9. — Proposizione. *La serie*

$$\Psi_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

ha per somma $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\,81633\,9744 \cdots$ *e vien rappresentata aprossimativamente nel cerchio di raggio unitario del trinomio*

$$\Psi_1 \equiv \frac{1}{4}\left(\text{sen}\,18^\circ + \sqrt{21} - \frac{7}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv 0{,}78539\,81723\,32\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{111\,111\,000}\,.$$

10. — Osservazione. Tutti i denominatori delle frazioni esprimenti il grado di approssimazione conseguito sono stati *arrontati*, ma in realtà sono lievemente maggiori di quelli signati per cui *è ancora minore l'errore commesso.*

Nota Bibliografica. Per altri lavori sulle serie, congeneri all'attuale, vedi Note di V. G. Cavallaro in *Tohoku Mathem. Journal* Vol. 42, 1936, Sendai; *Anais da Faculdade de Ciencias da Univ. do Porto*, 1937; *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timisoara*, XI, 1943, N. 1–2; *Bolletino di Matematica*, 1941, N. 4, Genova.

Cefalu (Sicilia).

A função de Dirac — Sua interpretação matemática — II

por **Ruy Luís Gomes**

Ficou demonstrado no artigo anterior [1] que, dado um ponto fixo $x \in R^n$, não existe nenhuma função, $f(y)$, somável em todo conjunto compacto [2] de R^n, tal que

$$(6) \qquad \psi(x) = \int_{R_n} f(y)\, \psi(y)\, dy,$$

para toda função $\psi \in \Psi$, designando por Ψ a família das funções contínuas sobre R^n, cada uma delas igual a zero no exterior de um conjunto compacto [3].

No entanto, se partimos de uma função localmente, somável,[2] $f(y)$, o integral que figura em (6) define uma funcional linear $A(\Psi)$.

Na verdade, Ψ é um espaço vectorial linear [4] e

$$(7) \qquad A(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1 A(\Psi_1) + c_2 A\,\psi_2\,.$$

Por outras palavras: cada função localmente somável, $f(y)$, gera a funcional linear

$$(8) \qquad A(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy\,, \quad \psi \in \Psi\,.$$

Ora é possível demonstrar o seguinte *Teorema. Se $f_1(y)$ e $f_2(y)$, ambas localmente somáveis, geram a mesma funcional, só podem diferir num conjunto de medida nula.*

Suponhamos, com efeito, que

$$(9) \qquad \int_{R^n} f_1(y)\, \psi(y)\, dy = \int_{R^n} f_2(y)\, \psi(y)\, dy\,, \quad \psi \in \Psi$$

Considerando um conjunto aberto limitado G, designemos por g a sua função característica.

Utilizando a decomposição $G = \Sigma I_n$ e aplicando o teorema de Urysohn [5], vem

$$g(y) = \lim_n \psi_n(y)\,, \; y \in R^n$$

e, portanto,

$$f_1(y)\, g(y) = \lim_n f_1(y)\, \psi_n(y)$$

$$f_2(y)\, g(y) = \lim_n f_1(y)\, \psi_n(y).$$

Ora, como $f_1(y)\,\psi_n(y)$ é uma função somável em R^n e

$$|f_1(y)\,\psi_n(y)| \leqslant |f_1(y)|\, g(y)\,,\; |f_2(y)\,\psi_n(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_2(y)|\, g(y)\,,$$

sendo $|f_1(y)|\, g(y)$, $|f_2(y)|\, g(y)$ funções somáveis, resulta que [6]

$$(10) \qquad \int_{R^n} f_1(y)\, g(y)\, dy = \lim_n \int_{R^n} f_1(y)\, \psi_n(y)\, dy$$

---

(1) N.º 46 desta revista.

(2) Podemos chamar a $f(y)$, função *localmente somável*. Na verdade, se $f(y)$ é somável em todo conjunto compacto de R^n, cada ponto de R^n admite uma vizinhança — esfera ou intervalo — onde $f(y)$ é somável. Inversamente, verificada esta última hipótese, basta recorrer ao teorema de cobertura de Borel – Lebesgue para concluir que $f(y)$ é somável em todo conjunto compacto de R^n.

(3) Chamando *suporte* do ψ ao fecho do conjunto dos pontos $y \in R^n$ tais que $\psi(y) \neq 0$, Ψ é a família das funções contínuas de *suporte compacto*. Exemplo: qualquer curva em forma de sino: o *suporte* é a base de apoio sobre o espaço R^n.

(4) Se ψ_1, ψ_2 pertencem a Ψ, o mesmo acontece a $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, quaisquer que sejam os números reais c_1, c_2.

(5) Ver artigo anterior, pág. 3.

(6) O teorema de Lebesgue-Fatou diz-nos que: se $\{f_n\}$ é uma sucessão convergente de funções somáveis num conjunto mensurável E e se $|f_n| \leq h$, sendo h somável em E, então,

$$\int_{R^n} f_2(y)\, g(y)\, dy = \lim_n \int_{R^n} f_2(y)\, \psi_n(y)\, dy\,.$$

Atendendo a (9), (10) e a que $g(y) = 0$ para $y \in R^n - G$ e $g(y) = 1$ para $y \in G$, vem

$$\int_G f_1(y)\, dy = \int_G f_2(y)\, dy\,,$$

donde

$$(11) \qquad \int_G (f_1 - f_2)\, dy = 0\,.$$

Como G é qualquer conjunto aberto limitado de R^n, resulta ainda

$$(11') \qquad \int_E (f_1 - f_2)\, dy = 0\,,$$

para todo conjunto E mensurável e limitado de R^n.

Representemos, então, por E_n o conjunto dos pontos de R^n onde $f_1 - f_2 \geqslant \frac{1}{n}$ e decomponhamo-lo numa infinidade numerável de conjuntos limitados e mensuráveis E_n^m. Como, em virtude de (11'),

$$\int_{E_n^m} (f_1 - f_2)\, dy = 0$$

e, por outro lado,

$$\frac{1}{n} \,|\, E_n^m \,| \leqslant \int_{E_n^m} (f_1 - f_2)\, dy\,,$$

vem $|E_n^m| = 0$ e, portanto, $|E_n| = 0$. O conjunto dos pontos onde $f_1 - f_2 > 0$ tem medida nula e o mesmo se diz do conjunto dos pontos onde $f_1 - f_2 < 0$. Em resumo, $f_1 = f_2$, a menos de um conjunto de medida nula.

Identificando, então, as funções localmente somáveis que só diferem num conjunto da medida nula, chegamos ao seguinte resultado, *é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre as funções localmente somáveis $f(y)$ e um certo sub-conjunto das funcionais lineares definidas no espaço vectorial Ψ.*

Trata-se das funcionais lineares

$$A(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy\,,$$

e essa correspondência é um verdadeiro isomorfismo, pois, de

$$A_1(\psi) = \int_{R^n} f_1(y)\, \psi(y)\, dy$$

$$A_2(\psi) = \int_{R^n} f_2(y)\, \psi(y)\, dy\,,$$

tira-se

$$A_1(\psi) + A_2(\psi) = \int_{R^n} (f_1(y) + f_2(y))\, \psi(y)\, dy\,.$$

Ora, este isomorfismo abre o caminho para um novo conceito de função [7]: *identificamos uma função localmente somável*, f (y), *(e todas que lhe são equivalentes) à funcional linear*

$$(12) \qquad f(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy\,, \quad \psi \in \Psi$$

Vejamos agora como interpretar a *pseudo-função* de Dirac $\delta_x(y)$, $y \in R^n$. Por um lado, esta «função» aparece na Teoria de Dirac como um símbolo, prático [8], da funcional linear

$$(13) \qquad A(\psi) = \psi(x)\,, \quad \psi \in \Psi\,,$$

x fixo.

Por outro lado, $\delta_x(y)$ não é uma função no sentido há pouco definido, em virtude do que ficou demonstrado no nosso primeiro artigo.

Quer dizer, $\delta_x(y)$ é uma funcional linear $A(\psi), \psi \in \Psi$, mas não daquele tipo, (12), característico das funções.

Mas é possível marcar de uma maneira mais sugestiva a diferença entre uma *função* $f(y)$ e a *pseudo-função* $\delta_x(y)$ de Dirac. Efectivamente, como ψ é de suporte compacto, $\int_E \psi(y)\, dy$, define para cada conjunto mensurável e limitado, E, uma função finita de conjunto, $\mu(E)$, com a seguinte propriedade: se: $E = \Sigma_n E_n$, $E_n E_m = 0$, E_n mensurável,

$$\mu(E) = \Sigma\, \mu(E_n)$$

e esta série é absolutamente convergente [9], quere dizer, $\mu(E)$ é uma *medida*.

Em consequência, [10]

$$(13') \qquad f(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy = \int_{R^n} \psi(y)\, d\mu\,,$$

ficando assim a funcional $f(\psi)$ expressa pelo integral

$f = \lim_n f_n$ é somável em E e, além disso, $\int_E f\, dy = \lim_n \int_E f_n(y)\, dy$. O caso do texto corresponde a $E = R^n$, $f_n(y) = f_1(y)\, \psi_n(y)$ ou $f_n = f_2(y)\, \psi_n(y)$, $h = |f_1(y)|\, g(y)$ ou $h = |f_2(y)|\, g(y)$. Note-se ainda que $|f_1|$, $|f_2|$ são localmente somáveis ao mesmo tempo que f_1, f_2 e g é somável em R_n e nula no exterior de G. Como G é limitado, pode encerrar-se num compacto e daí resulta que $|f_1|\, g$ e $|f_2|\, g$ são somáveis em R^n. (Ver S. Saks adeante citado).

(7) Ver L. SCHWARTZ — *Théorie des Distributions*, Tome I — Paris, 1950 — Págs. 17, 18, 19.

(8) Ver artigo anterior.

(9) Basta recordar que $|\mu(E_n)| \leq \int_{E_n} |\psi|\, dy$, juntamente com a circunstância de $|\psi|$ ser somável em E, donde

$$\Sigma\, |\mu(E_n)| \leq \Sigma \int_{E_n} |\psi|\, dy = \int_E |\psi|\, dy < \infty\,.$$

(10) Para deduzir esta fórmula é conveniente começar por uma função tendo apenas um número de valores distintos $\neq 0$, cada um deles num conjunto mensurável limitado, e depois efectuar uma passagem ao limite de maneira a obter no final uma função localmente somável arbitrária (Ver S. Saks, adeante citado).

de $\psi(y)$ em ordem à medida $\mu(E) = \int_E f(y)\, dy$, e não em termos de um integral de Lebesgue.

Trata-se de uma medida *absolutamente*[11] *contínua* e demonstra-se[12] que, inversamente, se μ é absolutamente contínua, então,

$$\int_{R^n} \psi(y)\, d\mu = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy, \tag{14}$$

sendo $f(y)$ a *densidade* de μ isto é, a função *localmente somável* tal que

$$\mu(E) = \int_E f(y)\, dy. \tag{15}$$

As medidas absolutamente contínuas, estão, pois, em correspondência biunívoca com as funções — *podem identificar-se com elas*[13].

Voltando agora à pseudo-função de Dirac, símbolo de funcional

$$A(\psi) = \psi(x), \quad x \text{ fixo}, \quad \psi \in \Psi,$$

basta introduzir a *medida, não absolutamente contínua*, assim definida

$$\mu(x) = 1 \quad (\text{massa } +1 \text{ no ponto } x)$$
$$\mu(E) = 0, \quad \text{quando } x \notin E,$$

para se poder escrever

$$A(\psi) = \delta_x(\psi) = \int_{R^n} \psi(y)\, d\mu.$$

Quere dizer: *a pseudo-função de Dirac é uma medida mas não uma função*[14].

Deixamos para um terceiro artigo a definição da *derivada* de uma função e, de um modo geral, de uma *distribuição*. Só então se atingirá o verdadeiro alcance daTeoria das Distribuições, concebida pelo matemático francês L. Schwartz, um dos mais activos colaboradores do grupo Bourbaki, que tão profunda influência tem tido no desenvolvimento e consolidação da matemática moderna.

(Continua)

(11) Isto significa que $\mu(E)$ tende para zero com a medida-L de E.

(12) Consultar S. Saks — *Theory of the integral*, Varsóvia, 1937.

(13) Ver L. Schwartz, loc. cit., pág. 18.

(14) L. Schwartz, loc. cit., pág. 19.

Problèmes de dépouillements — III

Problèmes intéressant un nombre non limité de candidats

par Pierre Dufresne

Deuxième problème.

Comme dans le problème précédent on suppose que des candidats $A, B, C, D \cdots M, N$ aient obtenu des nombres respetifs de suffrages $a, b, c, d \cdots m, n$.

Nous désignerons comme précédemment par θ le nombre total des bulletins déposés an nom de l'un quelconque de ces candidats et par $N_{(a,b,c,d,\cdots m,n)}$ le nombre de tous les dépouillements possibles de ces θ bulletins.

Il s'agit de calculer *la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins comptés portant le nom de* A *ne soit jamais inférieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* B, *ce dernier nombre jamais inférieur à celui des bulletins portant le nom de* C $\cdots$ *le nombre des bulletins comptés portant le nom de* M *jamais inférieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* N.

Je designerai par:

$$P_{(a,b,c\cdots m,n)}[A \geq B \geq C \geq \cdots \geq M \geq N]$$

la probabilité cherchée et par:

$$N_{(a,b,c\cdots m,n)}[A \geq B \geq C \geq \ldots \geq M \geq N]$$

le nombre des dépouillements différents possibles des θ bulletins qui vérifient la condition posée.

Donc:

$$P_{(a,b,c\cdots m,n)}[A \geq B \geq C \geq \cdots \geq M \geq N] = \frac{N_{(a,b,c\ldots m,n)}[A \geq B \geq C \geq \cdots \geq M \geq N]}{N_{(a,b,c\cdots m,n)}}$$

Les conditions imposent un ordre déterminé dans le classement respectif constant des candidats (A toujours au moins autant de suffrages dépouillés que B, B toujours au moins autant de suffrages dépouillés que $C, \cdots$). Nous désignerons par $a_1, b_1, c_1, \cdots m_1, n_1$, les rangs respectifs imposés aux candidats $A, B, C, \cdots M, N$ c'est à dire que $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3 \cdots$ etc.

Enfins nous poserons:

$$\alpha = a + (n_1 - 1),\ \beta = b + (n_1 - 2),\ \gamma = c + (n_1 - 3) \cdots$$
$$K = k + (n_1 - k_1) \cdots\ \mu = m + (n_1 - m_1) = m + 1,$$
$$\nu = n + (n_1 - n_1) = n.$$

Lemme. *Si* $a \geqslant b \geqslant c \geqslant \cdots \geqslant n$

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A \geq B \geq C \geq \cdots \geq M \geq N] =$$