un hecho histórico curioso y aleccionador: el tema de la inducción completa tiene hondas raíces en una antigüedad remota y, pese al transcurso del tiempo, mantiene ramificaciones vivas en plena mitad del siglo XX. ¡Nada más elocuente para instar a la reflexión de los profesores de segunda enseñanza!

A la pregunta de si basta la lógica para construir la matemática, la respuesta más cauta en la hora actual debería exponerse, con toda sinceridad, en los siguientes términos:

El análisis elemental (incluso la aritmética) responde a un fundamento lógico *a condición* de que al lado de ciertos postulados de carácter indubitablemente lógicos se admitan asimismo otros postulados, *típicos de la matemática,* cuyo carácter lógico es dudoso. Entre estos últimos corresponde citar: 1) un axioma sobre la existencia de *infinitos* elementos individuales; 2) un axioma que permita afirmar la existência de clases provenientes de definiciones *impredicativas* (así se llaman aquellas en las cuales se hacen intervenir infinitas operaciones); 3) para ciertas cuestiones de análisis superior, agregar todavía el *axioma de elección* («Para todo conjunto M cuyos elementos sean conjuntos E — no nulos y de interserción nula dos a dos — existe al menos un conjunto N que contiene un elemento y sólo uno de cada conjunto E de M»).

Pues bien, dentro del panorama actual, si se admiten los axiomas 1) y 2), se posibilita la justificación del principio de recurrencia. Pero si se cuestionan esos dos axiomas, la situación se torna sumamente crítica.

El grupo de los Bourbaki, rama francesa del formalismo hilbertiano al cual revitalizan y modifican en gran medida, reconocen francamente la posición que adoptan para edificar la matemática desde sus primeros capítulos. Son suyas estas palabras:

«Se llega así a la conclusión de que un texto matemático suficientemente explícito podría ser expresado con un lenguaje convencional que no contuviera sino un pequeño número de «palabras» invariables, reunidas según una sintaxis constituída por un pequeño número de reglas inviolables: un texto tal se dice *formalizado*».

Mas agregan poco después, como cediendo a una amonestación de Poincaré:

«Como lo verá el lector, la introducción de este lenguaje condensado se acompaña por «razonamientos» de un tipo particular, que pertenecen a la *Metamatemática*»··· «En los casos más sencillos (los razonamientos metamatemáticos) son en verdad perogrulladas··· Pero muy pronto se encuentran ejemplos donde la argumentación toma un sesgo típicamente matemático, con el empleo predominante de los enteros arbitrarios y del razonamiento por recurrencia».

(Cfr. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Primera parte, Libro I, Introducción).

Queremos llamar la atención sobre las palabras «sesgo típicamente matemático», que concuerdan con opiniones largamente sustentadas por Poincaré···

Retrocediendo un poco, hay que citar también algunos pensamientos de Hermann Weyl (1885 a 1955), completamente compenetrados de las ideas de Poincaré. En *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, cuyos primeros capítulos datan de 1927, Weyl explica que la inferencia por inducción completa introduce un *rasgo peculiar y típico de la matemática,* desconocido por la lógica aristotélica, y esencia misma del razonamiento matemático.

Weyl afirma también que la inducción completa es *ordinal* y le «parece incuestionable que el concepto de número ordinal es primario». «La moderna investigación de los fundamentos de la matemática — agrega — que ha destruído la teoría dogmática de los conjuntos, confirma esta opinión» (Sic; véase la edición inglesa de la obra citada, pág. 34-35).

6. 3. Las tesis de Poincaré tuvieron adeptos y adversarios. Hemos citado los adeptos; pasemos a citar los adversarios desde la primera hora, respecto del principio de recurrencia.

En «La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique», artículo publicado en los *Proceedings of the Vth Annual Congress of Mathematicians*, vol. II, pág. 471, Cambridge, 1912, el italiano Alessandro Padoa (1868 a 1937) sostuvo que Poincaré se equivocaba al afirmar que el principio de inducción implica una infinidad de silogismos.

Al contrario, dice, consiste únicamente en una proposición cuya premisa es la afirmación simultánea de *sólo dos condiciones.* Amén de que si implicase una infinidad de silogismos carecería de utilidad, el principio se limita a asegurar la validez de una propiedad para *cualquier* número; y decir *cualquiera* significa *todos* los números. Lo mismo ocurre en las demás demostraciones matemáticas, que se refieren, por ejemplo, a *cualquier* triángulo, o sea, a *todos* los triángulos; etc., etc.

Es erróneo — prosigue Padoa — enunciar el principio como acostumbra a hacerse: «la propiedad es cierta para $n=1$; pero siendo cierta para $n=1$, debe serlo para $n=2$; y siéndolo para $n=2$, ha de serlo para $n=3$; y *así siguiendo*···». La expresión «y así siguiendo», carece de rigor formal. Al contrario de lo que suele creerse, el principio de recurrencia asegura, pues, que el proceso infinito se torna innecesario cuando se conoce la ley de formación de cada etapa, es decir, de cada una de ellas.

Ya Cesare Burali-Forti (1861 a 1931) había rebatido la aserción de Poincaré, demostrando que el razonamiento por recurrencia no se aplica al infinito, sino, por el contrario, a las clases finitas. En «Le classi finite», *Atti R. Acc. di Torino*, vol. XXXII, 1896, y en la *Logica matematica*, 1917 y 1919, explica Burali-Forti cómo las clases de números naturales de que trata la inducción completa, aparte de ser no vacías, son *finitas*, o sea, no pueden ser puestas en correspondencia con una subclase de sí mismas. La conclusión del principio de recurrencia vale para una clase finita cualquiera.

«Place en vez a Poincaré-refuta Burali-Forti — considerarlo (al mencionado principio) característico de las clases infinitas, confundiendo el número de razonamientos necesarios para establecer cierta propiedad, con el número de elementos de una clase particular, y en tal errónea apreciación fue naturalmente seguido por muchos autores».

6. 4. El máximo contendedor de Henri Poincaré ha sido el inglés Bertrand Russell (n. 1872). Mantuvo la tesis logicista de que la matemática no es otra cosa que lógica, contra las punzantes críticas del intuicionismo. Y, en cuanto al principio de inducción se refiere, sostuvo que puede considerárselo una simple *definición*, siendo innecesario otorgarle la jerarquía de axioma fundamental del número natural.

Siguiendo una de sus obras menos técnicas, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919, Russell define a los números naturales como aquellos que poseen las *propiedades inductivas*. Son inductivas las propiedades que pertenecen al cero y, además, son hereditarias; entendiendo por hereditarias aquellas que si valen para n también valen para $n+1$.

Precisando lo dicho, he aquí una definición inductiva de los números naturales:

a) O es un número natural;

b) si n es un número natural, $n+1$ es un número natural;

c) los únicos números naturales son los dados por *a*) y *b*).

Al afirmar Russell que la inducción matemática es una definición en el sentido de la lógica ordinaria, recuerda que existen entes que satisfacen esa definición y entes que no la satisfacen. Por ejemplo, los números cardinales infinitos *no* la satisfacen, pues no cambian al serles sumado 1, o al duplicarlos, etc.; razón por la cual exigen la recurrencia transfinita.

Si, pues, la recurrencia simple es una definición en el sentido de la lógica ordinaria «toda la matemática pura, en lo que puede ser deducida de la teoría de los números naturales, es sólo nua prolongación de la lógica» (op. cit., Cap. III).

Partiendo de la definición inductiva cuyo esquema hemos visto, se deduce de inmediato el *teorema* de la inducción completa, enunciando como sigue:

Supongamos una propiedad P *tal que:*

1) *el O tiene la propiedad* P;

2) *Si* n *tiene la propiedad* P, *ello implica que* n + 1 *tiene la propiedad* **P**.

Entonces todo número natural tiene la propiedad **P**.

Después de verificar la condición 1), la demostración es obvia si hemos definido inductivamente los números naturales, pues dar cualquier natural m significa dar su generación inductiva, en virtud de la cláusula c), De modo que si P vale para m valdrá necesariamente para $m+1$.

A juicio de Russell esto equivale a subordinar el principio de recurrencia a la definición inductiva, es decir, subordinar la fundamentación de la aritmética a las leyes de la lógica ordinaria.

Semejante resultado es exagerado, como se probó posteriormente. En efecto, basta reemplazar la cláusula c) de la definición inductiva por la

c') n queda engendrado partiendo de 0 por aplicación de la operación «sucesivo»,

para que, con ayuda ahora del principio de recurrencia asumido como axioma, la cláusula c) misma se transforme en un teorema. En este caso, la subordinación sería al revés de lo querido por Russell. (Ver, por ejemplo, Stephen Cole Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, 1952).

6. 5. Otra conclusión de Russell que merece ser tomada en cuenta es la que surge de una afirmación suya en el sentido de que la esencia de la inducción matemática

parece inherente a la idea de «sucesivo» y que, por tanto, es *puramente ordinal.*

Si de esta opinión extraemos la consecuencia de que el fundamento de la recurrencia simple son necesariamente los números ordinales, estaremos incurriendo en un error de apreciación.

Justamente un reciente trabajo de George Kurepa ilustra la tesis contraria. Partiendo de la idea primitiva de *cardinal de un conjunto,* llega a definir los números naturales como cardinales de conjuntos no vacíos y también finitos en el sentido de Dedekind. En palabras más llanas, los números naturales son conjuntos finitos, y *el conjunto* N *de los números naturales es el conjunto de los conjuntos finitos.*

Luego prueba que si n es natural, $n+1$ existe y es natural, y que entre n y $n+1$ no hay número natural alguno. A continuación deduce que el conjunto N es infinito y carente de número natural máximo.

Sobre la base de tales proposiciones demuestra el teorema central del trabajo:

«Si un conjunto S satisface las condiciones:

a) $1 \in S$;

b) las relaciones $n \in N$, $n \in S$ implican $n+1 \in S$;

entonces $N \subseteq S$".

Así presenta Kurepa el principio de inducción completa, desde el punto de vista de la teoría de los conjuntos y apoyándolo en la idea de cardinalidad.

La teoría de los conjuntos de la que parte Kurepa es la axiomática de Fraenkel-Zermelo, para evitar el empleo del axioma de elección; punto de controversia entre cantoristas, logicistas e intuicionistas.

Las precauciones tomadas por Kurepa sirven para soslayar algunas de las dificultades lógicas de la teoría de los conjuntos, pero no todas. A pesar de que no estamos en condiciones de adentrarnos en la discusión de estas apasionattes cuestiones de fundamentación, bástenos recordar que algunas objeciones contemporáneas son de tal calibre que amenazan la estabilidad de toda la teoría de los conjuntos y obligan a formular construcciones de sostén para que esa estabilidad no quede definitivamente dañada.

(Quien se interese por estos temas bebería consultar, en primer lugar, el libro de E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, 1959).

No obstante el camino emprendido, Kurepa reconoce que renunciar al axioma de elección (por lo menos en el enunciado más objectado por los intuicionistas) proporciona el inconveniente de postergar mucho la presentación del teorema de recurrencia. En cambio, aceptar ese axioma es facilitar el desarrollo deductivo, pues con auxilio del postulado de elección, se demuestra en forma rápida y clara que N es un conjunto bien ordenado y, a continuación, la inducción matemática, como ya sabemos.

El trabajo de Kurepa data de 1949, aunque fue publicado tres años más tarde con el título de «The principle of complete induction», *Bulletin International de l'Académie Yougoslave des Sciences et des Beaux-Arts*, tomo 227, Zagreb, 1952.

Los temas enunciados en el presente capítulo desbordan el nivel que hemos impuesto a este ensayo sobre la inducción matemática. Para el enfoque histórico, empero, constituyen citas valiosas pues nos informan que la problemática cuyos rastros hemos seguido se halla presente en nuestros días, con un vigor tal que parece recién inaugurada.

Con las referências bibliográficas antedichas, preferimos interrumpir aquí esta exposición elemental y poner punto final.

Remarque sur le Théorème de Rado

par **A. S. Gonçalves** *et* **J. M. S. Simões Pereira**

SOMMAIRE

Dans ce mémoire nous établissons la validité du théorème de RADO *[1, page 18], pour le cas où la loi* E *fait correspondre à un ensemble fini d'entiers I, un ensemble fini d'entiers* E *(I). Pour une telle loi la conclusion du théorème reste valable si le graphe est localement et progressivement fini.*

*

* *

Dans la deuxième édition de [1], BERGE a énoncé le théorème suivant :

THÉORÈME DE RADO : *Considérons un graphe localement fini* (X,Γ), *un ensemble fini d'entiers* K *et une loi* E *qui fait correspondre à tout* $\mathrm{I}\subset\mathrm{K}$ *un ensemble* $\mathrm{E}(\mathrm{I})\subset\mathrm{K}$; *si, sur tout sous-graphe fini* $(\mathrm{A},\Gamma_{\mathrm{A}})$, *il existe une fonction* $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ *à valeurs entières telle que* $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})\in\mathrm{E}[\varphi_{\mathrm{A}}(\Gamma_{\mathrm{A}}\,\mathrm{x})]$ $(\mathrm{x}\in\mathrm{A})$, *alors il existera sur* X *une fonction* $\varphi(\mathrm{x})$ *à valeurs entières telle que*

$$\varphi(\mathrm{x})\in\mathrm{E}[\varphi(\Gamma\,\mathrm{x})]\quad(\mathrm{x}\in\mathrm{X}).$$

La loi E qui fait correspondre à un ensemble d'entiers I, un ensemble d'entiers $E(I)$, ne peut pas en effet être énoncée sans restrictions du moins pour la démonstration présentée par BERGE, c'est-à-dire, qu'on doit prendre un ensemble fini d'entiers K auquel tous les nombres entiers, mis en jeu par la loi E, appartiennent. C'est ce fait que BERGE a oublié dans la première édition de [1]; ce faisant, la démonstration qu'il y présente n'est plus valable.

Le but de ce mémoire est de montrer que, si le graphe est localement et progressivement fini, la susdite restriction peut être enlevée.

On utilise dans ce qui suit les notations de [1]. La démonstration de notre résultat étant très semblable à celle donnée dans [1], il faut tout simplement présenter une nouvelle justification du fait que le nombre des restrictions des fonctions φ_n reste fini, quand n varie.

Nous justifierons ce fait en montrant que, quand n varie, sur tout sommet où elles soient définies, les fonctions φ_n elles-mêmes ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes.

En effet, si le graphe est progressivement fini il y a au moins un sommet sans descendants ; donc, nous désignerons par $\{a\}$ l'ensemble de ces sommets, par a l'un de ses éléments et nous considérerons une fonction φ_n définie sur un ensemble A_n tel que $a\in A_n$. On aura :

$$\varphi_n(a)\in E[\varphi_n(\Gamma\,a)]=E[\emptyset].$$

Nous écrivons Γ et non pas Γ_n parce que, pour tout sommet, Γ_n devient identique à Γ pour n suffisamment grand.

Au delà d'une certaine valeur de n on aura toujours $\varphi_n(a)\in E[\emptyset]$ et les fonctions φ_n prendront sur a un nombre fini de valeurs différentes car sinon la loi E ferait correspondre à l'ensemble vide $\emptyset$ un ensemble infini d'entiers ce qui contredirait l'hypothèse.

Considérons maintenant un sommet $x_0\notin\{a\}$. Pour n suffisamment grand on aura : $\varphi_n(x_0)\in E[\varphi_n(\Gamma\,x_0)]$.

Si les fonctions φ_n prennent sur x_0, quand n varie, une infinité de valeurs différentes, il y aura parmi les descendants de x_0, un au moins, soit x_1, où les fonctions φ_n prendront aussi une infinité de valeurs différentes.

En effet, s'il n'existait pas un point dans ces conditions, l'ensemble $\bigcup_n \varphi_n(\Gamma x_0)$ des valeurs prises par les φ_n dans Γx_0 serait un ensemble fini; donc la réunion des ensembles $E(J) - J$ représentant un sous-ensemble quelconque de $\bigcup_n \varphi_n(\Gamma x_0)$ — serait, elle aussi, finie. Et puisqu'on a $\bigcup_n \varphi_n(x_0) \subset \subset \bigcup_n E[\varphi_n(\Gamma x_0)] \subset \bigcup E(J)$, le nombre des valeurs différentes prises par les fonctions φ_n sur x_0 ne pourrait pas être infini.

Considérons donc le point x_1 ainsi obtenu. On ne pourra pas avoir $x_1 \in \{a\}$ car cela contredit le résultat déjà obtenu pour les sommets de $\{a\}$. Mais si $x_1 \notin \{a\}$, nous raisonnerons pour x_1 d'une façon semblable à celle que nous avons utilisée pour x_0 et nous obtiendrons $x_2 \in \Gamma x_1$. Nous pourrons construire un chemin $[x_0, x_1, x_2, \cdots]$ sur les sommets duquel les fonctions φ_n prendront une infinité de valeurs différentes et, si le graphe est progressivement fini, il se terminera tôt ou tard sur un sommet $x_p \in \{a\}$, ce qui contredit de la même forme, le résultat obtenu plus haut.

De cette façon nous avons montré que, quand n varie, les fonctions φ_n prennent dans tous les sommets du graphe un nombre fini de valeurs différentes; donc leurs restrictions à un ensemble fini sont, elles aussi, en nombre fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, Claude. *Théorie des Graphes et ses applications*. Dunod. Paris (1ère. ed. 1958, 2ème ed. 1963).

Sobre uma Demonstração simples do Lema de Zorn

por J. Marques Henriques

As três proposições que a seguir enunciamos, o Axioma da Escolha (AE), o Lema de Zorn (LZ) e o Teorema da Boa Ordenação (BO), são equivalentes, ou seja, tomando como base uma delas, podem a partir desta demonstrar-se as outras duas.

Em todo este artigo utilizaremos as notações, definições e enunciados que se encontram na obra citada em [3]. E posto isto, passemos aos respectivos enunciados:

(AE) Dado um conjunto não vazio, $M \neq \emptyset$, seja $\mathfrak{P}(M)^* := \mathfrak{P}(M) - \{\emptyset\}$, onde $\mathfrak{P}(M)$ designa o conjunto-potência de M. Então existe uma aplicação f, de $\mathfrak{P}(M)^*$ em M, tal que para todo o conjunto U (não vazio) de $\mathfrak{P}(M)^*$, se tem: $f(U) \in U$ (Zermelo). Em símbolos:

$$\bigvee_f (f : \mathfrak{P}(M)^* \to M) \wedge \bigwedge_{U \in \mathfrak{P}(M)^*} (f(U) \in U).$$

À aplicação f chama-se usualmente *função de escolha*.

(LZ) Seja M um conjunto (totalmente) ordenado e não vazio, tal que todas as cadeias

(i. e. sub-conjuntos totalmente ordenados) possuem majorante. Então M possui um elemento máximo.

(BO) Qualquer conjunto pode tornar-se bem ordenado [1].

Se do enunciado de (AE) parece deduzir-se ser o mesmo intuitivo, basta o facto de se demonstrarem as equivalências entre as três proposições, para se concluir da complexidade de cada uma delas, a julgar pela complexidade de (LZ) e de (BO).

ZERMELO (1904) demonstrou a implicação (AE)$\Rightarrow$(BO). Nos tratados modernos da especialidade é vulgar, no entanto, encontrarem-se as demonstrações feitas na ordem seguinte:

$$(AE) \Rightarrow (LZ) \Rightarrow (BO) \Rightarrow (AE).$$

Em [3], STEINER demonstra (LZ)$\Rightarrow$(BO) e (BO)$\Rightarrow$(AE), deixando, pela sua maior dificuldade, a terceira demonstração em aberto. (LZ) é uma proposição de importância extraordinária em várias disciplinas da Matemática, e muito especialmente na Álgebra. Apenas para referir alguns dos teoremas que se demonstram a partir de (LZ), citaremos os os seguintes:

— num anel comutativo com unidade, todo o ideal distinto do anel está contido num ideal máximo;

— todo o espaço vectorial possui uma base;

— o teorema de STEINITZ, relativo aos corpos.

Neste artigo vamos demonstrar, a título de simples exercício, a implicação (AE)$\Rightarrow$(LZ). Para isso, provaremos com base em (AE) um lema intermediário, e deste derivaremos finalmente (LZ). Antes disso, porém, vamos fazer algumas considerações, que nos serão de grande utilidade na primeira das demonstrações.

DEF.: *Cadeia máxima* em M é cadeia em M que relativamente à inclusão de conjuntos não é parte própria de nenhuma outra cadeia em M.

Como para qualquer cadeia K em M se tem $K \subset M$, segue-se que *qualquer conjunto* $\mathfrak{K}$ *de cadeias em* M *é elemento de* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$. Num tal conjunto $\mathfrak{K}$ introduziremos uma ordenação mediante a vulgar inclusão de conjuntos:

$$K_1, K_2 \in \mathfrak{K}: \quad K_1 \sqsubseteq K_2 : \Longleftrightarrow K_1 \subset K_2 .$$

No que se segue chamaremos a qualquer cadeia num conjunto $\mathfrak{K}$ (de cadeias em M) *cadeia total* (para assim individualizarmos as cadeias em $\mathfrak{K}$ das cadeias em M).

E, posto isto, passemos à demonstração do

Lema Auxiliar (LA). Toda a cadeia em M (conjunto que satisfaz à hipótese de (LZ)) está contida numa cadeia máxima.

DEM.: Vamos fazer a demonstração por redução ao absurdo, provando que não é possível a existência duma cadeia que não satisfaça (LA). Seja K_0 uma tal cadeia.

1. Seja K uma outra cadeia em M tal que $K_0 \subset K$. Uma tal cadeia existe sempre, pois que por hipótese K_0 não é cadeia máxima, pois se tem sempre $K_0 \subset K_0$. Do mesmo modo K não é cadeia máxima, pois se o fosse, o lema estaria automàticamente demonstrado. Formemos então o sub-conjunto de M:

---

[1] Em [1], ALMEIDA COSTA demonstra (BO) no caso particular de um conjunto não vazio de números naturais, baseando-se apenas nos axiomas de PEANO, e usando a ordenação $<$, assim definida:

$$a, b \in \mathbf{N}: \quad a < b : \Longleftrightarrow \bigvee_{c \in \mathbf{N}} (a = b + c).$$

$M_K := \{m \mid m \in M \wedge m \notin K \wedge K \cup \{m\}$ cadeia em $M\}$.

Como K não é cadeia máxima, segue-se que $M_K \neq \phi$. Introduzamos agora uma função de escolha, $f: \mathfrak{P}(M)^* \to M$, nos termos de (AE). De $M_K \subset M \wedge M_K \neq \phi \Rightarrow f(M_K) \in M_K$. E, como se tem (da def. de M_K) $K \cap M_K = \phi$, é igualmente $K \cap \{f(M_K)\} = \phi$.

Deste modo definimos um conjunto $K' := K \cup \{f(M_K)\}$, a que chamaremos o *sucessor* de K. Da def. de K' resultam imediatamente as seguintes propriedades do sucessor de K:

$$K \subset K' ; \quad K \neq K' ; \quad K' \text{ é cadeia em } M.$$

2. Consideremos agora o conjunto $\mathfrak{K}^*$ de todas as cadeias K em M, tais que $K_0 \subset K$, onde K_0 é a cadeia fixa que acima consideramos (por não estar contida em cadeia máxima em M).

DEF.: Um conjunto $\mathfrak{K}$ de cadeias em M é fechado $:\Leftrightarrow$

(*i*) $K_0 \in \mathfrak{K}$;

(*ii*) $K \in \mathfrak{K} \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}$;

(*iii*) Sendo $\mathfrak{T}$ cadeia total em $\mathfrak{K} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K} \wedge \bigcup \mathfrak{T}$ cadeia total em $\mathfrak{K}$ [1].

Posto isto, verifiquemos que *o conjunto* $\mathfrak{K}^*$, *que acima definimos como:*

$$\mathfrak{K}^* := \{K \mid K \text{ cadeia em } M \wedge K_0 \subset K\},$$

é fechado. De facto, as três condições da def. são de verificação imediata:

(*i*) $K_0 \subset K_0 \Rightarrow K_0 \in \mathfrak{K}^* \wedge \mathfrak{K}^* \neq \phi$;

(*ii*) $K \in \mathfrak{K}^* \Rightarrow K_0 \subset K \Rightarrow K_0 \subset K' = K \cup \{f(M_K)\} \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}^*$;

[1] Esta def. de conjunto (de cadeias) fechado refere-se, evidentemente, às propriedades (*i*)-(*iii*) e não tem qualquer parentesco com a noção topológica de conjunto fechado.

(*iii*) Seja agora $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{K}^*$. Então é válida a implicação

$$\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} (K_0 \subset T) \Rightarrow K_0 \subset \bigcup \mathfrak{T}$$

e daqui se conclui que $\bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}^*$; resta-nos demonstrar que $\bigcup \mathfrak{T}$ é de novo uma cadeia total em $\mathfrak{K}^*$:

$$\bigcup \mathfrak{T} \ni x, y \Rightarrow \bigvee_{T_1, T_2 \in \mathfrak{T}} (x \in T_1 \wedge y \in T_2)$$

e como $\mathfrak{T}$ é cadeia total, tem-se:

$$T_1 \subset T_2 \vee T_2 \subset T_1 .$$

Como os dois casos são simétricos (por simples troca de índices), suponhamos que se tem $T_1 \subset T_2$. Então é $x, y \in T_2$. Mas como T_2 é por sua vez cadeia (em M) $\Rightarrow x \sqsubseteq y \vee y \sqsubseteq x$. E daqui se conclui que $\bigcup \mathfrak{T}$ é uma cadeia e, como por def. de $\mathfrak{K}^*$ (ver acima), $\bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}^*$, $\bigcup \mathfrak{T}$ é cadeia total em $\mathfrak{K}^*$, como pretendíamos verificar.

Vamos agora mostrar que *a intersecção de todos os conjuntos (de cadeias) fechados é de novo um conjunto (de cadeias) fechado.*

Designemos esta intersecção por $\mathfrak{S}$. Então é $\mathfrak{S} := \bigcap \mathfrak{K}$.

(*i*) Como $K_0 \in \mathfrak{K}$ para qualquer $\mathfrak{K}$ fechado $\Rightarrow K_0 \in \mathfrak{S}$;

(*ii*) $K \in \mathfrak{S} \Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{K}} (K \in \mathfrak{K})$, com $\mathfrak{K}$ fechado $\Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{K}} (K' \in \mathfrak{K}) \Rightarrow K' \in \mathfrak{S}$;

(*iii*) Seja $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{S} \Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{T} \subset \mathfrak{K})$ e como $\mathfrak{K}$ é fechado $\Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}$ para todos os $\mathfrak{K} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{S}$, e tal como em $\mathfrak{K}^*$, $\bigcup \mathfrak{T}$ é conjunto totalmente ordenado, como pretendíamos mostrar.

Desta demonstração conclui-se ainda que é válida a implicação: $\mathfrak{K}$ conjunto fechado $\Rightarrow \mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$.

3. DEF.: Chamaremos a $K_N \in \mathfrak{S}$ *(cadeia) normal* $:\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{K \in \mathfrak{S}} (K \subset K_N \vee K_N \subset K).$$

Por hipótese é e. g. K_0 uma cadeia normal, pois tem-se: $\bigwedge_{K \in \mathfrak{S}} (K_0 \subset K)$.

Dada K_N normal, designaremos por $\mathfrak{K}_N$ o conjunto

$$\mathfrak{K}_N := \{K \mid K \in \mathfrak{S} \wedge (K \subset K_N \vee K_N' \subset K)\}.$$

Da def. de $\mathfrak{K}_N$ tira-se que K_N pertence a $\mathfrak{K}_N$ e $\mathfrak{K}_N \subset \mathfrak{S}$. Verifiquemos que *o conjunto $\mathfrak{K}_N$ é fechado, qualquer que seja a cadeia normal K_N.*

(i) $K_0 \in \mathfrak{K}_N$, qualquer que seja K_N, pois K_0 é normal e $K_0 \subset K_N$;

(ii) Seja $K \in \mathfrak{K}_N$. Pretende-se mostrar que $K_N' \in \mathfrak{K}_N$. De $K \in \mathfrak{K}_N$ tira-se:

$$K_N' \subset K \vee K \subset K_N;$$

— se $K_N' \subset K \Rightarrow K_N' \subset K' \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}_N$;

— se $K \subset K_N$, vamos considerar duas hipóteses:

1.º $K' \subset K_N$ e então $K' \in \mathfrak{K}_N$;

2.º $K' \not\subset K_N$. Como K_N é normal

$$\Rightarrow K_N \subset K' \Rightarrow K \subset K_N \subset K'.$$

Mas como K' apenas contém mais um elemento do que K, deve ter-se:

$$K = K_N \vee K_N = K'.$$

Por ser $K' \not\subset K_N$ não pode ser $K_N = K'$, pelo que é forçosamente $K = K_N \Rightarrow K' = K_N'$ $\Rightarrow K' \supset K_N' \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}_N$;

(iii) Seja finalmente $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{K}_N$.

Ainda aqui vamos distinguir dois casos:

1.º $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} (T \subset K_N) \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \subset K_N \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}_N$;

2.º $\bigvee_{T \in \mathfrak{T}} (T \not\subset K_N) \Rightarrow K_N' \subset T \Rightarrow K_N' \subset \bigcup \mathfrak{T}$

$\Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}_N$

e $\bigcup \mathfrak{T}$ é cadeia total em $\mathfrak{K}_N$ (tal como em 2., no caso de $\mathfrak{K}^*$), como pretendíamos verificar.

Do que acima expusemos, concluímos que: $\mathfrak{K}_N \subset \mathfrak{S}$, por def. de $\mathfrak{K}_N$, e $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}_N$, por ser $\mathfrak{S} = \bigcap \mathfrak{K}$, com $\mathfrak{K}$ fechado.

Logo é: $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_N$.

4. Designemos por $\mathfrak{N}$ *o conjunto de todas as cadeias normais, tais que* $K_N \in \mathfrak{S}$. Vamos também aqui mostrar que $\mathfrak{N}$ *é conjunto fechado:*

(i) $K_0 \in \mathfrak{N}$;

(ii) Se $K_N \in \mathfrak{N}$, tomemos uma cadeia arbitrária $K \in \mathfrak{S}$ tal que $K \not\subset K_N' \Rightarrow K \not\subset K_N$ $\Rightarrow K_N' \subset K$, pois que $\mathfrak{K}_N = \mathfrak{S}$, e da def. de $\mathfrak{K}_N \Rightarrow K_N'$ é cadeia normal e portanto $K_N' \in \mathfrak{N}$;

(iii) Seja, finalmente, $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{N} \wedge K \in \mathfrak{S}$. Mais uma vez vamos distinguir dois casos:

1.º $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} (T \subset K) \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \subset K$;

2.º $\bigvee_{T \in \mathfrak{T}} (T \not\subset K)$, e neste caso como $\mathfrak{T}$ é cadeia normal (da def. de $\mathfrak{N}$) $\Rightarrow K \subset T$ $\Rightarrow K \subset \bigcup \mathfrak{T}$;

dos dois casos possíveis tira-se que $\bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{N}$ e tal como em 2., no caso de $\mathfrak{K}^*$, $\bigcup \mathfrak{T}$ é cadeia total em $\mathfrak{N}$, como pretendíamos mostrar.

Uma consequência importante do facto de $\mathfrak{N}$ ser conjunto fechado é que $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, ou seja: $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_N$. Vejamos agora que: $\mathfrak{N}$ *é um conjunto totalmente ordenado* (relativamente à ordenação «inclusão de conjuntos»). De facto, tem-se:

$$K_{N_1},\; K_{N_2} \in \mathfrak{N} \Rightarrow K_{N_1} \subset K_{N_2} \vee K_{N_2} \subset K_{N_1},$$

como consequência imediata da def. de cadeia normal K_N.

5. Como $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ é conjunto totalmente ordenado e fechado, a união de todos os conjuntos de $\mathfrak{G}$ é elemento de $\mathfrak{G}$:

$$G := \bigcup \mathfrak{G} \in \mathfrak{G}.$$

Mas, como $\mathfrak{G}$ é fechado $\Rightarrow G' \in \mathfrak{G} \Rightarrow$ $\Rightarrow G' \subset \bigcup \mathfrak{G} = G$. Devido ao facto de ser $G \subset G'$, da def. de G' e também de ser $G \neq G'$ (em 1.) $\Rightarrow G = G' \wedge G \neq G'$. E eis o absurdo a que fomos levados por aceitar a existência duma cadeia K_0 em M que não está contida numa cadeia máxima em M. Logo, (LA) está completamente demonstrado.

Finalmente, demonstremos (LZ) a partir deste (LA): (LA)$\Rightarrow$(LZ).

Dem.: Como por hipótese M é conjunto não vazio, existe um $m \in M$ e portanto $\{m\}$ é cadeia em M, uma vez que $m \sqsubseteq m$. Agora, utilizando (LA) concluímos que $\{m\}$ está contida numa cadeia máxima K, pelo que $m \in K$.

Mas, por hipótese (v. enunciado de (LZ)), K possui um majorante $b \in M$, ou seja, para todos os $k \in K$ é $k \sqsubseteq b$, o que escreveremos abreviadamente, pondo $K \sqsubseteq b$. Resta-nos mostrar que este elemento $b \in M$ é elemento máximo em M. Ainda aqui vamos partir da hipótese contrária, e verificar que se b não fosse elemento máximo em M, isso conduziria a um absurdo.

Se b não é elemento máximo em M, então, por def. de elemento máximo, existe um elemento $b_1 \in M$ tal que se verifica: $b \sqsubseteq b_1 \wedge b \neq b_1$. Ora, b_1 não pode ser elemento da cadeia K, pois que de $b_1 \in K$ se concluiria que $b_1 \sqsubseteq b$, o que, conjuntamente com $b \sqsubseteq b_1$ teria como consequência $b = b_1$. É pois $b_1 \notin K$.

Formemos então o conjunto união de K com b_1: $K^* := K \cup \{b_1\}$. De $b_1 \notin K$ tem-se $K \subset K^*$, com $K \neq K^*$. Como K é cadeia em M, tendo b como majorante e $b \sqsubseteq b_1$, é para todos os $k \in K$:

$$k \sqsubseteq b \sqsubseteq b_1 \Rightarrow k \sqsubseteq b_1.$$

Ora, isto é precisamente a afirmação de que K^* é cadeia em M, o que arrasta a um absurdo, uma vez que por hipótese K é cadeia máxima em M. Logo, a hipótese que havíamos formulado de b não ser elemento máximo em M é falsa, e deste modo o Lema de Zorn está completamente demonstrado.

BIBLIOGRAFIA

[1] Almeida Costa, A., *Elementos de Algebra Linear e Geometria Linear*, Lisboa, (1958).

[2] Kowalski, H. J., *Lineare Algebra*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1963).

[3] Steiner, H.-G., Mengen-Abbildungen-Strukturen, in: *Das Fischer Lexikon 29: Mathematik I*, Frankfurt/M, (1964).

Regras para estratégias mistas de jogos matriciais «2x2»

por Ruy Madsen Barbosa

O pequeno artigo, que apresentamos, leva por intuito aquele de *propagar*, *melhorar e ampliar*, uma regra prática que encontramos na obra de WILLIAMS (ver bib.), referente a jogos matriciais «2×2», para determinação de estratégias ótimas.

Apresentamos, portanto, como contribuição:

1. A demonstração baseada no conceito de esperança matemática de uma matriz;
2. A ampliação da regra à determinação do valor do jogo.

Será interessante observar que WILLIAMS efectua as diferenças em linha, ou em coluna, sem se preocupar com a ordem alternada nas duas subtrações, o que não influi para efeito de cálculo, sòmente das estratégias ótimas; mas sim, na ampliação que fizemos à regra.

Como preliminar à apresentação específica dos resultados, acrescentamos inicialmente alguns dados genéricos sobre o conceito de jogos matriciais para o entendimento da exposição.

Dados gerais sobre o jogo matricial:

De uma maneira geral, podemos dizer resumida e elementarmente, que num jogo de soma nula (*) a dois parceiros P_1 e P_2:

1. P_1 escolhe um ponto $x \in E$ e P_2 escolhe um ponto $y \in F$.
2. As regras iniciais do jogo permanecem após cada escolha.
3. As regras determinam que P_1 receba do parceiro P_2 um total dependente do par $(x;y) \in E \times F$; isto é, uma aplicação f de $(x;y)$ no conjunto dos reais.
4. A aplicação $f(x;y)$ é denominada *função de pagamento*. Assim, se $f(x;y) < 0$, P_2 recebe de P_1 o pagamento $|f(x;y)|$.

Em particular se $E = \{1, 2, 3, \cdots m\}$ e $F = \{1, 2, 3, \cdots n\}$ com $f(i;j) = a_{ij}$; a função de pagamento assume valores de uma matriz retangular $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Neste caso o jogo é denominado *matricial*, e a matriz A é chamada *matriz de pagamento* (ou matriz de jogo).

Os elementos dos conjuntos E e F são chamados *estratégias puras* de P_1 e P_2, respectivamente.

Exemplos:

1. Para esclarecimento do leitor o «jogo de mesma paridade» (com dois dedos), é um exemplo simples de jogo matricial «2×2»:

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ & \begin{array}{cc} (1) & (2) \end{array} \\ P_1 \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(*) A soma dos recebimentos dos parceiros é nula, considerando negativo os pagamentos.

onde, a apresentação, por exemplo, por P_1 de um (1) dedo e por P_2 de dois (2) dedos (paridades diferentes), conduz à obrigatoriedade do primeiro parceiro pagar uma unidade monetária (—1) ao segundo parceiro, etc.

2. O «jogo de mesma paridade» pode ser assente em outra matriz de pagamento, por exemplo na seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os exemplos escolhidos permitirão ao leitor não inferir que a matriz de pagamento se baseia na probabilidade dos eventos; e, sim, o oposto, a escolha dos eventos está baseada na matriz.

É claro que o parceito P_1 procura eleger o elemento que corresponda à linha «i», desde que assegure para si pelo menos o ganho:

$$\min_j a_{ij}$$

mas, evidentemente a eleição de «i» foi feita para que min a_{ij} tenha sido o maior possível; assim, P_1 deverá ter escolhido «i» para garantir o ganho de pelo menos:

$$\boxed{\max_i \min_j a_{ij}}$$

A estratégia «i» é então denominada maximinizante, ou simplesmente maximin.

Recìprocamente, para o parceiro P_2, como a matriz deve ser considerada com sinais trocados, deverá eleger o elemento que corresponda à coluna «j», de maneira que tenha assegurado o ganho de pelo menos

$$\max_j \min_i (-a_{ij})$$

que é igual a:

$$-\min_j \max_i a_{ij}$$

ou ainda, que P_2, jogue «j», não permitindo que P_1 ganhe mais que:

$$\boxed{\min_j \max_i a_{ij}}$$

A estratégia «j» é então chamada minimaximizante, ou simplesmente minimax.

Quando se verificar a igualdade do mínimo que P_1 assegurou para si com o máximo que P_2 lhe permite ganhar, a matriz evidentemente conterá um par $(r\,;s)$ cujo valor é simultâneamente mínimo da linha r e máximo da coluna s; ao qual denomina-se de *ponto de sela.*

A matriz de pagamento, abaixo, possui o ponto de sela $(1\,;1)$, de valor 3; portanto, se P_1 eleger 1, assegura para si pelo menos o ganho 3; enquanto que P_2 deverá escolher 1 para assegurar que P_1 não ganhe mais que 3.

As matrizes podem admitir mais de um ponto de sela, ou mesmo não admitir ponto de sela, como são os casos dos exemplos 1) e 2). Em qualquer caso P_1 precisa procurar fazer eleições, sem que P_2 o perceba, de tal modo que após um bom número de jogadas tenha assegurado o maior ganho possível.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

O parceiro P_1 não deverá, em qualquer dos exemplos dados 1. e 2. colocar, continuadamente, por exemplo, dois dedos; pois, se P_2 o percebe, evidentemente colocará um dedo.

Idem, se P_1 colocar continuadamente um dedo, pois então, P_2 colocará dois dedos.

O parceiro P_1, bem como P_2, deverão adotar um sistema alternado de eleições, que lhes sejam favoráveis após um bom número de jogadas, sem que o adversário tenha elementos para descobrir a sua futura escôlha. Disto resulta que os parceiros deverão escolher uma *estratégia mista ótima*, cuja frequência das eleições seja dada por um critério probabilístico.

Genèricamente, P_1 adota uma estratégia mista $X=[x_1, x_2, \cdots x_m]$(*), e P_2 adota a estratégia mista $Y=[y_1, y_2, \cdots y_n]$(*), às quais acrescentamos as restrições:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

que facilitam as interpretações como frequências relativas.

A esperança matemática de P_1, do valor v do jôgo, para as estratégias X e Y é dada por:

$$E[(X;Y)] = \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij} P[v = a_{ij}] = \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij} x_i y_j$$

Caso X_1 e Y_1 sejam estratégias mistas ótimas teremos:

$$E[(X;Y_1)] \leqq E[(X_1;Y_1)] \leqq E[(X_1;Y)]$$

e, ao par $(X_1;Y_1)$ denominamos *ponto de sela estratégico*, e, a sua esperança matemática correspondente: *valôr do jôgo* de P_1

Para não nos afastarmos mais em considerações teóricas gerais passaremos imediatamente ao estudo do problema particular matricial «2×2».

(*) Vetores de espaços de m e n dimensões; vetores estratégias mistas.

Jôgo matricial «2×2»:

Seja a matriz de pagamento:

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ P_1 & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

Sejam as estratégias mistas:

$$\begin{cases} X = [x_1, x_2] \\ Y = [y_1, y_2] \end{cases}$$

que, pelas restrições, poderão ser escritas:

$$\begin{cases} X = [x, 1-x] \\ Y = [y, 1-y] \end{cases}$$

Temos a esperança matemática:

$$E[(X;Y)] = axy + bx(1-y) + cy(1-x) + \\ + d(1-x)(1-y)$$

$$E[(X;Y)] = [(a-b)+(d-c)] \times \\ \times \left[x - \frac{d-c}{(a-b)+(d-c)}\right] \times \\ \times \left[y - \frac{d-b}{(a-b)+(d-c)}\right] - \\ - \frac{(d-c)(d-b)}{(a-b)+(d-c)} + d$$

ou $E[(X;Y)] = S(x-m)(y-n) + K$,

$$\text{com } K = \frac{ad-bc}{S}$$

Caso possa assumir P_1 a estratégia $x=m$(*), poderá assegurar que sua esperança será K,

(*) Não havendo ponto de sela.

independente da eleição de P_2:

$$E[(X_1;Y)]=K$$

Anàlogamente, P_2, caso possa assumir a estratégia $y=n$, poderá assegurar que sua esperança matemática será $-K$; ou que, P_1 ganhará só K; independente da eleição de P_1:

$$E[(X;Y_1)]=K$$

de onde fàcilmente, concluimos que a estratégia mista ótima de cada parceiro é:

$$\text{Para } P_1: \quad X=\left[\frac{d-c}{S},\frac{a-b}{S}\right]$$

$$\text{Para } P_2: \quad Y=\left[\frac{d-b}{S},\frac{a-c}{S}\right]$$

que fornecem as regras práticas.

Estratégia ótima para P_1: Calcula-se as diferenças em linhas, alternadas, e obtém-se os numeradores trocados das frequências relativas de (1) e (2).

Estratégia ótima para P_2: Calcula-se as diferenças em coluna, alternadas, e obtém-se os numeradores trocados das frequências relativas de (1) e (2).

Valor do Jogo: Observando-se que: $S=[(a-b)+(d-c)]$ ou $[(a-c)+(d-b)]$ temos:

O valor do jôgo é o quociente do determinante da matriz de pagamento, pela soma das diferenças alternadas, em linha, ou em coluna.

Exemplo:

Seja a matriz de pagamento: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Esquema prático:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & -2 & \to 5 \\ & -1 & 2 & \to 3 \\ \hline -2 & & \longrightarrow & 6 \;=4 \\ \hline & 4 & 4 & 8 \end{array}$$

Estratégias ótimas:

$$P_1\begin{cases}(1) \text{ com frequência rel. } 3/8\\(2) \text{ com frequência rel. } 5/8\end{cases}$$

$$P_2\begin{cases}(1) \text{ com frequência rel. } 4/8=1/2\\(2) \text{ com frequência rel. } 4/8=1/2\end{cases}$$

Valor do Jôgo: $K=4/8=1/2$, isto é, adotando a estratégia $[3/8,5/8]$, P_1 pode assegurar para si, após um grande número de jogadas, pelo menos um ganho de 1/2 unidade monetária em média por jogada, independente do parceiro adversário. O parceiro P_2 deverá adotar a estratégia $[1/2,1/2]$ para assegurar que P_1 não ganhe mais do que 1/2 unidade monetária em média por jogada.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berge, C. et A. Ghouila-Houri, *Programmes, jeux et réseaux de transport* Paris – Dunod, 1962.

[2] Manzoli, F. Fausto, *Relações entre o Problema dos Momentos e a Teoria dos Jogos Estratégicos – Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da U. S. P.*, S. Paulo, 1959.

[3] McKinsey *Introduccion a la teoria matematica de los juegos* (trad. da Nigar), Madrid, 1960.

[4] Saaty, Thomas L., *Mathematical Methods of Operations Research*, N. Y. McGraw-Hill Book Co, 1959.

[5] Vajda, S. *An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games*, London, Methuen & Co, 1960.

[6] Williams, J. D., *The Compleat Strategyst*, N. Y., McGraw-Hill Book Co, 1954.

RELATÓRIO REVISTO SOBRE A LINGUAGEM ALGORÍTMICA ALGOL 60

(Continuação do número anterior)

Descrição da linguagem de Referência

1. Estrutura da linguagem.

Como dissemos na Introdução, a linguagem algorítmica possui três tipos diferentes de de representação a saber: Referência, Publicação, Máquina; o desenvolvimento que segue refere-se apenas ao nível Referência. Isto significa que todos os objectos definidos nesta linguagem são representados por um conjunto de símbolos e é precisamente pela escolha destes símbolos que as outras duas representações podem diferir da primeira. A estrutura e o conteúdo devem manter-se idênticos para as três representações.

O objectivo da linguagem algorítmica é a descrição dos processos de cálculo. O conceito de base utilizado para a descrição das regras de cálculo é a expressão aritmética usual que contém números, variáveis e funções. A partir de tais expressões, formam-se, pela aplicação das regras de composição aritmética, unidades de linguagem — fórmulas explícitas — denominadas *instruções de afectação*.

Para indicar o desenvolvimento dos processos de cálculo é necessário introduzir certas instruções não-aritméticas que podem descrever quer ramificações quer repetições iterativas de instruções de cálculo. Como para a função destas instruções se torna necessário que uma instrução se refira a uma outra, as instruções podem ser providas de etiquetas. Pode encerrar-se entre parentesis de instrução *begin* e *end* uma sequência de instruções para formar uma instrução composta.

As instruções são precedidas por declarações que não são pròpriamente instruções de cálculo mas que informam o compilador da existência e de certas propriedades dos elementos que figuram nas instruções. Assim, podem indicar a classe dos números representados por uma variável, a dimensão de um quadro de números ou ainda o conjunto das regras que definem uma função. Uma sequência de declarações seguida de uma sequência de instruções e encerrada entre *begin* e *end* constitue um *bloco*. Toda a declaração aparece num bloco e apenas é válida nesse bloco.

Um *programa* é uma *instrução composta* ou um *bloco* que não está contido em outra instrução e que não utiliza outras instruções além das que ele contém.

No que segue faz-se a exposição da sintaxe e da semântica da linguagem (1).

---

(1) Sempre que não seja definida a precisão aritmética em geral ou que se deixe indefinida a saída de certo processo, isso deve ser interpretado no seguinte sentido: um programa Algol não define completamente um processo de cálculo a não ser quando a informação que o acompanha especifique a precisão e o género da aritmética desejados e a condução a prosseguir em todos os casos que possam surgir durante a execução do cálculo.

1. 1. Formalismo para a descrição sintática.

A sintaxe será descrita por meio de fórmulas metalinguísticas (1).

A sua interpretação explica-se melhor através de um exemplo

$$<ab>::=(|[|<ab>(|<ab><d>.$$

As sequências de caracteres encerrados nos parentesis $< >$ representam variáveis metalinguísticas cujos valores são sequências de símbolos. Os sinais $::=$ e $|$ (o último com o significado de *ou*) são conexões metalinguísticas. Todo o sinal de uma fórmula, que não é uma variável ou uma conexão metalinguística designa este sinal (ou a classe de sinais que lhe são similares).

A justaposição de sinais e/ou de variáveis numa fórmula significa a justaposição das sequências designadas. Assim a fórmula anterior dá uma regra recursiva para a formação de valores da variável $<ab>$. Indica que $<ab>$ pode ter o valor (ou [ou que, dado um valor possível para $<ab>$, outro valor pode ser formado fazendo-a seguir pelo caracter (ou por um valor da variável $<d>$. Se os valores de $<d>$ são dígitos decimais, alguns valores de $<ab>$ podem ser:

[(((1(37(
(12345(
(((
[86

Para facilitar o estudo, os símbolos escolhidos para distinguir as variáveis metalinguísticas (quer dizer a sequência de caracteres que figuram entre parêntesis $<>$, como ab no exemplo anterior) são palavras que descrevem aproximadamente a natureza da variável correspondente. Quando as palavras que aparecem desta forma são utilizadas na sequência do texto, referem-se automàticamente à definição sintática correspondente. Também pode acontecer que certas fórmulas sejam representadas em certas partes do texto.

Definição

$<$ vazio $>::=$
(a cadeia nula de símbolos).

2. Símbolos de base, identificadores, números, cadeias, conceitos de base.

A linguagem de referência constrói-se a partir dos seguintes símbolos de base:

$<$ símbolo de base $>::=<$ letra $>|$
$<$ algarismo $>|<$ valor lógico $>|$
$<$ limitador $>$.

2. 1. Letras.

$<$ letra $>::=a|b|c|d|e|f|g|h|i|j|k|$
$l|m|n|o|p|q|r|s|t|u|v|w|x|y|z|$
$A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M|$
$N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z|$.

Pode-se juntar ou reduzir a este alfabeto caracteres arbitrários. No primeiro caso será necessário evitar a introdução de novos caracteres idênticos a outros símbolos de base (algarismos, valor lógico ou limitador).

As letras não tem significado próprio. São utilizadas para formar os identificadores e as cadeias (cf. 2. 4 Identificadores; 2. 6 Cadeias).

---

(1) Cf. J. W. BACKUS, «The syntax and semantics of the proposed international algebric language of the Zurich». ACM-GAMM Conference. IFIP Paris, Junho 1959.

2. 2. 1. *Algarismos.*

< algarismo > : : = 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9

Os algarismos são utilizados para formar números, identificadores e cadeias.

2. 2. 2. *Valores lógicos.*

< valor lógico > : : = *true* | *false* .

Os valores lógicos tem um significado evidente (verdadeiro-falso).

2. 3. *Limitadores.*

< limitador > : : = < operador > | < separador > | < parentesis > | < declarador > | < especificador >

< operador > : : = < operador aritmético > | < operador de relação > | < operador lógico > | < operador sequencial >

< operador aritmético > : : = $+ \mid - \mid \times \mid / \mid \div \mid \uparrow$

< operador de relação > : : = $< \mid \leq \mid = \mid \geq \mid > \mid \neq$

< operador lógico > : : = $\equiv \mid \supset \mid \vee \mid \wedge \mid \neg$

< operador sequencial > : : = *go to* | *if* | *then* | *else* | *for* | *do*

< separador > : : = , | . | $_{10}$ | : | ; | : = | ⊔ | *step* | *until* | *while* | *comment*

< parêntesis > : : = (|) | [|] | ‘ | ’ | *begin* | *end*

< declarador > : : = *own* | *Boolean* | *integer* | *real* | *array* | *switch* | *procedure*

especificador > : : = *string* | *label* | *value*

Os limitadores têm um significado preciso. Para a maior parte deles este significado é evidente, os outros serão definidos em altura própria.

As disposições tipográficas como o espaço entre duas palavras ou a passagem à linha seguinte não tem significado na linguagem de referência. Podem ser porém utilizados segundo a vontade do redactor afim de facilitar a leitura dum programa.

Para permitir a inclusão de textos no interior de um programa admite-se as convenções seguintes relativas ao comentário :

A sequência de símbolos de base	equivale a
; *comment* < toda a sequência que não contém ; > ;	;
begin comment < toda a sequência que não contém ; > ;	*begin*
end < toda a sequência que não contém *end* ou ; ou *else* >	*end*

Este quadro de equivalência significa que um qualquer dos três símbolos que figuram na coluna da direita pode ser substituído por uma sequência de símbolos cuja estrutura é indicada sobre a mesma linha na coluna da esquerda. Esta substituição não tem repercursão alguma sobre o programa. É óbvio que a primeira estrutura de comentário, ao ler da esquerda para a direita, tem prioridade em ser substituída, sobre as outras estruturas que se encontrem em seguida.

2. 4. *Identificadores*

2. 4. 1. *Sintaxe*

< identificador > : : = < letra > | < identificador > < letra > | < identificador > < algarismo >

2. 4. 2. *Exemplos*

q

Sopa

V 17a
a 34 kTMNs
Marilyn

2. 4. 3. *Semântica*

Os identificadores não têm significado intrínseco. Servem para identificação de simples variáveis, de colunas, de etiquetas, de comutação e de procedimentos. Podem ser escolhidos arbitràriamente (cf. **3.** *2. 4.* Funções Padrão).

O mesmo identificador não pode ser utilizado para referenciar duas quantidades diferentes, excepto no caso de estas quantidades terem campos disjuntos segundo as declarações do programa (cf. **2.** *7* Quantidades, categorias e objectivos e secção 5. Declaração).

2. 5. *Números*

2. 5. 1. *Sintaxe*

< inteiro sem sinal > : : = < algarismo > | < inteiro sem sinal > < algarismo >

< inteiro > : : = < inteiro sem sinal > | + < inteiro sem sinal > | — < inteiro sem sinal >

< mantissa > : : = . < inteiro sem sinal >

< factor de enquadramento > : : = $_{10}$ < inteiro >

< número decimal > : : = < inteiro sem sinal > | < mantissa > | < inteiro sem sinal > < mantissa >

< número sem sinal > : : = < número decimal > | < factor de enquadramento > | < número decimal > < factor de enquadramento >

< número > : : = < número sem sinal > | + < número sem sinal > | — < número sem sinal >

2. 5. 2. *Exemplos*

0	−200.084	−.083$_{10}$−02
177	+07.43$_{10}$8	−$_{10}$7
.5384	9.34$_{10}$+10	$_{10}$−4
+0.7300	2$_{10}$−4	+$_{10}$+5

2. 5. 3. *Semântica*

Os números decimais têm o significado habitual. O factor de enquadramento representa uma potência inteira de 10.

2. 5. 4. *Tipos*

Os inteiros são do tipo *integer*. Todos os outros números são do tipo *real* (cf. **5.** *1.* Declaração do Tipo).

2. 6. *Cadeias*

2. 6. 1. *Sintaxe*

< cadeia própria > : : = < toda a sequência de símbolos de base que não contém nem ' nem ' > | < vazio >

< cadeia aberta > : : = < cadeia própria > | ' < cadeia aberta > ' | < cadeia aberta > < cadeia aberta >

< cadeia > : : = ' < cadeia aberta > '

2. 6. 2. *Exemplos*

'5k,, —'[[['∧ = /:'Tt''

'..Isto ⊔ é ⊔ uma ⊔ 'cadeia''

2. 6. 4. *Semântica*

Introduziram-se aspas de cadeia '' para que a linguagem seja capaz de comportar sequências arbitrárias de símbolo de base. O símbolo ⊔ representa um espaço. Não existe espaço algum no exterior de uma cadeia. As cadeias podem ser autênticos parâmetros de procedimento (cf. **3.** *2* Indicador de função e **4.** *7* Instrução de procedimento).

2. 7. Quantidade, categoria e campo

Em relação às quantidades distinguem-se as categorias seguintes: variáveis simples, tabelas, etiquetas e procedimentos.

O campo de uma quantidade é o conjunto das instruções e expressões nas quais é válida a declaração do identificador associado a esta quantidade. Para as etiquetas consulte *4. 1. 3.*

2. 8. Valores e tipos

Um valor é um conjunto ordenado de números (caso particular: um único número), um conjunto ordenado de valores lógicos (caso particular: um único valor lógico) ou uma etiqueta.

Certas unidades sintáticas possuem valores. Em geral estes valores variam ao longo da execução do problema. Os valores das expressões e das suas componentes são definidas na secção *3*. O valor de um identificador de tabela é o conjunto ordenado dos valores da tabela correspondente das variáveis com índice (cf. *3. 1. 4. 1*).

Os diversos tipos (*integer, real, Boolean*) representam as propriedades fundamentais destes valores. Os tipos associados às unidades sintáticas correspondem aos valores destas unidades. *(Continua)*

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — MATEMÁTICAS GERAIS — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 1 — 8-6-1964.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 1, 1', e os problemas 2, 3, 4, 5. Pretende-se uma exposição clara e rigorosa, em particular nas demonstrações pedidas no problema 1 (ou 1').

5614 — 1) Sejam A e B duas partes majoradas de R, tais que $A \cap B \neq \emptyset$. Mostre que $\sup (A \cap B) \leqslant \inf \{\sup A, \sup B\}$. Dê dois exemplos, num dos quais se verifique a igualdade e no outro a desigualdade estricta.

1') Sejam $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, $f \in \mathcal{F}(A, R)$ e $a \in A$. Indicámos no curso duas condições equivalentes à da continuidade de f em a.

Enuncie uma delas e demonstre essa equivalência.

2) Considere as funções

$$f : R \to R \qquad \text{e} \qquad g : R^+ - \{0, 1\} \to R$$
$$x \to x \cdot |x| \qquad\qquad x \to x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

a) Determine as funções derivadas de f e de g (não esquecendo a indicação dos domínios respectivos). Justifique.

b) Verifique que pode compor g com f; seja $h = f \circ g$. Calcule $h'(e^{\frac{1}{\pi}})$ e $h'(e^{\frac{2}{3\pi}})$. (Sugestão: aplique o teorema de derivação de uma função composta, nos pontos adequados e utilize a alínea *a*)).

c) Diga se f é estrictamente monótona, justificando a resposta.

3) Dada a família de séries abelianas

$$\left(\sum_1^{\infty} \left(\frac{-a n^2 - 2a^2}{2n^2 + a}\right)^n x^n\right)_{a \in R^+},$$

determine, para cada $a \in R^+$, $(R^+ = \{x \in R ; 0 \leqslant x\})$,

a) o raio de convergência r_a da série;

b) o domínio de convergência D_a da série. Justifique.

4) (*Nota:* supõe-se ortonormado o referencial $(0, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ utilizado nas alíneas seguintes).

a) Dada a recta r de equações $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

e a família de rectas $(r_{(a,b)})_{(a,b)\in R^2}$, tal que, para todo o $(a,b)\in R^2$, $r_{(a,b)}$ tem por equações $\begin{cases} y+z=a \\ z=b \end{cases}$, determine o conjunto

$$A=\{(a,b)\in R^2;\ r_{(a,b)} \text{ intersecta } r\}.$$

b) $s=r_{(1,0)}$ é uma recta da família anterior que intersecta r num ponto P; determine as coordenadas de vectores unitários $\overline{u}$ e $\overline{v}$, com as direcções, respectivamente, de r e s. Escreva equações paramétricas das bissectrizes dos ângulos de r com s (começando por determinar dois vectores com as direcções dessas bissectrizes, a partir dos vectores unitários $\overline{u}$ e $\overline{v}$) e verifique que estas bissectrizes são perpendiculares entre si.

c) Indique equações paramétricas do plano que contém r e s, escolhendo para tal dois vectores perpendiculares entre si.

5) Sejam E um espaço vectorial real, (e_1, e_2, e_3) uma base de E e

$$f: E \to E,\ ((a,b,c)\in R^3),$$
$$(a e_1 + b e_2 + c e_3) \to 4 c e_3.$$

a) Mostre que $E' = f^{-1}(\{0\})$ é um sub-espaço vectorial, com dimensão 2, de E.

b) Se S é a relação de equivalência sobre E associada a f (i. e. $x\,S\,y \leftrightarrow f(x)=f(y)$), mostre que as operações $R\times E\to E$ e $E\times E\to E$ «passam ao quociente» por S, ficando assim definidas sobre $\overline{E}=E/S$ operações que lhe conferem uma estrutura de espaço vectorial real. (Dispensa-se a verificação das respectivas propriedades).

c) Mostre que $\dim \overline{E}=1$, verificando a injectividade de $\overline{f}$ e estudando $\overline{f}(\overline{E})$ e $\overline{f}$. ($\overline{f}:\overline{E}\to E$ é a aplicação quociente de f).

Resolução do exame 1

1) *Suponhamos* $\sup A \leqslant \sup B$ *e, portanto,* $\sup A = \inf\{\sup A, \sup B\}$. $\sup A$, *como majorante de* A, *é majorante de* $A\cap B \subset A$. *Logo, é maior ou igual a* $\sup(A\cap B)$, *que, por definição, é o «primeiro» dos majorantes de* $A\cap B$. (Obs. — *Se* $\sup B \leqslant \sup A$ *o raciocínio é idêntico).*

Exemplos:

I) $A=\{1,3\}$ *e* $B=\{3\}$;
$\sup(A\cap B)=\inf\{\sup A,\sup B\}=3$.

II) $A=\{1,3\}$ *e* $B=\{1,2\}$;
$1=\sup(A\cap B)<\inf\{\sup A,\sup B\}=2$.

1') *(Ver apontamentos das aulas teóricas).*

2) a) I) *No intervalo aberto* $]0,+\infty[$ $f(x)=x^2$, f *é derivável e* $f'(x)=2x$; *no intervalo aberto* $]-\infty,0[$ $f(x)=x\cdot(-x)=-x^2$, f *é derivável e* $f'(x)=-2x$. *Calculando a derivada de* f *no ponto* 0, *a partir da definição, teremos*

$$f'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}\frac{x\cdot|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}|x|=0.$$

R: *A função derivada de* f *é:* $\begin{aligned} f'&:R\to R\\ x&\to 2|x|\end{aligned}$.

II) *A função derivada de* g *é:*

$$g': R^+ - \{0,1\} \to R$$
$$x \to sen\left(\frac{1}{\log x}\right)+x\cdot\cos\left(\frac{1}{\log x}\right)\cdot\frac{-1}{\log^2 x}\cdot\frac{1}{x}.$$

(Justificação: Aplicaram-se as regras de derivação de um produto e de um quociente de funções deriváveis, e ainda a de «derivação de função composta» à composta de

$$\begin{aligned} R^+-\{0,1\}&\to R\\ x&\to \log x\end{aligned} \quad \textit{com} \quad \begin{aligned} R-\{0\}&\to R\\ x&\to \frac{1}{x}\end{aligned}$$

e à de

$$\left.\begin{aligned} R^+-\{0,1\}&\to R\\ x&\to \frac{1}{\log x}\end{aligned} \quad \textit{com} \quad \begin{aligned} R&\to R\\ x&\to sen\, x\end{aligned}\right).$$

b) *Pode compor-se* g *com* f, *porque o domínio de* f — R — *contém o contradomínio de* g.

$$h'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)=f'\left(g\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)\right)\cdot g'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)=0,$$

porque

$$f'\left(g\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)\right)=f'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\cdot sen\,\frac{1}{\frac{1}{\pi}}\right)=f'(0)=0.$$

$$h'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)=f'\left(g\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)\right)\cdot g'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)=$$
$$=f'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\cdot(-1)\right)\cdot(-1)=-2\left|e^{\frac{2}{3\pi}}\cdot(-1)\right|=-2^{\frac{2}{3\pi}}$$

c) f *é estrictamente crescente. Com efeito:*

I) f *e estrictamente crescente em cada ponto* x *do seu domínio: se* $x\neq 0$ *por* $f'(x)=2|x|$ *ser maior que*

0 *e no ponto* 0, *porque se* $x < 0 < y$, *também* $x\,|x| = -x^2 < 0 < y^2 = y\,|y|$;

II) *Como o domínio de* f *é um intervalo,* I) *é suficiente para que* f *seja estrictamente crescente.*

3) a) *Aplicando um corolário do critério de Cauchy à série dos módulos, e, como para cada* $a \in R^{+} - \{0\}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a\,n^2 + 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n |x|^n} = \frac{a}{2}\,|x|,$$ *concluimos que:*

I) *se* $|x| < \dfrac{2}{a}$, *a série dada é convergente;*

II) *se* $|x| > \dfrac{2}{a}$, *a série dos módulos é divergente e, portanto, pelo teorema de Abel, a série dada é divergente.*

R: *O raio de convergência é, pois,* $r_a = \dfrac{2}{a}$ (*se* $a > 0$); *se* $a = 0$ *a série abeliana é evidentemente convergente para todo o* $x \in R$ *e* $r_0 = +\infty$.

b) *Analisemos a convergência de*

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-a\,n^2 - 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n x^n$$

nos pontos $-\dfrac{2}{a}$ *e* $\dfrac{2}{a}$ $(a > 0)$; *para* $x = -\dfrac{2}{a}$ *ou* $x = \dfrac{2}{a}$, $\left|\left(\dfrac{-a\,n^2 - 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n x^n\right| = \left(\dfrac{2\,n^2 + 4\,a}{2\,n^2 + a}\right)^n > 1$,

porque $a > 0$. *Logo, a série é divergente por o seu termo geral não convergir para* 0 *(uma condição necessária de convergência de uma série é que o seu termo geral tenha limite* 0). *Portanto*

R:
$$\text{se } a > 0 \to D_a = \left]-\frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right[,$$
$$\text{se } a = 0 \to D_0 = R.$$

4) a) *Vejamos para que pares* $(a, b) \in R^2$ *o sistema*
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ \quad\;\; y + z = a \\ \qquad\;\; z = b \end{cases}$$
é possível.

A característica da matriz $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$ *é* 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 = 2 \neq 0.$$

Uma condição necessária e suficiente para a compatibilidade da 4.ª equação com o sistema (possível!) das três primeiras é dada (Teorema de Rouché) pelo anulamento do determinante da matriz característica dessa equação (relativamente ao sistema principal das 3 primeiras):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & 2-b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 2-b \\ 0 & 1 & a-b \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a-b \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow 2\,(a - b) - 2 = 0 \longleftrightarrow a - b = 1$$

R: $A = \{(a, b) \in R^2;\ a - b = 1\}$

Nota: $r_{(a,b)}$, *se* $a - b = 1$, *tem um só ponto comum com* r, *porque a característica da matriz acima indicada é 3.*

b) $P(1, 1, 0)$; $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \to \overline{u} = \dfrac{(-2, 0, 2)}{\sqrt{8}} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \to \overline{v} = (1, 0, 0)$.

$\overline{u} + \overline{v}$ *tem a direcção de uma bissectriz e* $\overline{u} - \overline{v}$ *a direcção da outra.*

$$(1) \quad (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda \in R;$$

$$(2) \quad (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda \in R$$

As equações (1) *e* (2) *são soluções do problema.*

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Big| \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0,$$

o que mostra a perpendicularidade das bissectrizes.

c) *Aproveitando os resultados da alínea* b), *podemos escrever:*

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mu\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (\lambda, \mu) \in R^2$$

em resposta a c).

5) a) $f^{-1}(\{0\}) = \{a\,e_1 + b\,e_2;\ (a, b) \in R^2\}$. *É evidente que a soma de 2 elementos deste conjunto e o produto de um número real por um elemento deste conjunto*

ainda são elementos desse conjunto. Portanto, (condição necessária e suficiente demonstrada no curso), $f^{-1}(\{0\})$ *é um sub-espaço vectorial de* E. e_1 *e* e_2 *são linearmente independentes, porque* (e_1, e_2, e_3) *é uma base de* E; *por outro lado todo o vector de* $f^{-1}(\{0\})$ *é, como se vê, combinação linear de* e_1 *e* e_2. *Então* (e_1, e_2) *é uma base de* $f^{-1}(\{0\})$ *e, portanto,* $\dim(f^{-1}(\{0\}) = 2$.

b) $(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3)\, S\, (a'\,e_1 + b'\,e_2 + c'\,e_3) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow f(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3) = f(a'\,e_1 + b'\,e_2 + c'\,e_3) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow 4\,c\,e_3 = 4\,c'\,e_3 \longleftrightarrow c = c'$. *Temos então de provar que, se* $c = c'$,

$$(\lambda\,a\,e_1 + \lambda\,b\,e_2 + \lambda\,c\,e_3)\, S\, (\lambda\,a'\,e_1 + \lambda\,b'\,e_2 + \lambda\,c'\,e_3) \longleftrightarrow \longleftrightarrow \lambda\,c = \lambda\,c',$$

o que é evidente. Da mesma forma

$$[(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3) + (x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3)]$$
$$S\,[(a'\,e_1 + b'\,e_2 + c\,e_3) + (x'\,e_1 + y'\,e_2 + z\,e_3)]$$

porque as 3.as componentes são iguais.

c) $\bar{f}$ *é linear; isso resulta imediatamente da linearidade de* f; $\bar{f}$ *é injectiva:* $\bar{f}(p(x)) = \bar{f}(p(y)) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow f(x) = f(y) \longleftrightarrow x\,S\,y \longleftrightarrow p(x) = p(y)$. *Então* $\bar{f}$ *define um isomorfismo*$-EV$ *de* $\bar{E}$ *sobre* $\bar{f}(\bar{E})$ *e, como* $\bar{f}(\bar{E}) = f(E) = \{c\,e_3 ; c \in R\}$ $(\subset E)$ *tem manifestamente dimensão 1, também* $\bar{E}$ *tem dimensão 1.*

(Nota: $p : E \to \bar{E}$ *é a projecção canónica*).

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 2 — 20-6-64.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 2, 2′, *um* dos problemas 5, 5′ e os problemas 1, 3, 4. Quem desejar uma maior valorização da sua prova deverá optar pelo problema 5′. Pretende-se uma exposição clara e rigorosa.

5615 — 1) Num referencial ortonormado o plano π tem por equação $2x + y + 3z = 6$.

a) Escreva equações paramétricas de π, escolhendo para tal o ponto de intersecção de π com Ox e dois vectores livres perpendiculares entre si, um dos quais representável no plano Oxy.

b) De preferência aproveitando a alínea anterior, escreva equações paramétricas da recta d de maior declive de π relativamente a Oxy, que intersecta Ox.

c) Determine o ângulo de d com o plano Oxy.

2) Demonstre, *a partir das definições respectivas*, que

a) Toda a sucessão de Cauchy é limitada;

b) Toda a sucessão parcial de uma sucessão de de Cauchy é uma sucessão de Cauchy.

2′) Sendo X uma parte não vazia de R, designe X' o conjunto dos pontos de acumulação de X que pertencem a $R : X' = \{x \in R ; x$ é ponto de acumulação de $X\}$. Mostre que $\forall A\ (\emptyset \neq A \subset R),\ (A')' \subset A'$.

3) *a*) Determine a função derivada de g:

$$(]0,1] \cup \{2\}) \to R, \quad x \to e^{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)}$$

não esquecendo a indicação do domínio.

b) Considere a função

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\to (x-1)^2 \quad \text{se } x \in R^+ \cup (R^- \cap Q) \\ x &\to 0 \quad\quad\quad \text{se } x \in R^- \cap \complement Q. \end{aligned}$$

Diga se f tem derivadas laterais em 0 e determine as funções Df e $D(f\,|\,R^+)$, justificando.

c) Em que pontos f tem extremos relativos e em quais desses pontos tem extremos relativos estrictos?

4) Dada a aplicação

$$f : R^4 \to R^3$$
$$(x, y, z, t) \to (x + y + \pi z,\ x + 2y - z,\ 2x + 4y + z)$$

a) resolva a equação $f(x, y, z, t) = (1, 0, 0)$; escreva esta equação sob a «forma matricial» (pode começar por indicar a matriz M_f associada à aplicação linear f em relação às bases naturais de R^4 e R^3);

b) diga qual o contradomínio de f e se f é injectiva, justificando a resposta;

c) determine o conjunto $f^{-1}(\{0,0,0)\})$ e mostre que é um sub-espaço vectorial de R^4 (de dimensão 1).

5. Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ é convergente, expondo o raciocínio que fizer. O resultado encontrado permitir-lhe-á mostrar que sucessão $((-1)^n n^n / n!)_{n \in N}$ não tem limite? Porquê? $\left(\text{N.B. } e = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$.

5′. Seja $F = \mathcal{F}(A, R)$, $(\emptyset \neq A \subset R)$, o conjunto das funções reais de domínio A. Sobre F considere a relação de equivalência «quasi-igual» $f \sim g \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow [\{x \in A ; f(x) \neq g(x)\}$ é finito ou vazio].

a) Mostre que se $f \in F$ e f tem limite real em $a \in A$, f é quasi-igual a uma função contínua em a.

b) Seja $C = \mathcal{C}(A, R)$ a parte de F constituída pelas funções reais contínuas de domínio A. *Mostre* que se A é um intervalo não reduzido a um ponto, a aplicação canónica $p: C \to C/\sim_C$ é injectiva.

c) Indique, justificando, uma condição *necessária e suficiente* simples a impor a A para que a aplicação canónica $p: C \to C/\sim_C$ seja injectiva.

Resolução do exame 2

1. a) $P(3,0,0)$ *é o ponto de intersecção de* Ox *com* π. $\overline{u} = a\overline{c} + b\overline{j} + c\overline{k}$ *é representável sobre*

I) Oxy *se e só se* $c = 0$;

II) π *se e só se* $2a + b + 3c = 0$. *Uma solução deste sistema é* $(1, -2, 0)$. $\overline{v} = a'\overline{i} + b'\overline{j} + c'\overline{k}$ *é representável sobre* π *se e só se* $2a' + b' + 3c' = 0$; *é perpendicular a* $\overline{i} - 2\overline{j}$ *se e só se* $a' - 2b' = 0$ $((a', b', c') \neq (0, 0, 0))$. *Uma solução deste sistema é* $(6, 3, -5)$.

R: *A equação* $(x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(6, 3, -5)$, $(\lambda, \mu) \in R^2$ *é uma solução do problema.*

b) d *tem a direcção de* $\overline{v}$.

R: *A equação* $(x, y, z) = (3, 0, 0) + \sigma(6, 3, -5)$, $\sigma \in R$, *é uma solução do problema.*

c) *Se* α *é o plano* Oxy, $sen\,(\widehat{d, \alpha}) = |cos\,(\overline{v}, \overline{k})| =$

$$= \left| \frac{\overline{v} \,|\, \overline{k}}{|\overline{v}| \cdot |\overline{k}|} \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{36 + 9 + 25}} \right| .$$

R: $(\widehat{d, \alpha}) = Arc\,sen\,\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

2. *(Ver apontamentos das aulas teóricas).*

2'. *Vamos provar que se* x *é ponto de acumulação (real) de* A', *também é ponto de acumulação de* A. *Suponhamos que* $\forall \varepsilon \in R^+ - \{0\}$ $(V(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A' \neq \emptyset$, *e seja, para cada* $\varepsilon \in R^+ - \{0\}$, $y_\varepsilon \in (V(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \cdot y_\varepsilon \in A'$ *implica que* $\forall \delta \in R^+ - \{0\}$, $V(y_\varepsilon, \delta) \cap A \neq \emptyset$. *Em particular, para* $\delta = inf\,\{|y_\varepsilon - x|, \varepsilon - |y_\varepsilon - x|\}$, *será* $V(y_\varepsilon, \delta) \cap A \neq \emptyset$ *e, como* $V(y_\varepsilon, \delta) \subset V(x, \varepsilon) - \{x\}$, *será* $(V(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. *Portanto* x *é um ponto de acumulação de* A. c. q. d.

3. a) g *não tem derivada no ponto* 2, *que é um ponto isolado do domínio. Para* $x \in]0, 1]$

$$g'(x) = e^{\frac{sen\,x}{x^2}} \cdot \frac{x^2 \cos x - 2x\,sen\,x}{x^4} .$$

R: $g' :]0, 1] \to R$

$$x \to \frac{x \cos x - 2\,sen\,x}{x^3}\, e^{\frac{sen\,x}{x^2}} .$$

b) *A derivada à direita de* f *em* 0 *é* $f'_d(0) = (f\,|\,R^+)'(0) = 2 \cdot (0 - 1) = -2$. $f'_e(0)$ *seria o limite de* $\varphi: R^- - \{0\} \to R$ *no ponto* 0, *se este*

$$x \to \frac{f(x) - 1}{x}$$

limite existisse. Ora, o cálculo de $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi\left(-\dfrac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(-\dfrac{1}{n} - 1\right)^2 - 1}{-\dfrac{1}{n}} = -2 \text{ e de } \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{-\dfrac{\pi}{n}} = \lim_{n \to +\infty} n/\pi = +\infty$$

basta para mostrar que aquele limite não existe. Logo f *não tem derivada à esquerda em* 0.

$$\begin{aligned} Df: R^+ - \{0\} &\to R \\ x &\to 2(x - 1) \end{aligned}$$

(f *é não derivável em* 0, *pois nem sequer é derivável à esquerda, como vimos; para* $x \in R^- - \{0\}$, f *é evidentemente descontínua, a fortiori, não finitamente derivável. Poder-se-ia mesmo mostrar que não era derivável, mas tal não é necessário para a resolução desta alínea).*

$$\begin{aligned} D(f\,|\,R^+): R^+ &\to R \\ x &\to 2(x - 1) \end{aligned}$$

$(f\,|\,R^+ = F\,|\,R^+$, *onde* $F: R \to R$, $x \to (x - 1)^2$

e F é *derivável, sendo* $\forall x \in R$, $F'(x) = 2(x - 0)$.

c) $\forall x \in R$, $f(x) \geq 0$. *Portanto, em todo o* $x \in R^- \cap \complement Q$, *como* $f(x) = 0$, f *tem um mínimo relativo (que é não estricto, como se vê atendendo à definição). De* $(f\,|\,(R^+ \cup (R^- \cap Q)))'(x) = 2(x - 1)$ *(para* $x \in R^+ \cup R^- \cap Q)$), *resulta que o único ponto — além dos já considerados — em que* f *pode ter um extremo relativo, é* 1. *Ora* $f(1) = 0$ *e* $f(x) > 0$ *se* $x \in]0, 2[- \{1\}$; *portanto* f *tem um mínimo relativo relativo estricto em* 1.

4. a) $\begin{cases} x + y + \pi z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 2 - 2 + 4\pi - 4\pi + 4 - 1 = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2 + 4}{3} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-(1 + 2)}{3} = -1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\2&4&0\end{vmatrix}}{3}=\frac{4-4}{3}=0.$$

R: *O conjunto das soluções da equação dada é* $A=\{(2,-1,0,t);\ t\in R\}$.

A equação pode escrever-se sob a forma:

$$\left\|\begin{matrix}1&1&\pi&0\\1&2&-1&0\\2&4&1&0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}x\\y\\z\\t\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\|\qquad (x,y,z,t)\in R^4.$$

b) f *é não injectiva, porque* $f^{-1}(\{1,0,0\})=A$ *tem mais de um elemento. O contradomínio de* f *é* R^3, *porque, qualquer que seja* $(u,v,w)\in R^3$, *a equação* $f(x,y,z,t)=(u,v,w)$ *é possível, uma vez que a característica da matriz* M_f *é* 3.

c) $f^{-1}(\{(0,0,0)\})=\{(0,0,0,t);\ t\in R\}$ *é um sub-espaço vectorial de* R^4, *porque a soma* $(0,0,0,t_1+t_2)$ *de dois quaisquer dos seus elementos —* $(0,0,0,t_1)$ *e* $(0,0,0,t_2)$ *— ainda lhe pertence e o produto* $(0,0,0,\lambda t_0)$ *de um número real* λ *por um seu elemento —* $(0,0,0,t_0)$ *— ainda lhe pertence.* $((0,0,0,1))$ *é uma base de* $f^{-1}(\{(0,0,0)\})$, *pelo que ele tem dimensão* 1.

5. *Estudemos a «série dos módulos»* $\sum_{1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$. *Aplicando-lhe um corolário do critério de D'Alembert, como*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!/(n+1)^{n+1})}{(n!/n^n)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

concluímos que é convergente, e, portanto, também a série dada.

Do resultado precedente podemos concluir que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, *e, como* $\forall\, n\in N$ $\frac{n!}{n^n}>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$. *Ora, pondo* $\forall\, n\in N$, $a_n=(-1)^n\frac{n^n}{n!}$, *é imediato que*

I) $(a_{2n})_{n\in N}$ *é uma sucessão parcial de* $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n\in N}$, *logo tem limite* $+\infty$;

II) $(a_{2n-1})_{n\in N}$ *é uma sucessão parcial de* $\left(-\frac{n^n}{n!}\right)_{n\in N}$, *logo tem limite* $-\infty$.

$(a_n)_{n\in N}$ *não tem, pois, limite (porque, se tivesse, as suas sucessões parciais teriam todas o mesmo limite).*

5'. a) *A função* $g: A\to R$ *é contínua*

$$\begin{aligned}&x\to f(x)\ \textit{se}\ x\neq a\\&a\to \lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} f(x)\end{aligned}$$

em a *e quasi igual a* f *(será igual se* f *for contínua em* a).

b) *Suponhamos* $f\in C$, $g\in C$ *e* $f\neq g$, *i. e.*, $\exists\, x\in A$, $f(x)-g(x)\neq 0$; *como* f *e* g *são contínuas*, $\exists\, \varepsilon>0$, $0\notin(f-g)\,(A\cap V(x,\varepsilon))$. *Mas, por* A *ser um intervalo não reduzido a um ponto,* $A\cap V(x,\varepsilon)$ *é infinito e, portanto,* $f \not\sim_C g$, *ou, o que é o mesmo,* $p(f)\neq p(g)$. *Logo* p *é injectiva.*

c) *Note-se que na alínea* b) *a hipótese de* A *ser um intervalo não reduzido a um ponto só foi utilizada para demonstrar que* $\forall\, x\in A$, $\forall\, \varepsilon>0$, $A\cap V(x,\varepsilon)$ *é infinito, ou, o que é equivalente, que* todo o ponto de *A* é ponto de acumulação de *A* (*i. e.*, $A\subset A'$). *É, pois, evidente que esta condição (mais fraca) é ainda suficiente para* p *ser injectiva.*

Mostremos que é necessária: se y *é um ponto isolado de* A *e* $f\in\mathcal{C}$, *a função* $g\,[\in F]$ *tal que* $f\,|\,(A-\{y\})=g\,|\,(A-\{y\})$ *e* $g(y)=f(y)+1$ *é ainda contínua e teremos ainda* $g\in C$, $f\neq g$, $f\sim_C g$, $p(f)=p(g)$; p *não é injectiva.*

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 3 — 6-7-64.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 3, 3', *um* dos problemas 5, 5' e os problemas 1, 2, 4. Quem desejar uma maior valorização da sua prova deverá optar pelo problema 5'. Pretende-se uma exposição clara e rigorosa.

5616 — 1) Seja

$f: C\to C$ (C = corpo dos números complexos).
$z\to z^5+1$

a) Determine duas soluções da equação $f(z)=-i$.

b) Sendo $A=\{a+ib;\ (a,b)\in R^2\wedge a\leqslant 0\}$ e $g=f\,|\,A$, resolva a equação $g(z)=-i$.

2) (N. B. — O referencial $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, utilizado neste problema, satisfaz às seguintes condições: $\vec{i}\,|\,\vec{j}=\vec{j}\,|\,\vec{k}=\vec{i}\,|\,\vec{k}=0$, $|\vec{i}|/2=|\vec{j}|=|\vec{k}|/2=1$).

a) Deduza equações paramétricas e uma equação não paramétrica do plano α que passa por $Q(1,0,0)$ e é perpendicular à recta r de equações $x=\lambda$, $y=\lambda$, $z=5$ $(\lambda\in R)$.

b) Deduza equações paramétricas de uma recta s de α que passe por Q e faça um ângulo de $\pi/3$ com a direcção de $\overline{k}$.

c) Qual a equação de α num referencial $(\overline{Q}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K})$, tal que I tem a direcção de s e tal que $\overline{K}$ é perpendicular a r?

3) Sejam $I=[0,1]$ e $f: I \to R$; suponha que f é derivável finitamente e que $(\exists\, M \in R)\,(\forall\, x \in I)\,(|f'(x)| \leqslant M)$. *Mostre* que «$(x,y) \in I^2 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|$». (Aplique o teorema de Lagrange).

3') *Mostre* que é condição suficiente para uma função $f: A \to R$ $(\emptyset \neq A \subset R)$ derivável em $a \in A$ ser contínua em a, que $f'(a) \in R$. A condição será necessária? Se a resposta for afirmativa, justifique-a, se for negativa dê um contra-exemplo.

4) Relativamente à base (e_1, e_2, e_3, e_4) sobre o espaço vectorial real E, o operador linear $g: E \to E$ tem por matriz associada:

$$M_g = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

a) Determine as coordenadas de $w = g(e_3 + e_4)$ na base (e_1, e_2, e_3, e_4).

b) Da análise de M_g *conclua* que $g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)$ são vectores linearmente independentes e que, *portanto*, $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ é uma base de E. Justifique esta *última* conclusão apoiando-se em resultados enunciados no curso.

c) Quais as coordenadas do vector w considerado em *a*) na base mencionada em *b*)?

5) Seja $h: R \to R$
$$x \to 2x^3 + 12x^2 - 50.$$

a) A equação $h(x) = 0$ tem 3 soluções. Indique 3 intervalos abertos disjuntos cada um dos quais contenha uma solução. (Utilize os teoremas de Rolle e de Cauchy!). Justifique.

b) Designando por r a única solução positiva da equação $h(x) = 0$, utilize qualquer dos «métodos de aproximação» estudados no curso para determinar um número $r' \in R$ tal que $|r - r'| < 1/10$.

$$(\varepsilon_\rho = 1/\sigma \cdot (b-a)^2 \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot 1/\left(\inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|\right);$$
$$\sigma = 2 \text{ se } \rho = t;\ \sigma = 8 \text{ se } \rho = c).$$

5') Seja $f: I \to R$, $(I = [0,1])$, com as seguintes propriedades:

1.ª) $f(I) \subset (I)$; 2.ª) $(\exists\, M \in]0,1[)\,(\forall\,(x,y) \in I^2)$
$$(|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|).$$

Definimos uma sucessão $(f_n)_{n \in}$ de elementos de $\mathcal{F}(I, R)$ da seguinte forma: $f_1 = f$ e $\forall\, n \in N$, $f_{n+1} = f \circ f_n$.

a) Mostre que a equação $f(x) = x$, $x \in I$, tem no máximo uma solução.

b) Prove, por indução, que $(\forall\, n \in N)\,(\forall\,(x,y) \in I^2)$ $(|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M^n\,|x-y|)$.

c) Atendendo à alínea *b*) e à seguinte observação trivial — $\forall\, x \in I$, $f_{n+p}(x) = f_n(f_p(x))$ —, prove que, $\forall\, x \in I$, a sucessão *numérica* real $f_n(x))_{n \in N}$ é de Cauchy, e portanto, convergente.

d) Seja $F = \lim_{n \to +\infty} f_n$. Prove que F é constante.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Complemento do Exame 3 — Julho de 1964.

Observação — As questões seguintes constituem um prolongamento do exercício 5' do exame 3 e foram propostas em provas orais a alunos que tinham resolvido o problema 5' nas provas escritas.

e) Mostre que f é contínua.

f) Mostre que a equação $f(x) = x\ (x \in I)$ tem *uma* solução. (Utilize o teorema de Cauchy e a alínea *a*)).

g) Mostre que se $F([0,1]) = \{x_0\}$ (cf. *d*)), x_0 é solução da equação $f(x) = x\ (x \in I)$. (N. B. — Esta alínea, que não faz intervir *f*), fornece uma 2.ª demonstração da existência de uma solução da equação considerada).

h) Averiguar quais dos raciocínios feitos para a resolução das alíneas anteriores são generalizáveis a funções definidas em partes de R que não sejam intervalos fechados.

Resposta à alínea h): *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) permanecem válidas sendo o domínio de f uma parte qualquer não vazia de R (se o domínio não for limitado, é, porém, necessária uma alteração na demonstração proposta para a alínea *c*)); em *f*) intervem de maneira essencial o facto de o domínio de f ser um *intervalo fechado*; em *g*) intervem a compacidade do domínio.

Obs. I — Como corolário desta última conclusão, observemos que se K é um compacto de R $(\emptyset \neq K \subset R)$ e $f: K \to R$ satisfaz às propriedades

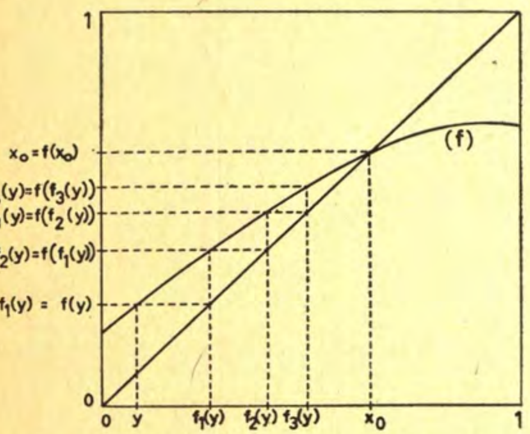
1) $f(K) \subset K$ e

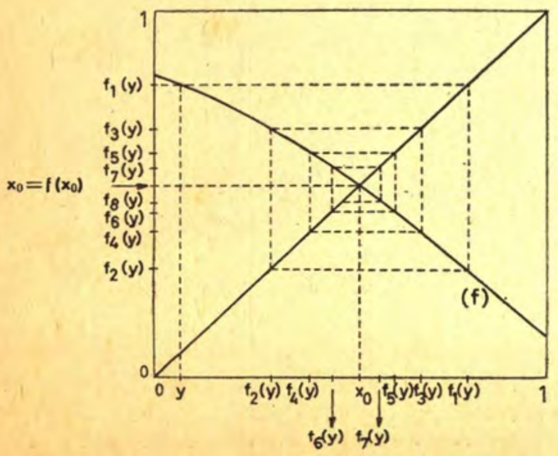
2) $(\exists M \in]0,1[)\ (\forall (x,y) \in K^2)\ (|f(x) - f(y)| \leqslant$
$\leqslant M|x-y|)$,

então a equação $f(x) = x$ $(x \in K)$ tem uma (única!) solução, ou, como também se diz, «a função f tem um (único!) *ponto fixo*». Este é um caso particular de um resultado conhecido com o nome de «teorema do ponto fixo», com importantes aplicações. A demonstração anterior (a), b), c), d), e), g)) utiliza o chamado «método das aproximações sucessivas».

Obs. II — Uma condição suficiente para $f: [0,1] \to R$ ter a propriedade 2) é que seja derivável e que exista $M \in]0,1[$ tal que $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leqslant M$ (ver problema 3 do exame 3). Mas f pode satisfazer à propriedade 2) sem ser derivável.

Obs. III — Imagem geométrica do problema:





Resolução do exame 3

1) a) $f(z) = -i \iff z^5 + 1 = -i$, $z \in C \iff z^5 = -1 - i$, $z \in C$. *As soluções da equação* $f(z) = -i$ *são as cinco raizes de índice* 5 *do complexo* $-1-i$. *Utilizando a fórmula de Moivre e atendendo a que* $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\, sen\,\frac{5\pi}{4}\right)$, *podemos escrever:*

$$u_k = \sqrt[10]{2}\left(\frac{5\pi/4 + 2k\pi}{5} + i\, sen\,\frac{5\pi/4+2k\pi}{5}\right)$$
$$k \in \{0,1,2,3,4\}.$$

R: *Duas soluções da equação dada são:*

$$u_0 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\, sen\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[10]{64}}{2} + \frac{\sqrt[10]{64}}{2}\, i =$$
$$= \frac{\sqrt[5]{8}}{2} + \frac{\sqrt[5]{8}}{2}\, i$$

$$u_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20} + i\, sen\,\frac{13\pi}{20}\right).$$

b) $g^{-1}\{-i\} = f^{-1}\{-i\} \cap A = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\} \cap A$. *As soluções de* $g(z) = -i$ *são as de* $f(z) = -i$ *cuja «parte real» é menor ou igual a zero. Para* u_k *ser solução de* $g(z) = -i$ *terá de ser, portanto,*

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{5\pi/4 + 2k\pi}{5} \leqslant \frac{3\pi}{2}\ \textit{(Note-se que } 0 \leqslant k \leqslant 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{5\pi/4+2k\pi}{5} < 2\pi).$$

Terá de ser, pois:

$$\frac{5\pi}{4} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{25\pi}{4} \quad ou \quad \frac{5}{8} \leqslant k \leqslant \frac{25}{8}$$

ou
$$1 \leqslant k \leqslant 3.$$

R: *As soluções de* $g(z) = -i$ *são*

$$u_1, u_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{20} + i\, sen\,\frac{21\pi}{20}\right)$$

e

$$u_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{20} + i\, sen\,\frac{29\pi}{20}\right).$$

2) *Comecemos por notar que* $\forall (a,b,c) \in R^3$, $\forall (a',b',c') \in R^3$ $(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) \mid (a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}) =$ $= a a' |\bar{i}|^2 + b b' |\bar{j}|^2 + c c' |\bar{k}|^2 = 4 a a' + b b' + 4 c c'$.

a) *A equação de* α *é* $(P - Q) \mid (\bar{i} + \bar{j}) = 0$, *pois* $\bar{i} + \bar{j}$ *é um vector director de* r. *A equação cartesiana de* α *será, pois,* $4(x-1) + y = 0$ *ou* $4x + y = 4$,

$(x, y, z) \in R^3$. $\overline{i} - 4\overline{j}$ *e* $\overline{k}$ *são dois vectores linearmente independentes representáveis sobre* α. $(x, y\, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, -4, 0) + \mu(0, 0, 1)$ $(\lambda, \mu) \in R^2$ *é uma equação paramétrica de* α.

b) *Um vector representável em* α *será combinação linear de* $\overline{i} - 4\overline{j}$ *e* $\overline{k}$: $\overline{u}(\lambda, \mu) = \lambda\overline{i} - 4\lambda\overline{j} + \mu\overline{k}$. *Para* $\overline{u}(\lambda, \mu)$ *ser vector director de uma recta deverá ser* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = |\cos(\overline{u}(\lambda, \mu), \overline{k})| = \left|\frac{\overline{u} \mid \overline{k}}{|\overline{u}| \cdot |\overline{k}|}\right|$$

ou

$$\frac{1}{2} = \left|\frac{4\mu}{\sqrt{4\lambda^2 + 16\lambda^2 + 4\mu^2} \cdot 2}\right|$$

é a condição a impor a (λ, μ) *para* $\overline{u}(\lambda, \mu)$ *definir a direcção de uma recta* s *solução do problema. A condição indicada é equivalente à seguinte:* $4\mu\lambda^2 + 16\lambda^2 + 4\mu^2 = 16\mu^2$ $((\lambda, \mu) \neq (0, 0))$, *ou* $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = \sqrt{\frac{3}{5}}$. *À solução* $\lambda = \sqrt{3}$, $\mu = \sqrt{5}$ *corresponde o vector director* $\overline{u}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) = \sqrt{3}\,\overline{i} - 4\sqrt{3}\,\overline{j} + \sqrt{5}\,\overline{k}$ *e a recta* s *de equação paramétrica*

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \sigma(\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, \sqrt{5}), \quad \sigma \in R.$$

(Obs. — *Obteríamos* outra *recta satisfazendo às condições do problema tomando a solução* $(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$).

c) *Note-se que* $\overline{I}$, *tendo a direcção de* $s\,(\subset \alpha)$, *é representável em* α *e que* $\overline{K}$, *sendo perpendicular a* r, *é também representável em* α. *Como, por outro lado,* $Q \in \alpha$, *a equação de* α *é* $Y = 0$, $(X, Y, Z) \in R^3$. *(Notação:* $P - Q = X\overline{I} + Y\overline{J} + Z\overline{K}$).

3) f, *por ser derivável finitamente, é contínua. Estamos, pois, nas condições de aplicação do Teorema de Lagrange.*

Seja $(x, y) \in I^2$;

I) *se* $x < y$, *pelo Teorema de Lagrange*

$$\exists\, z \in]x, y[\text{ tal que } f(y) - f(x) = f'(z) \cdot (y - x);$$

será, pois,

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = $$
$$= |f'(z)| \cdot |y - x| \leqslant M \cdot |x - y|.$$

II) *se* $y < x$, *anàlogamente* $\exists\, w \in]y, x[$, $f(x) - f(y) = f'(w) \cdot (x - y)$; $|f(x) - f(y)| = |f'(w)| \cdot |x - y| \leqslant M |x - y|$.

III) *se* $x = y$, *é evidente que* $0 = |f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y| = 0$.

3') *(Ver apontamentos das aulas teóricas. A função* $f : R^+ \to R$, $x \to \sqrt{x}$ *é derivável e contínua em* 0 *e* $f'(0) \notin R$).

4) a) *A* $e_3 + e_4$ *corresponde, pela fixação da base* (e_1, e_2, e_3, e_4), *a matriz coluna* $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$; *a* $g(e_3 + e_4)$ *corresponderá*

$$M_g \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

portanto $w = g(e_3 + e_4) = -e_1 + 4e_2 + 4e_3 + e_4$ *e as suas coordenadas são* $-1, 4, 4$ *e* 1 *(na base* (e_1, e_2, e_3, e_4)).

b) *As colunas de* M_g *são constituídas, respectivamente, pelas coordenadas de* $g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)$ *na base* (e_1, e_2, e_3, e_4). *Estes vectores são linearmente independentes se e só se* $\det(M_g) \neq 0$. *Ora*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= -10 \neq 0.$$

Portanto, $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ *é uma base de* E; *com efeito, se um espaço vectorial tem uma base com* n *elementos, a sua dimensão é* n *e qualquer «sistema» de* n *vectores linearmente independentes constitui uma base.*

c) *Como* g *é linear,* $w = g(e_3 + e_4) = g(e_3) + g(e_4)$ *e as coordenadas de* w *na base* $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ *são:* 0, 0, 1 *e* 1.

5) a) $h' : R \to R$, $x \to 6x^2 + 24x$ *é a função derivada de* h, -4 *e* 0 *os seus zeros. Atendendo a que*

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty,$$
$$h(-4) = 2 \cdot (-64) + 12 \cdot 16 - 50 = 14 > 0$$

e

$$h(0) = -50 < 0, \begin{pmatrix} -\infty & -4 & 0 & +\infty \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

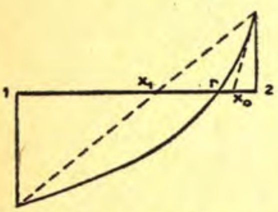
podemos concluir que cada um dos intervalos abertos disjuntos $]-\infty, -4[$, $]-4, 0[$ *e* $]0, +\infty[$ *contém uma só solução da equação* $h(x) = 0$. *Com efeito, existe em cada um destes intervalos abertos, no máximo* *uma solução (se num deles existissem pelo menos duas, pelo Teorema de Rolle,* h' *anular-se-ia num ponto — pelo menos — desse intervalo). O Teorema de Cauchy permite concluir então, directamente a existência de uma solução em* $]-4,0[$ *e indirectamente em* $]-\infty,-4[$ *e em* $]0,+\infty[$.

b) $h(0)=-50<0$, $h(1)=-36<0$, $h(2)=14>0$. *Pelo Teorema de Cauchy* $r\in]1,2[$. $\forall x\in]1,2[$ $h'(x)=6x^2+24x$, $h''(x)=12x+24>0\cdot$ $h'(2)=24+48=72$. *Aplicando o método das tangentes a* $h|[1,2]$ *no ponto* 2 *(note-se que* $h(2)\cdot h''(2)>0$), *obtemos* $-14=72(x_0-2)$; $x_0=2-\dfrac{7}{36}<1{,}81$.

Aplicando o método das cordas, concluimos que

$$-14=\frac{14-(-36)}{2-1}(x_1-2);$$

$$x_1=2-\frac{14}{50}=2-0{,}28=1{,}72.$$



Podemos afirmar que $r\in]1{,}72,1{,}81[$. *Como*

$$1{,}81-1{,}72=0{,}09<1/10,$$

qualquer elemento de $[1{,}72,1{,}81]$ *é solução do problema, em particular podemos escolher* $r'=1{,}76$.

5') a) *Suponhamos que a equação tem pelo menos duas soluções:* x_0 *e* x_1. *Então* $f(x_0)=x_0$ *e* $f(x_1)=x_1$ *implicam*

(1) $|f(x_0)-f(x_1)|=|x_0-x_1|$.

Por outro lado a 2.ª propriedade implica

(2) $|f(x_0)-f(x_1)|\leqslant M\cdot|x_0-x_1|$, *sendo* $M\in]0,1[$. *Ora* (1) $\wedge$ (2) *é absurdo se* $|x_0-x_1|\neq 0$.

Portanto fica demonstrada a tese.

b) i) $n=1$. *Como* $f_1=f$, $\forall(x,y)\in I^2$

$$|f_1(x)-f_1(y)|\leqslant M|x-y|,$$

pela 2.ª propriedade;

ii) *Suponhamos a tese demonstrada para* $n=k$; *então*

$$\forall(x,y)\in I^2\ |f_{k+1}(x)-f_{k+1}(y)|$$
$$\underset{(A)}{=}|f(f_k(x))-f(f_k(y))|\underset{(B)}{\leqslant}M|f_k(x)-f_k(y)|$$
$$\underset{(C)}{\leqslant}M\cdot M^k\cdot|x-y|=M^{k+1}|x-y|;$$

a tese está demonstrada para $n=k+1$.

((A) *por definição de* f_{k+1}; (B) *pela 2.ª propriedade aplicada a* $(f_k(x),f_k(y))\in I^2$; (C) *por hipótese de indução*).

c) (I) $\forall x\in I$, $\forall(n,p)\in N^2$, $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|f_n(f_p(x))-f_n(x)|\leqslant M^n|f_p(x)-x|\leqslant M^n$, *a última desigualdade resultando de que* $f_p(x)\in[0,1]$ *e* $x\in[0,1]$ *implicam* $|f_p(x)-x|\leqslant 1$. *Como* $M\in]0,1[$, $(M^n)_{n\in N}$ *converge para* 0, *i. e.,* $(\forall\varepsilon\in R^+-\{0\})$ $(\exists n_0\in N)$ $(\forall n\in N, n>n_0)$ $(|M^n|<\varepsilon)$.

Então, por (I), *concluimos que*

$$(\forall\varepsilon\in R^+-\{0\})(\exists n_0\in N)(\forall n\in N,n>n_0)$$
$$(\forall x\in I)(\forall p\in N)(|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon)$$

a fortiori

$$(\forall x\in I)(\forall\varepsilon\in R^+-\{0\})(\exists n_0\in N)(\forall n\in N,n>n_0)$$
$$(\forall p\in N)(|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon),$$

isto é, $(\forall x\in I)$ $((f_n(x))_{n\in N}$ *é uma sucessão de Cauchy).*

d) $\forall x\in I$, $F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$. *Para provar que* F *é constante, ter-se-á de provar que* $\forall(x,y)\in I^2$, $F(x)=F(y)$. *Ora* $F(x)-F(y)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)-\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(y)=\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)-f_n(y))$; *mas, por* b), $(\forall(x,y)\in I^2)(\forall n\in N)(|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant M^n)$ *e, como* $\lim\limits_{n\to+\infty}M^n=0$, *aquele limite também é nulo, i. e.,* $F(x)=F(y)$ *c. q. d.*

Enunciados e soluções dos N.os 5614 a 5616 de M. Arala Chaves

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — Exame Final — Época de Julho — 1.ª chamada — Prova escrita — 9-7-1964.

5617 — 1) Considere o conjunto R^2 e adopte as leis de composição:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,0)\quad(\alpha\ \text{real}).$$

O conjunto R^2 fica munido de uma estrutura de espaço vectorial?

R: *Em relação à lei de composição interna, o conjunto constitui um grupo comutativo. Em relação à lei de composição externa tem-se:* $1(x_1,x_2)=(x_1,0)\neq(x_1,x_2)$ *e portanto o conjunto não fica munido de uma estrutura de espaço vectorial.*

5618 — 2) Dada a série $\sum\limits_1^\infty u_n$, com $u_n=a\varphi(n+1)+b\varphi(n)+c\varphi(n-1)$ e $a+b+c=0$, mostre que $S_n=a\varphi(n+1)+(a+b)\varphi(n)+b\varphi(1)+c\varphi(1)+$

$+ c\varphi(0)$. Se $\lim \varphi(n) = l \neq \infty$ qual é a soma da série?

Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

R:
$$\begin{aligned} u_1 &= a\varphi(2) + b\varphi(1) + c\varphi(0) \\ u_2 &= a\varphi(3) + b\varphi(2) + c\varphi(1) \\ u_3 &= a\varphi(4) + b\varphi(3) + c\varphi(2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= a\varphi(n+1) + b\varphi(n) + c\varphi(n-1) \end{aligned}$$

e, somando membro a membro estas n *igualdades, obtém-se:*

$$\begin{aligned} S_n &= a[\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n+1)] + \\ &+ b[\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)] + \\ &+ c[\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n-1)] = \\ &= (a+b+c)[\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n-1)] + \\ &+ a\varphi(n+1) + (a+b)\varphi(n) + b\varphi(1) + \\ &+ c\varphi(1) + c\varphi(0). \end{aligned}$$

Se $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = l \neq \infty$, *então* $S = al + (a+b)l + b\varphi(1) + c\varphi(1) + c\varphi(0) = (2a+b)l + (b+c)\varphi(1) + c\varphi(0)$.

Como $u_n = \dfrac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$, *pode utilizar-se o resultado anterior com* $\varphi(n) = \dfrac{1}{n+1}$, $a = -1$, $b = -1$ *e* $c = 2$. *Dado que* $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = 0$, *vem* $S = (-1+2)\dfrac{1}{2} + 2\cdot 1 = \dfrac{5}{2}$.

5619 — 3) A que condição deve obedecer o parâmetro real k para que as imagens de $f(x) = x\log x + kx^2$ possuam um ponto de inflexão?

Prove que o lugar geométrico dos pontos de inflexão de $f(x)$ é $y = x\log x - \dfrac{x}{2}$.

R: *Como tem de ser* $x > 0$ *e* $f''(x) = \dfrac{2kx+1}{x}$, *haverá ponto de inflexão para* $x = -\dfrac{1}{2k}$ *e portanto terá de ser* $k < 0$.

Reciprocamente, com $k < 0$ *vem* $f''(x) > 0$ *para* $x < -\dfrac{1}{2k}$ *e* $f''(x) < 0$ *para* $x > -\dfrac{1}{2k}$. *Portanto, há ponto de inflexão, se e só se* $k < 0$.

Os pontos de inflexão satisfazem com suas coordenadas às relações $y = x\log x + kx^2$ *e* $2kx + 1 = 0$. *Eliminando* k, *encontra-se* $y = x\log x - \dfrac{x}{2}$.

5620 — 4) Dada a tabela de valores $\begin{array}{c|c} x & x_1\ x_2 \cdots x_n \\ \hline y & y_1\ y_2 \cdots y_n \end{array}$ e sabendo que os pontos $(x_1, y_1), \cdots (x_n, y_n)$ estão sensìvelmente em linha recta, admita-se que $y = mx + p$. Que valores se devem escolher para m e p por forma a minimizar

$$F(m, p) = \sum_1^n (y_i - mx_i - p)^2.$$

R: *As condições necessárias para a existência de mínimo são*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial m} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 0 \end{array}\right., \text{ isto é, } \left\{\begin{array}{l} -2\sum\limits_1^n (y_i - mx_i - p)\, x_i = 0 \\ -2\sum\limits_1^n (y_i - mx_i - p) = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m\sum\limits_1^n x_i^2 + p\sum\limits_1^n x_i = \sum\limits_1^n x_i y_i \\ m\sum\limits_1^n x_i + p\cdot n = \sum\limits_1^n y_i \end{array}\right..$$

A regra de CRAMER *dá imediatamente*

$$m = \frac{n\sum\limits_1^n x_i y_i - \left(\sum\limits_1^n x_i\right)\left(\sum\limits_1^n y_i\right)}{n\sum\limits_1^n x_i^2 - \left(\sum\limits_1^n x_i\right)^2}$$

$$p = \frac{\left(\sum\limits_1^n x_i^2\right)\left(\sum\limits_1^n y_i\right) - \left(\sum\limits_1^n x_i\right)\left(\sum\limits_1^n x_i y_i\right)}{n\sum\limits_1^n x_i^2 - \left(\sum\limits_1^n x_i\right)^2}$$

Para estudar a condição suficiente para a existência de mínimo calculem-se as derivadas $s = \dfrac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial p} = 2\sum\limits_1^n x_i$, $r = \dfrac{\partial^2 F}{\partial m^2} = 2\sum\limits_1^n x_i^2$ *e* $t = \dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 2n$.
Ora $s^2 - rt = 4\left[\left(\sum\limits_1^n x_i\right)^2 - n\sum\limits_1^n x_i^2\right]$ *e, fazendo* $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_1^n x_i}{n}$ *e* $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$, *vem* $s^2 - rt = -4n^2\sigma^2 < 0$. *Como* $r > 0$, *trata-se efectivamente de um mínimo.*

5621 — 5) Mostre que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x - 2y + z \qquad\quad &= 0 \\ y - z + t \quad\ &= 0 \\ z - 2t + u &= 0 \end{aligned}$$

é indeterminado de grau 2, calcule soluções independentes e apresente a solução geral como composição das soluções independentes.

R: *A matriz do sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 3 *e tomando para determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ *obtêm-se fàcilmente duas soluções independentes*

$$(0,1,2,1,0) \ e \ (-1,-1,-1,0,1).$$

A solução geral é

$$X = \alpha(0,1,2,1,0) + \beta(-1,-1,-1,0,1)$$

ou

$$\begin{cases} x = -\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 2\alpha - \beta \\ t = \alpha \\ u = \beta \end{cases}$$

5622 — 6) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,1,1)$ e é perpendicular à recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y \quad\;\; = 0 \end{cases}.$$

R: *A estrela de planos que passa por* $P(1,1,1)$ *é* $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$ *e os parâmetros directores de* r *são*

$$h = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \ k = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$e \ l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

A condição de perpendicularidade é $\dfrac{A}{h} = \dfrac{B}{k} = \dfrac{C}{l}$ *ou* $A = B = \dfrac{C}{-2} = m$, *isto é,* $A = m$, $B = m$ *e* $C = -2m$. *O plano pretendido tem por equação* $m(x-1) + m(y-1) - 2m(z-1) = 0$ *ou* $x + y - 2z = 0$.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — Exame Final — Epoca de Julho — 2.ª chamada — Prova Escrita — 13-7-1964.

5623 — Dada a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x}{x} \ (x > 0) \\ 1 \ (x = 0) \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \ (x < 0) \end{cases}$, resolva os seguintes problemas:

a) Calcule a oscilação nos pontos $x = 0$ e $x = \infty$. Quais são os pontos de descontinuidade de $f(x)$? Porquê?

b) Calcule $f'_d(0)$ e $f'_e(0)$. Existe $f'(0)$? Porquê?

R: a) $f(+0) = -\infty$ *e* $f(-0) = 1$ *e portanto* $\omega(0) = +\infty$; $f(+\infty) = 0$ *e* $f(-\infty) = 0$ *e portanto* $\omega(\infty) = 0$. *Como* $\dfrac{\log x}{x}$ *e* $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *são cocientes de funções contínuas, a função* f(x) *é contínua em todo o campo de existência excepto para* $x = 0$ *onde apresenta uma descontinuidade infinita de 1.ª espécie. A função também é contínua no infinito.*

$$\text{b)} \quad f'_d(0) = \lim_{x=+0} \frac{\dfrac{\log x}{x} - 1}{x} = -\infty$$

$$f'_e(0) = \lim_{x=-0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x} = \lim_{x=-0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x=-0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x=-0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0.$$

Não existe $f'(0)$ *porque* $f'_d(0) \neq f'_e(0)$.

2) Calcule:

a) $P \cos x \log(1 + \cos x)$.

b) $P \dfrac{x^2 - x}{x^4 + 3x^2 + 2}$.

R: a) $P \cos x \log(1 + \cos x) = \operatorname{sen} x \log(1 + \cos x) + P \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} = \operatorname{sen} x \log(1 + \cos x) + P \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \operatorname{sen} x \log(1 + \cos x) + P(1 - \cos x) = \operatorname{sen} x \log(1 + \cos x) + x - \operatorname{sen} x + C$.

b) *Como as raízes de* $x^4 + 3x^2 + 2$ *são* $\pm\sqrt{2}\, i$ *e* $\pm i$, *vem* $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ *e*

$$\frac{x^2 - x}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{x^2 - x}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)}$$

tem de ser decomposta em elementos simples. Ora

$$\frac{x^2 - x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{S_0}{x^2+2} + \frac{T_0}{x^2+1} .$$

Cálculo de S_0:

$R_\Delta(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2+1}$ *e ordenando o numerador e denominador segundo as potências crescentes de* $\Delta = x^2 + 2$, *vem* $R_\Delta(x) = \dfrac{(-2-x)+\Delta}{-1+\Delta}$ *e* $S_0 = 2 + x$.

Cálculo de T_0:

$R_\Omega(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2+2}$ *e ordenando o numerador e denominador segundo as potências crescentes de* $\Omega = x^2+1$, *vem* $R_\Omega(x) = \dfrac{(-1-x)+\Omega}{1+\Omega}$ *e* $T_0 = -1 - x$.

Então

$$\frac{x^2 - x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{2+x}{x^2+2} - \frac{1+x}{x^2+1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

e

$$P \frac{x^2 - x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \, arctg \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \log (x^2+2) - arctg\, x - \frac{1}{2} \log (x^2+1) .$$

3) Ache o desenvolvimento em série de Mac Laurin da função $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$, indicando o intervalo de validade. Enuncie os teoremas a que tiver necessidade de recorrer.

R: $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}$ *para* $|x| < 1$

$$arctg\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad para \ |x| < 1$$

$$x\, arctg\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad para \ |x| < 1 .$$

4) Dada a função $F(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$, resolva os seguintes problemas:

a) Estude os máximos e mínimos.

b) A equação $F(x, y) = 0$ poderá definir implìcitamente uma função $y(x)$ na vizinhança de certo ponto? Porquê?

c) O que representa em R^3 a equação $F(x, y) = 0$? Porquê?

R: a) $\begin{cases} F'_x = 4(x-y)^3 = 0 \\ F'_y = -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3 = 0 \end{cases}$

tem a única solução $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. *Como* $F(x, y) \geq 0 = F(1, 1)$, *o ponto* $P(1, 1)$ *é um minimizante.*

b) *O único ponto que satisfaz à equação* $F(x, y) = 0$ *é* $P(1, 1)$ *e como* $F'_y(1, 1) = 0$ *a equação não define nenhuma função implícita.*

c) *Em* R^3, *a equação* $F(x, y) = 0$ *representa a recta* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

5) Dá-se o nome de *forma linear* a um polinómio do 1.º grau $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$. Considerando o sistema de m formas lineares com n variáveis $f_i = a_i^j x_j$ $(i = 1, \cdots m ; j = 1, \cdots n)$, se existem números $k_1, k_2, \cdots k_m$ não todos nulos tais que $k_i f_i = 0$, as formas dizem-se linearmente dependentes; se $k_i f_i = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, as formas dizem-se linearmente independentes.

Mostre que a dependência ou independência das formas lineares é equivalente à dependência ou independência das linhas de $A = |a_i^j|$.

As formas lineares são necessàriamente dependentes se $m > n$? Porquê?

R: *Com algum* k_i *diferente de* 0, $k_i f_i = k_i a_i^j x_j = 0 \Rightarrow k_i a_i^j = 0$ *e esta condição indica que as linhas de* A *são dependentes; recìprocamente, se* $k_i a_i^j = 0$ *então* $k_i f_i = 0$. *Da mesma forma para a independência. A condição necessária e suficiente para que as formas sejam independentes é que a característica de* A *seja* m.

Quando $m > n$ *a característica de* A *é inferior a* m *e portanto as formas lineares são dependentes.*

6) Calcule o determinante de ordem n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

deduzindo para esse efeito uma fórmula de recorrência.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de* Laplace *ao longo da 1.ª coluna vem* $D_n = 2^{n-1} + D_{n-1}$.

Logo,

$$D_n = 2^{n-1} + D_{n-1}$$
$$D_{n-1} = 2^{n-2} + D_{n-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$D_3 = 2^2 + D_2$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 = 2 + 1$$

e, somando membro a membro estas igualdades, obtém-se

$$D_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 1 = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$$

Enunciados e soluções dos N.os 5617 a 5623 de Fernando de Jesus

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — Julho de 1964.

5624 — I. Seja

$$R \xrightarrow{f} R,\ f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2-4x+3 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

1) Use a definição de Cauchy a fim de concluir que a função $R - \{1\} \xrightarrow{g} R,\ g(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ tem limite -2 no ponto 1.

2) Use o teorema de Taylor a fim de explicitar os conjuntos:

$$A = \{x \in R \mid f(x) > -2x + 2\};$$
$$B = \{x \in R \mid f(x) < -2x + 2\}.$$

3) Mostre que f não é uma função polinomial real.

5625 — II. Seja $\lambda \in C$ e sejam $C \xrightarrow{f_\lambda} C, f_\lambda(z) = \lambda z^2 + z^3$ e $C \xrightarrow{g_\lambda} C,\ g_\lambda(z) = \lambda + z^3$.

1) Considere a sucessão real $(a_n)_{n \in N}$ com $a_n = \dfrac{f_1(n)}{g_1(n)}$; explicite o conjunto

$$A = \{n \in N \mid a_n > a_{n+1}\}$$

e mostre que $(a_n)_{n \in N}$ é injectiva.

2) Use o teorema de Euler a fim de determinar λ pela condição de f_λ e g_λ admitirem uma raiz comum e, para cada valor de λ encontrado, explicite todas as funções polinomiais complexas que interessam à formulação do referido teorema.

5626 — III. Sejam r e s rectas não coplanas e não perpendiculares. Mostre que a superfície gerada pela rotação de s em torno de r é um hiperbóide de uma folha (comece por escolher um conveniente referencial ortonormado).

5627 — IV. Seja $(O; \vec{i}, \vec{j})$ o referencial mètricamente fixado como se indica: $\|\vec{i}\| = 2$; $\|\vec{j}\| = 1$; $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) = \dfrac{2}{3}\pi$. Sejam U, V, A e B os pontos assim caracterizados: $U - O = \vec{i}$; $V - O = \vec{j}$; A é a intersecção da paralela à recta OU que passa por V e da perpendicular à recta OU que passa por O; B é a intersecção da paralela à recta OU que passa por V e da paralela à recta OV que passa por U.

1) Coordenadas, no referencial $(O; \vec{i}, \vec{j})$, do ponto A. Justifique.

2) Equação, no referencial $(O; \vec{i}, \vec{j})$, da elipse assim caracterizada: passa pelos pontos B e V; as rectas OB e OV são seus eixos de simetria. (Comece por resolver o problema no referencial $\left(O; \vec{I} = \dfrac{1}{\|B-O\|}(B-O),\ \vec{J} = \vec{j}\right)$, que deve mostrar ser ortonormado).

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — Julho de 1964.

5628 — I. Seja $A = \{f \in \mathfrak{F}(R_0^+, R) \mid f(x) = x$ ou $f(x) = -x$, qualquer que seja $x \in R_0^+\}$.

1) Seja $f \in A$. Use a definição de Cauchy a fim de concluir o seguinte: f tem limite 0 no ponto 0; f não tem limite 1 no ponto 0.

2) Indique os elementos do conjunto $A \cap \mathcal{C}(R_0^+, R)$.

5629 — II. Seja $R \xrightarrow{f} R,\ f(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x$.

1) Indique os pontos nos quais f tem máximo relativo estrito e os pontos nos quais f tem mínimo relativo estrito. Justifique.

2) Indique o conjunto $f(R_0^+)$ recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy. Justifique.

5630 — III. Seja $R_0^+ \xrightarrow{f} R$ contínua e sobrejectiva. Mostre que f não tem limite no ponto $+\infty$.

5631 — IV. Seja $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial.

1) Suponha-o mètricamente fixado como se indica:

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \, ; \ \sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) =$$
$$= \sphericalangle(\vec{k},\vec{i}) = \frac{\pi}{3} .$$

Determine os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ assim caracterizados: $\vec{u}$ pertence ao plano $z=0$, é perpendicular a $\vec{i}$, é unitário e a sua 1.ª componente é negativa; $\vec{v}$ é perpendicular ao plano $z=0$, é unitário e a sua 3.ª componente é positiva.

2) Suponha-o mètricamente fixado como na alínea 1). Represente, através de uma equação cartesiana, o cilindro quádrico gerado pela rotação da recta $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ em torno do eixo das cotas.

3) Condicione-o mètricamente de modo que o ponto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ seja o ortocentro do triângulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

Enunciados dos N.os 5624 a 5631
de Aníbal Coimbra Aires de Matos

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

157 — P. J. Hilton and S. Wylie — Homology Theory. An introduction to algebraic Topology. Cambridge University Press, 1960.

Os Autores, na introdução, definem os fins a atingir com esta obra:

«Este livro foi escrito com a preocupação de constituir uma introdução à Topologia Algébrica na sua forma mais actualizada. Não se exige ao Leitor qualquer conhecimento prévio de Topologia Algébrica; assim nos fundamentos da Part 1 o Leitor sem conhecimentos de Topologia Analítica encontra uma sinopse dos elementos necessários para a compreensão do resto do texto. A fim de que o livro pudesse atingir a sua finalidade, ainda se levou em consideração o facto de ele dever fornecer um conjunto das noções de base da Topologia Algébrica compreensiveis pelo matemático não iniciado nas técnicas e nos problemas descritos. Se bem que o tratamento dos assuntos se desenvolva, consequentemente, de forma elementar, os AA. foram ambiciosos na escolha do material em relação ao que é usual nos livros de texto elementares. É sua opinião que a literatura é rica em livros de texto avançados, e bem fornecida de livros elementares e de introdução; simplesmente os dois tipos de livros não estão suficientemente interligados. Mesmo os livros avançados dividem-se naturalmente em dois grupos que podem classificar-se ràpidamente como o dos clássicos e o dos modernos, verificando-se ainda em cada um deles uma rápida subdivisão que torna difícil por exemplo reconhecer argumentos clássicos quando apresentados sobre um aspecto moderno. Tentaram, assim, criar aqueles elos que seriam difíceis de ser estabelecidos pelos estudiosos da literatura disponível.

Assim, enquanto que no início os assuntos são tratados de forma bastante elementar, omitindo certos tópicos, particularmente os que são canónicos em tratados clássicos, procuraram os AA. estabelecer nos últimos capítulos os pontos que constituem a base imediata da actual investigação».

Parece que os Autores conseguiram alcançar eficientemente o seu objectivo.

Possivelmente prejudicaram um pouco a clareza da exposição com a adopção de uma nova simbologia cuja vantagem não apresenta alguma evidência. O que nos parece porém, inconveniente é largamente compensado por toda uma estruturação, desenvolvimento, pormenor e preocupação didática que fazem desta obra um útil instrumento que permite ràpidamente atingir as fronteiras actuais da Topologia Algébrica e poder penetrar na senda da investigação neste campo da matemática.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1965 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 16 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 75 cada número simples	17$50
N.ºs 78 a 97 » » duplo	35$00
N.ºs 76-77	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º – LISBOA-2 — Telefone 369449