ñanza, pero su análisis de la psicología del inventor y del creador abarca aspectos de interés para el tema de este trabajo. Especialmente interesante es el capítulo VII — «Different kinds of mathematical minds».

[5] — MCLELLAN-DEWEY — *Psichology of number*—(Cit. por [6]).

(6) — YOUNG J. W. A. — *Fines, valor y método de la Enseñanza Matemática.* Ed. Losada-1947 — Selección de la obra *The teaching of Mathematics in the elementary School.*

[7] — NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS — *Multisensory aids in the teaching of Mathematics* — 18 Yearbook-1945. Este anuario de la Asosiación de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos reune numerosos trabajos sobre la enseñanza de la Matemática por el método de Laboratorio, abarcando sus diversos aspectos incluso el histórico y el material.

[8] — TORANZOS F.—*Introducción a la epistemología y fundamentación de la Matemática* — Espasa-Calpe —1948. Este libro da una clara idea de lo que es la Matemática en el estado actual de los conocimientos humanos. Su conocimiento es importante para que el Profesor de enseñanza técnica aplique métodos prácticos sin perder de vista la esencia matemática.

[9] — REY PASTOR — *Elementos de Análisis Algebraico* — Madrid 1930. Hemos consultado la introducción de esta obra por sus elevadas ideas sobre la enseñanza de la Matemática.

[10] — SAXELBY F. — *A course in Practical Mathematics* — Longmans, Green & C.º. Londres-1944.

San Juan, 1949.

Sull'approssimata rappresentazione di alcune serie con polinomi semplici costruibili elementarmente

Nota di **Vincenzo G. Cavallaro**

SUNTO. Alcune serie notevoli, non costruibili elementarmente, vengono rappresentate, in un cerchio di raggio unitario, da polinomi semplici molto approssimati alla somma delle serie e costruibili elementarmente.

1. — PRELIMINARI. Nelle formule che seguono, L_x indica il lato del poligono regolare di x lati inscritto in un circolo di raggio unitario e $\equiv$ un signo d'uguaglianza approssimata.

Per la dimostrazione delle stesse formule ocorrono i valori dei seni degli *angoli multipli di* 3 *gradi* e tali valori son dati, con 10 cifre decimali, in certe tavole numeriche come, ad esempio, nel diffusissimo Formulario del prof. G. Lazzeri (Casa editrice Giusti, Livorno). Si sa che detti seni, come i lati dei poligoni regolari euclidei, si possono costruire con molta rapidità e precisione, specialmente se nel processo costruttivo intervengono i noti metodi del Mascheroni col solo compasso (Vedi appunto una mia Nota nel *Bollet. della Unione Matematica Italiana* XI, N. 3, 1932, Bologna).

Conviene qui riportare i seguenti valori corrispondenti al *logaritmo neperiano* di 2, al quadrato e al biquadrato di π rapporto d'una circonferenza al suo diametro:

$$\log 2 = 0{,}69314\ 71805\ 59945 \cdots \text{(1)}$$

$$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358 \cdots \text{(2)}$$

$$\pi^4 = 97{,}40909\ 10340\ 02437\ 23264 \cdots \text{(2)}$$

2. — PROPOSIZIONE. *La serie*

$$P_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

ha per somma il logaritmo neperiano di 2 *e vien rappresentada approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal trinomio*

$$P_1 \equiv 5 \operatorname{sen} 87° + \frac{7}{10} - .5 \equiv 0{,}69314\ 76740$$

con errore ε *minore di* $\dfrac{1}{2\,024200}$ *del raggio stesso.*

3. — PROPOSIZIONE. *La serie*

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

ha per somma (3) $\dfrac{\pi^2}{12} = 0{,}82246\ 70334\ 2411 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio*

(1) G. Bertrand—*Traité d'Algèbre*, Parte II, p. 142, Paris, 1878.

(2) G. Peano—*Tavole numeriche* Soc. Tipogr. Editrice Torinese

(3) E. Cesaro—*Analisi Algebrica*, p. 176, Torino, 1894.

unitario dai seguenti polinomi:

$$P_2 \equiv \frac{1}{2}(L_3 + L_{20}) - \frac{1}{5} \equiv 0{,}82245\,98688\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{139\,000}$$

$$P_2 \equiv (L_5 + L_{10} + L_{12}) + \frac{1}{4}(L_3 + L_{20}) - 2 \equiv$$

$$\equiv 0{,}82247\,2517\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{180\,000}$$

$$P_2 \equiv \frac{1}{3}(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \text{sen}\,75^\circ + \text{sen}\,36^\circ) \equiv$$

$$\equiv 0{,}82247\,05273\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{285\,710}$$

$$P_2 \equiv \text{sen}\,69^\circ - \frac{1}{9} \equiv 0{,}82246\,93154\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{436\,600}$$

$$P_2 \equiv \frac{2}{3}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\right) \equiv$$

$$\equiv 0{,}82246\,70023\,30\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{32\,154\,340}.$$

4. — Proposizione. *La serie.*

$$P_4 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \cdots$$

ha per somma (4) $\frac{7\pi^4}{720} = 0{,}94703\,28294\,97245$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dai seguenti polinomi*:

$$P_4 \equiv \frac{1}{2}\left(5\,L_{12} + \frac{3}{5}\right) \equiv 0{,}94704\,76127\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{67\,500}$$

$$P_4 \equiv \text{sen}\,21^\circ + \text{sen}\,57.^\circ - \frac{1}{4} \equiv 0{,}94703\,85175\,,$$

$$\varepsilon < \frac{1}{175\,700}$$

$$P_4 \equiv 4\,\text{sen}\,75^\circ - \frac{11}{3} + \frac{3}{4} \equiv 0{,}94703\,66385\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{262\,400}$$

5. — Proposizione. *La serie*

$$K_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} + \frac{5}{6^2} - \cdots$$

ha per somma (5) $\frac{\pi^2}{12} - \log 2 = 0{,}12931\,98528\,6416\cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal binomio*

$$K_2 \equiv \text{sen}\,39^\circ - \frac{1}{2} \equiv 0{,}12932\,03911\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{1\,855\,200}.$$

(4) E. Cesaro — loc. citato, p. 176.

(5) E. Cesaro — loc. citoto, p. 179.

6. — Proposizione. *La serie*

$$V = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} -$$
$$- \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots$$

ha per somma (6) $\frac{3}{2}\log 2 = 1{,}03972\,07708\,39\cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dai seguenti trinomi*:

$$V \equiv \frac{1}{3}\left(L_3 - L_{20} + \frac{17}{10}\right) \equiv 1{,}03972\,72925\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{153\,600}$$

$$V \equiv \frac{3}{2}\left(5\,\text{sen}\,87^\circ + \frac{7}{10} - 5\right) \equiv$$

$$\equiv 1{,}03972\,15110\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{1\,349\,500}.$$

7. — Proposizione. *La serie*

$$H_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

ha per somma (7) $\frac{\pi^2}{8} = 1{,}23370\,05501\,3616\cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dai seguenti polinomi*:

$$H_2 \equiv \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \text{sen}\,36^\circ + \text{sen}\,75^\circ) \equiv$$

$$\equiv 1{,}23370\,57910\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{190\,470}$$

$$H_2 \equiv \frac{3}{4}\left(L_3 + L_{20} - \frac{2}{5}\right) \equiv 1{,}23368\,9803\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{92\,500}$$

$$H_2 \equiv \sqrt{7} - \sqrt{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} \equiv$$

$$\equiv 1{,}23370\,05034\,957\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{21\,400\,000}.$$

8. — Proposizione. *La serie*

$$\Delta = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots$$

ha per somma (8) $\Delta = 1{,}39320\,3929\cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal polinomio*

$$\Delta \equiv 2\left(5\,\text{sen}\,39^\circ - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - 4 \equiv$$

$$\equiv 1{,}39320\,39110\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{52\,631\,000}.$$

(6) E. Cesaro — loc. citato, p. 149.

(7) U. Dini — *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche*. Vol. 1, p. 155, Pisa, 1880.

(8) G. Novi — *Algebra Superiore*, Vol. I, p. 307, Firenze, 1863.

9. — Proposizione. *La serie*

$$\Psi_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

ha per somma $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\,81633\,9744 \cdots$ *e vien rappresentata aprossimativamente nel cerchio di raggio unitario del trinomio*

$$\Psi_1 \equiv \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 18^\circ + \sqrt{21} - \frac{7}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv 0{,}78539\,81723\,32\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{111\,111\,000}\,.$$

10. — Osservazione. Tutti i denominatori delle frazioni esprimenti il grado di approssimazione conseguito sono stati *arrontati*, ma in realtà sono lievemente maggiori di quelli signati per cui *è ancora minore l'errore commesso.*

Nota Bibliografica. Per altri lavori sulle serie, congeneri all'attuale, vedi Note di V. G. Cavallaro in *Tohoku Mathem. Journal* Vol. 42, 1936, Sendai; *Anais da Faculdade de Ciencias da Univ. do Porto*, 1937; *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timisoara*, XI, 1943, N. 1 – 2; *Bolletino di Matematica*, 1941, N. 4, Genova.

Cefalu (Sicilia).

A função de Dirac — Sua interpretação matemática — II

por **Ruy Luís Gomes**

Ficou demonstrado no artigo anterior [1] que, dado um ponto fixo $x \in R^n$, não existe nenhuma função, $f(y)$, somável em todo conjunto compacto [2] de R^n, tal que

$$\psi(x) = \int_{R_n} f(y)\,\psi(y)\,dy, \tag{6}$$

para toda função $\psi \in \Psi$, designando por Ψ a família das funções contínuas sobre R^n, cada uma delas igual a zero no exterior de um conjunto compacto [3].

No entanto, se partimos de uma função localmente, somável,[2] $f(y)$, o integral que figura em (6) define uma funcional linear $A(\Psi)$.

Na verdade, Ψ é um espaço vectorial linear [4] e

$$A(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1 A(\Psi_1) + c_2 A\,\psi_2\,. \tag{7}$$

Por outras palavras: cada função localmente somável, $f(y)$, gera a funcional linear

$$A(\psi) = \int_{R^n} f(y)\,\psi(y)\,dy\,, \quad \psi \in \Psi\,. \tag{8}$$

(1) N.º 46 desta revista.

(2) Podemos chamar a $f(y)$, função *localmente somável*. Na verdade, se $f(y)$ é somável em todo conjunto compacto de R^n, cada ponto de R^n admite uma vizinhança — esfera ou intervalo — onde $f(y)$ é somável. Inversamente, verificada esta última hipótese, basta recorrer ao teorema de cobertura de Borel – Lebesgue para concluir que $f(y)$ é somável em todo conjunto compacto de R^n.

(3) Chamando *suporte* do ψ ao fecho do conjunto dos pontos $y \in R^n$ tais que $\psi(y) \neq 0$, Ψ é a família das funções contínuas de *suporte compacto*. Exemplo: qualquer curva em forma de sino: o *suporte* é a base de apoio sobre o espaço R^n.

(4) Se ψ_1, ψ_2 pertencem a Ψ, o mesmo acontece a $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, quaisquer que sejam os números reais c_1, c_2.

Ora é possível demonstrar o seguinte *Teorema. Se* $f_1(y)$ *e* $f_2(y)$, *ambas localmente somáveis, geram a mesma funcional, só podem diferir num conjunto de medida nula.*

Suponhamos, com efeito, que

$$\int_{R^n} f_1(y)\,\psi(y)\,dy = \int_{R^n} f_2(y)\,\psi(y)\,dy\,, \quad \psi \in \Psi \tag{9}$$

Considerando um conjunto aberto limitado G, designemos por g a sua função característica.

Utilizando a decomposição $G = \Sigma I_n$ e aplicando o teorema de Urysohn [5], vem

$$g(y) = \lim_n \psi_n(y)\,, y \in R^n$$

e, portanto,

$$f_1(y)\,g(y) = \lim_n f_1(y)\,\psi_n(y)$$

$$f_2(y)\,g(y) = \lim_n f_1(y)\,\psi_n(y).$$

Ora, como $f_1(y)\,\psi_n(y)$ é uma função somável em R^n e

$$|f_1(y)\,\psi_n(y)| \leqslant |f_1(y)|\,g(y)\,, |f_2(y)\,\psi_n(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_2(y)|\,g(y)\,,$$

sendo $|f_1(y)|\,g(y)\,, |f_2(y)|\,g(y)$ funções somáveis, resulta que [6]

$$\int_{R^n} f_1(y)\,g(y)\,dy = \lim_n \int_{R^n} f_1(y)\,\psi_n(y)\,dy \tag{10}$$

(5) Ver artigo anterior, pág. 3.

(6) O teorema de Lebesgue-Fatou diz-nos que: se $\{f_n\}$ é uma sucessão convergente de funções somáveis num conjunto mensurável E e se $|f_n| \leq h$, sendo h somável em E, então,