de $\psi(y)$ em ordem à medida $\mu(E)=\int_E f(y)\,dy$, e não em termos de um integral de Lebesgue.

Trata-se de uma medida *absolutamente*[11] *contínua* e demonstra-se[12] que, inversamente, se μ é absolutamente contínua, então,

$$(14)\qquad \int_{R^n}\psi(y)\,d\mu=\int_{R^n}f(y)\,\psi(y)\,dy,$$

sendo $f(y)$ a *densidade* de μ isto é, a função *localmente somável* tal que

$$(15)\qquad \mu(E)=\int_E f(y)\,dy.$$

As medidas absolutamente contínuas, estão, pois, em correspondência biunívoca com as funções — *podem identificar-se com elas*[13].

Voltando agora à pseudo-função de Dirac, símbolo de funcional

$$A(\psi)=\psi(x)\,,\quad x \text{ fixo},\quad \psi\in\Psi,$$

basta introduzir a *medida, não absolutamente contínua*, assim definida

$$\mu(x)=1\quad(\text{massa } +1 \text{ no ponto } x)$$
$$\mu(E)=0,\quad \text{quando } x\notin E,$$

para se poder escrever

$$A(\psi)=\delta_x(\psi)=\int_{R^n}\psi(y)\,d\mu.$$

Quere dizer: *a pseudo-função de Dirac é uma medida mas não uma função*[14].

Deixamos para um terceiro artigo a definição da *derivada* de uma função e, de um modo geral, de uma *distribuição*. Só então se atingirá o verdadeiro alcance da Teoria das Distribuições, concebida pelo matemático francês L. Schwartz, um dos mais activos colaboradores do grupo Bourbaki, que tão profunda influência tem tido no desenvolvimento e consolidação da matemática moderna.

(Continua)

[11] Isto significa que $\mu(E)$ tende para zero com a medida-L de E.

[12] Consultar S. Saks — *Theory of the integral*, Varsóvia, 1937.

[13] Ver L. Schwartz, loc. cit., pág. 18.

[14] L. Schwartz, loc. cit., pág. 19.

Problèmes de dépouillements — III

Problèmes intéressant un nombre non limité de candidats

par Pierre Dufresne

Deuxième problème.

Comme dans le problème précédent on suppose que des candidats $A, B, C, D \cdots M, N$ aient obtenu des nombres respetifs de suffrages $a, b, c, d \cdots m, n$.

Nous désignerons comme précédemment par θ le nombre total des bulletins déposés au nom de l'un quelconque de ces candidats et par $N_{(a,b,c,d,\cdots m,n)}$ le nombre de tous les dépouillements possibles de ces θ bulletins.

Il s'agit de calculer *la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins comptés portant le nom de* A *ne soit jamais inférieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* B, *ce dernier nombre jamais inférieur à celui des bulletins portant le nom de* C ⋯ *le nombre des bulletins comptés portant le nom de* M *jamais inférieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* N.

Je designerai par:

$$P_{(a,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]$$

la probabilité cherchée et par:

$$N_{(a,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\ldots\geq M\geq N]$$

le nombre des dépouillements différents possibles des θ bulletins qui vérifient la condition posée.

Donc:

$$P_{(a,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=\frac{N_{(a,b,c\ldots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]}{N_{(a,b,c\cdots m,n)}}$$

Les conditions imposent un ordre déterminé dans le classement respectif constant des candidats (A toujours au moins autant de suffrages dépouillés que B, B toujours au moins autant de suffrages dépouillés que $C, \cdots$). Nous désignerons par $a_1, b_1, c_1, \cdots m_1, n_1$, les rangs respectifs imposés aux candidats $A, B, C, \cdots M, N$ c'est à dire que $a_1=1$, $b_1=2$, $c_1=3\cdots$ etc.

Enfins nous poserons:

$$\alpha=a+(n_1-1),\ \beta=b+(n_1-2),\ \gamma=c+(n_1-3)\cdots$$
$$K=k+(n_1-k_1)\cdots\ \mu=m+(n_1-m_1)=m+1,$$
$$\nu=n+(n_1-n_1)=n.$$

Lemme. *Si* $a\geqslant b\geqslant c\geqslant\cdots\geqslant n$

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=$$

$$=N_{(a-1,\,b,\,c\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]+$$
$$+N_{(a,\,b-1,\,c,\,\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]+$$
$$+N_{(a,\,b,\,c-1,\,\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]+$$
$$+\cdots$$
$$+N_{(a,\,b,\,c,\,\dots(m-1)\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]+$$
$$+N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots m,\,n-1)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]\,.$$

La démonstration est analogue à celle du lemme page 9. *Gaz. Mat.*, n.os 44-45.

Théorème. *Si* $a\geqslant b-1\geqslant c-2\geqslant\cdots\geqslant m+1-m_1\geqslant n+1-n_1$

$$N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]=$$
$$=\left(\frac{a+1-b}{a+1}\right)\left(\frac{a+2-c}{a+2}\right)\cdots\left(\frac{a+(n_1-1)-n}{a+(n_1-1)}\right)$$
$$\left(\frac{b+1-c}{b+1}\right)\left(\frac{b+2-d}{b+2}\right)\cdots\left(\frac{b+(n_1-2)-n}{b+(n_1-2)}\right)$$
$$\left(\frac{c+1-d}{c+1}\right)\left(\frac{c+2-e}{c+2}\right)\cdots\left(\frac{c+(n_1-c_1)-n}{c+(n_1-c_1)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{m+1-n}{m+1}\right)\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}\,.$$

Si $a<b-1$ ou $b<c-1$ ou $c<d-1\cdots$ etc. il est clair qu'il n'y a pas de dépouillement favorable, la formule conduirait à des résultats pouvant être négatifs donc absurdes.

Si $a=b-1$ ou $b=c-1$ ou $c=d-1\cdots$ il est encore immédiat qu'il ne peut y avoir de dépouillement favorable mais la formule qui conduit effectivement à un résultat nul s'appiique bien.

Je passe à la démonstration générale: je constate facilement que la formule est exacte pour les plus faibles valeurs de θ et pour les valeurs de $a,b,c\cdots$ répondant aux conditions $a\geqslant b\geqslant c\cdots$ etc. Ainsi pour pour $\theta=1$ il y a deux ensembles de valeurs de a et de b répondant aux conditions posées: $a=1$ et $b=0$ d'une part et $a=0$ et $b=1$ d'autre part. Dans la première hypothèse la formule donne un dépouillement favorable ce qui est exact, dans la seconde (voir cas particulier examiné plus haut $a=b-1$) la formule donne zéro dépouillement favorable ce qui est encore exact.

Nous nous proposons de démontrer que la formule est exacte pour une valeur θ_1 de θ et pour tous les ensembles de valeurs de $a,b,c\cdots m,n$ répondant aux conditions $a\geqslant b\geqslant c\cdots\geqslant m\geqslant n$ si elle est exacte pour $\theta=\theta$, et pour tous les ensembles de valeurs de $a,b,c,\cdots m,n$ répondant aux conditions

$$a\geqslant b-1\geqslant c-2\geqslant\cdots\geqslant m-(m_1-1)\geqslant n-(n_1-1)\,.$$

En utilisant les notations précédemment définies $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ etc. la formule à demontrer peut s'écrire:

$$N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots m,\,n)}=[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots$$
$$\cdots(\alpha-\nu)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots(\beta-\nu)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\cdots$$
$$\cdots(\gamma-\nu)\cdots(\mu-\nu)]\,\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\mu!\,\nu!}\,.$$

ou encore

$$N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]=$$
$$=(a+b+c+\cdots+m+n)\,\Phi$$

si l'on pose

$$\Phi=[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots(\alpha-\nu)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots$$
$$\cdots(\beta-\nu)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\cdots(\gamma-\nu)\cdots$$
$$\cdots(\mu-\nu)]\,\frac{(a+b+c+\cdots+m+n-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\mu!\,\nu!}\,.$$

En vertu du lemme et en supposant la formule à démontrer exacte pour $\theta=\theta_1-1$ on obtient

$$N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]=$$
$$=\Bigg[\left(\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha-\gamma-1}{\alpha-\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-\delta-1}{\alpha-\delta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{\alpha-\nu-1}{\alpha-\nu}\right)\alpha+\left(\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}\right)\left(\frac{\beta-\delta-1}{\beta-\delta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{\beta-\nu-1}{\beta-\nu}\right)\beta+\left(\frac{\alpha-\gamma+1}{\alpha-\gamma}\right)\left(\frac{\beta-\gamma+1}{\beta-\gamma}\right)\left(\frac{\gamma-\delta-1}{\gamma-\delta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{\gamma-\nu-1}{\gamma-\nu}\right)\gamma+\cdots+\left(\frac{\alpha-\mu+1}{\alpha+\mu}\right)\left(\frac{\beta-\mu+1}{\beta-\mu}\right)$$
$$\left(\frac{\gamma-\mu+1}{\gamma-\mu}\right)\cdots\left(\frac{\mu-\nu-1}{\mu-\nu}\right)\mu+\left(\frac{\alpha-\nu+1}{\alpha-\nu}\right)\left(\frac{\beta-\nu+1}{\beta-\nu}\right)$$
$$\left(\frac{\gamma-\mu+1}{\gamma-\nu}\right)\cdots\left(\frac{\mu-\nu+1}{\mu-\nu}\right)\nu\Bigg]\,\Phi$$

ou encore

$$N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots m,\,n)}[A\ge B\ge C\ge\cdots\ge M\ge N]=$$
$$=\Bigg[\left(1-\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha-\gamma}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha-\delta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{1}{\alpha-\nu}\right)\alpha+\left(1+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\beta-\gamma}\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{\beta-\delta}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\beta-\nu}\right)\beta+\left(1+\frac{1}{\alpha-\gamma}\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{\beta-\gamma}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma-\delta}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\gamma-\nu}\right)\gamma$$
$$+\cdots$$
$$+\left(1+\frac{1}{\alpha-\mu}\right)\left(1+\frac{1}{\beta-\mu}\right)\left(1+\frac{1}{\gamma-\mu}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{1}{\mu-\nu}\right)\mu+\left(1+\frac{1}{\alpha-\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\beta-\nu}\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{\gamma-\nu}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\mu-\nu}\right)\nu\Bigg]\,\Phi$$

ou encore

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N)}$$

$$= \Big[(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu+\nu) + \left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta}\right) + \left(\frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\gamma}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\delta-\alpha}{\alpha-\delta}\right) + \cdots + \left(\frac{\nu-\alpha}{\alpha-\nu}\right) + \left(\frac{\gamma-\beta}{\beta-\gamma}\right) + \left(\frac{\delta-\beta}{\beta-\delta}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\nu-\beta}{\beta-\nu}\right) + \left(\frac{\delta-\gamma}{\gamma-\delta}\right) + \left(\frac{\varepsilon-\gamma}{\gamma-\varepsilon}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\nu-\gamma}{\gamma-\nu}\right) + \cdots + \left(\frac{\nu-\mu}{\mu-\nu}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)} - \frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} + \frac{\delta}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\varepsilon)} - \frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} - \frac{\mu}{(\lambda-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\right) +$$

$$+ \Big(- \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} -$$

$$- \frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)} + \frac{\delta}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\Big)$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left(-1\right)^{n_1-1} \Big(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots(\alpha-\nu)} -$$

$$- \frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\cdots(\beta-\nu)} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n_1-1} \frac{\nu}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)\cdots(\mu-\nu)}\Big)\Big]\Phi$$

ou après simplifications

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]} =$$

$$= \Big[(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu+\nu) + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\gamma} + \frac{\delta-\alpha}{\alpha-\delta} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\nu-\alpha}{\alpha-\nu} + \frac{\gamma-\beta}{\beta-\gamma} + \frac{\delta-\beta}{\beta-\delta} + \cdots + \frac{\nu-\beta}{\beta-\nu} + \frac{\delta-\gamma}{\gamma-\delta} +$$

$$+ \frac{\varepsilon-\gamma}{\gamma-\varepsilon} + \cdots + \frac{\nu-\gamma}{\gamma-\nu} + \cdots + \frac{\nu-\mu}{\mu-\nu}\Big]\Phi$$

Mais

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu+\nu = (a+b+c+\cdots+m+n) + (+\,a_1+b_1+c_1+\cdots+m_1+n_1)$$

et d'autre part

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\gamma} + \frac{\delta-\alpha}{\alpha-\delta} + \cdots + \frac{\nu-\alpha}{\alpha-\nu} + \frac{\gamma-\beta}{\beta-\gamma} + \frac{\delta-\beta}{\beta-\delta} + \cdots$$

$$+ \frac{\nu-\beta}{\beta-\nu} + \frac{\delta-\gamma}{\gamma-\delta} + \frac{\varepsilon-\delta}{\delta-\varepsilon} + \cdots + \frac{\nu-\gamma}{\gamma-\nu} + \cdots +$$

$$+ \frac{\nu-\mu}{\mu-\nu} = -(a_1+b_1+c_1+\cdots+m_1+n_1)$$

et finalement

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N)} = (a+b+c+ \cdots + m+n)\,\Phi$$

$$= [(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\cdots(\alpha-\nu)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots$$

$$\cdots(\beta-\nu)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\cdots(\gamma-\nu)\cdots$$

$$\cdots(\mu-\nu)]\,\frac{(a+b+c+\cdots m+n)\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\cdots\mu\,!\,\nu\,!}$$

$$= \left(\frac{a+1-b}{a+1}\right)\left(\frac{a+2-c}{a+2}\right)\cdots\left(\frac{a+(n_1-1)-n}{a+(n_1-1)}\right)$$

$$\left(\frac{b+1-c}{b+1}\right)\left(\frac{b+2-d}{b+2}\right)\cdots\left(\frac{b+(n_1-2)-n}{b+(n_1-2)}\right)\left(\frac{c+1-d}{c+1}\right)$$

$$\left(\frac{c+2-d}{c+2}\right)\cdots\left(\frac{c+(n_1-c_1)-n}{c+(n_1-c_1)}\right)\cdots\left(\frac{m+1-n}{m+1}\right)$$

$$\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!\cdots m\,!\,n\,!}$$

THÉORÈME. *Si* $a \geqslant b-1 \geqslant c-2 \geqslant \cdots \geqslant m-m_1 \geqslant n-n_1$

$$P_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]} =$$

$$= \frac{a+1-b}{a+1}\cdot\frac{a+2-c}{a+2}\cdot\cdots\frac{a+(n_1-1)-n}{a+(n_1-1)}\cdot\frac{b+1-c}{b+1}$$

$$\frac{b+2-d}{b+2}\cdot\cdots\frac{b+(n_1-2)-n}{b+(n_1-2)}\cdot\frac{c+1-d}{c+1}\,\frac{c+2-e}{c+2}\cdots$$

$$\frac{c+(n_1-c_1)-n}{c+(n_1-c_1)}\cdots\frac{m+1-n}{m+1}.$$

(Continua)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CENTENÁRIO DE GOMES TEIXEIRA

Em sessão de 20 de Maio de 1948 o Senado Universitário do Porto, partilhando a iniciativa do Conselho da Faculdade de Ciências, resolveu promover, em Maio de 1951, a comemoração do 1.° centenário do nascimento do Prof. Dr. Gomes Teixeira, que foi o 1.° Reitor e Reitor honorário da Universidade do Porto.

Em sessão solene serão evocadas, pelo Prof. R. Sarmento de Beires, a vida e a obra do grande Matemático, procedendo-se em seguida ao descerramento do seu retrato, pintado por Abel de Moura, na Galeria dos Reitores, e do busto de mármore, por Teixeira Lopes, na sala do Conselho da Faculdade de Ciências.