A Constância de Pi

Os matemáticos nem sempre lêem o que os sociólogos e filósofos sobre eles escrevem. Mas por vezes vale a pena estar atento. Quanto mais não seja, para que os disparates não se espalhem.

O número Pi (π) é uma das constantes mais ubíquas e mais interessantes da matemática. Conhece-se hoje com mais de um milhão de milhões de algarismos, mas houve uma altura em que era representado apenas com um dígito. Nessa primeira aproximação para π, que é a implícita na *Bíblia*, no *Livro dos Reis*, escrito cerca do século VI a.C., π é simplesmente o número 3.

Ainda antes disso, os Babilónios tinham uma aproximação melhor, 3,125, e os Egípcios usavam o quadrado de 16/9, que é 3,16049... No século III a.C., Arquimedes descobriu um método para calcular π delimitando uma circunferência com polígonos interiores e exteriores. Os perímetros dos polígonos são fáceis de calcular e o da circunferência fica enquadrado entre estes. É um método engenhoso. E um método que permite obter a aproximação que se queira.

Quando os trabalhos de Arquimedes foram redescobertos pelos Árabes e, depois, pelos Europeus, iniciou-se uma corrida ao cálculo de π. No século IX, Al-Khuarizmi obteve quatro casas decimais. Nos fins do século XVI, conseguiram-se 20 casas decimais; nos fins do XVIII, 140. Em princípios do século XX, estava-se em mais de 500. Pouco depois, apareceram os computadores e conseguiram-se milhares de dígitos, depois milhões, depois milhares de milhões... O recorde de cálculo cabe hoje ao japonês Yasumasa Kanada, que em fins de 2002 conseguiu obter mais de um milhão de milhões de algarismos.

DEFINIÇÕES DE π INDEPENDENTES DA GEOMETRIA

O método de Arquimedes foi pioneiro também por mostrar que o cálculo de π pode ser independente da geometria. De facto, ao escrever as expressões dos perímetros dos polígonos, as fórmulas autonomizam-se. Pi aparece como um simples número. Seguindo esse mesmo caminho, François Viète (1540–1603) obteve a primeira fórmula infinita para π:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \ldots .$$

No século XVII, com o nascimento da análise, vários matemáticos, entre os quais Wallis, Leibniz e Newton, encontraram fórmulas mais eficientes para o cálculo de π e veio a verificar-se que este número surge nas circunstâncias mais inesperadas. Conhece-se a célebre fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$, conhece-se a distribuição normal e conhecem-se muitas outras situações onde o número π surpreendentemente aparece.

Dada essa ubiquidade de π, é natural que apareçam hoje definições dessa constante independentes da geometria. J.-M. Arnaudiès e H. Fraisse escrevem na sua *Analyse* (Dunod, Paris, 1988, p. 217): «Chama-se Pi e denota-se π o dobro da única raiz da equação $\cos x = 0$, compreendida entre 0 e 2». Páginas antes, a função coseno é também definida sem recurso à geometria: $\cos z = (e^{iz}+e^{-iz})/2$ (p. 210), sendo a função exponencial dada pela série

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ (p. 209).}$$

No célebre tratado de Bourbaki (FVR III.4§1) aparece uma definição ainda menos directa: o número π é o real que aparece na fórmula $2\pi e(x)$ da derivada da função $e(x)$, que é o homomorfismo contínuo do grupo aditivo **R** sobre o grupo multiplicativo **U** dos números complexos de módulo unitário...

Este tipo de definições é hoje perfeitamente normal em matemática. A constante Pi, apesar de originada num problema geométrico, surge em contextos muito mais vastos do que os da geometria euclidiana.

CONSTANTE OU VARIÁVEL?

O que os matemáticos compreendem pode não ser compreendido por leigos e disso não vem qualquer mal ao mundo. O que é perigoso é que se pretenda desenvolver uma filosofia crítica da matemática e da ciência com base em conceitos que não se entendem. É o que se passa, conforme foi apontado pelo professor Jorge Nuno Silva num artigo publicado no *Jornal de Letras* («Duas culturas», 21 de Janeiro de 2004), no novo livro de Boaventura Sousa Santos *Conhecimento Prudente para uma Vida Decente* (Porto, Afrontamento, 2003). Nesse livro, que se apresenta como uma defesa das teses pós-modernas desse autor, apresentadas em 1987 em *Um Discurso sobre as Ciências* (Porto, Afrontamento), Joan H. Fujimura escreve «Enquanto parte da revolução na geometria, o valor do perímetro do círculo unitário (ou Pi) mudou». Citemos o texto:

> Até essa altura [década de 1820], a geometria euclidiana dominara o mundo da matemática ao longo de 2000 anos. Até que, na década de 1820, três matemáticos — Carl Friedrich Gauss, na Alemanha, János Bolyai, na Hungria, e Nikolai Ivanovich Lobachewsky, na Rússia — criaram, independentemente uns dos outros, novas formas de actividade matemática que punham em causa o quinto postulado de Euclides, no qual assenta a geometria plana euclidiana. (p. 155).

O que aqui se encontra é uma tentativa de apresentar o desenvolvimento da matemática como uma série de choques contraditórios em que todas as verdades são históricas e relativas. Gauss, Bolyai e Lobatchevski investigaram a coerência de geometrias mais gerais que não incluíssem o postulado das paralelas. Verificou-se que isso era possível, o que constituiu uma revolução em geometria — não no sentido de colocar em causa Euclides e sim para generalizar a geometria de que este foi iniciador. É esse o sentido da axiomática, sentido que em matemática se entende perfeitamente: diferentes conjuntos de axiomas dão origem a diferentes construções geométricas. Não tem qualquer sentido dizer que umas refutam ou contradizem as outras.

A pretensão de apresentar o desenvolvimento da matemática como uma pura construção social sem critérios objectivos de validade, portanto com uma evolução em rupturas sucessivas com o passado, leva a várias interpretações abusivas. Prossigamos a leitura:

> A visão de um valor 'constante e universal' do perímetro de um círculo unitário (π) foi refutada há 170 anos pela geometria não-euclidiana, como está bem documentado na história da matemática. Na matemática e na física do século XX, o valor do π não-euclidiano passa a depender do movimento, do espaço-tempo e da gravidade (p. 154).

Segundo se lê um pouco à frente, isto constitui «um dos mais interessantes temas de estudo da geometria pós-euclidiana» (p. 157). Os matemáticos e físicos ficam assim surpreendidos por saber que a procura de valores variáveis de π é um dos seus interessantes temas de estudo...

Na realidade, o «constante e universal» valor de π surge na geometria euclidiana como a razão constante entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro e não pode ter o mesmo significado geométrico noutras geometrias. Numa superfície esférica, por exemplo, não há uma razão constante entre uma circunferência e o seu diâmetro, entendendo este como a linha sobre a superfície curva. Não é verdade que a constante π mude. A realidade é que esta constante surge num contexto e não noutro.

Continuemos a leitura, que se está a revelar elucidativa.

> A partir da revolução pós-euclidiana, porém, os matemáticos construíram uma infinidade de distâncias, muitas das quais são usadas no dia-a-dia da investigação e das aplicações científicas. Para cada uma dessas distâncias haverá um π diferente. (p. 158)

Fala-se aqui de distâncias não-euclidianas e introduz-se pois um outro tipo de generalização. Trata-se de novo de um quadro no qual o cálculo de π não tem sentido. As «circunferências» não são já circunferências e os «raios» não são já raios.

O HORROR ÀS CERTEZAS

*D*urante séculos, os matemáticos construíram o seu edifício acumulando com esforço pedra sobre pedra. Entre as histórias mais heróicas dessa batalha destaca-se a de π. Primeiro, descobre-se este facto improvável: a existência de um rácio constante entre o perímetro de uma circunferência e o comprimento do seu diâmetro. Depois, inventam-se métodos mais aperfeiçoados para o cálculo de π, métodos tão perfeitos que essa constante é hoje conhecida com mais de um milhão de milhões de dígitos. A análise autonomiza-se da geometria e, nesse movimento, π revela-se como uma constante definida independentemente de considerações geométricas. Ao generalizar-se a geometria de Euclides, π mantém-se como constante de uma geometria particular e como constante ubíqua na análise e em variados outros ramos da matemática. Curiosamente, mesmo em geometria não euclidiana a constante π aparece nas fórmulas de áreas de polígonos e nas áreas e perímetros de círculos padrão. Tudo isto é intolerável para a filosofia pós-moderna, que se compraz na tentativa de desconstruir a razão e o conhecimento. Num dos passos mais tristes do texto que temos vindo a citar, afirma-se que «Os matemáticos e os cientistas mudaram o mundo ao desafiar os cânones universais e as constantes» (p. 164). Nós diremos, pelo contrário, que os matemáticos e os cientistas mudaram o mundo ao descobrir regularidades universais e constantes matemáticas. Bem hajam!