Serão também proferidas lições àcerca dos seus trabalhos científicos pelo Prof. A. Cipião Gomes de Carvalho, e tratar-se-á da colocação de uma lápide na casa do Porto onde viveu e faleceu o insigne mestre.

Também o Senado Universitário de Coimbra decidiu comemorar o centenário, publicando o catálogo das separatas oferecidas pelo Prof. Gomes Teixeira à Biblioteca de Matemática da Faculdade de Ciências, assim como o índice das cartas entregues ao Arquivo daquela Universidade, fazendo-se ainda uma edição acompanhada de notas históricas e críticas, das que apresentem interêsse científico.

A. A. G.

A *Gazeta de Matemática* não podia deixar de prestar também homenagem á memória do notável matemático português.

Pareceu à Redacção da revista que a melhor contribuição consistiria em dedicar um dos números deste ano inteira e exclusivamente ao ilustre investigador, número contendo trabalhos inéditos de matemáticos portugueses e estrangeiros escritos para este fim. E neste sentido dirige a *Gazeta de Matemática* um apelo a todos os seus colaboradores.

Registamos já neste momento, com grande satisfação, o bom acolhimento à nossa iniciativa tendo-se recebido já para o número comemorativo colaboração valiosa dos Profs. Sir E. Whittaker e J. Hadamard e a promessa de outras contribuições.

A *Junta de Investigação Matemática* além de outras participações nesta comemoração resolveu conceder um subsídio à *Gazeta de Matemática* para auxiliar a publicação do número especial.

M. Z.

PROF. DR. JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Nos dias 20 e 22 de Janeiro tiveram lugar no Instituto Superior de Agronomia as provas para professor catedrático do 3.º grupo (Matemática e Cálculo). Foi único concorrente o Doutor José Sebastião e Silva, 1.º assistente da Faculdade de Ciências de Lisboa. A lição proferida, sobre ponto tirado à sorte, intitulava-se «Eliminação. Teorema de Bezout para duas equações algébricas a duas incógnitas» e foi apreciada pelo Prof. Dr. Manuel Esparteiro. Da tese apresentada «Integração e derivação em espaços de Banach» foi arguente o Prof. Dr. Luís de Beda Neto, membro do júri, presidido pelo Reitor da Universidade Técnica, Prof. M. Amzalak, e constituido também pelos Profs. Drs. Vítor Hugo de Lemos, J. Ramos e Costa, José Vicente Gonçalves, A. de Mira Fernandes, Aníbal Scipião de Carvalho, Abílio Aires, Manuel Marques Esparteiro e Diogo Pacheco de Amorim. O candidato foi aprovado por unanimidade. A «Gazeta de Matemática» felicita vivamente o novo professor e seu querido colaborador.

M. Z.

PRÉMIO EINSTEIN

Registámos já no n.º 40 da nossa revista a fundação deste prémio de 15.000 dólares a atribuir todos os triénios ao cientista cujos trabalhos fossem considerados como importante contribuição no domínio das ciências matemáticas e físicas. Acaba de ser concedido, pela primeira vez, ao matemático K. Gödel, professor na Universidade de Princeton e ao físico J. Schwinger, da Universidade de Harvard.

No próximo número da «Gazeta» publicaremos um artigo sobre a obra de Kurt Gödel da autoria do nosso colabordor Luís das Neves Real.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de aptídão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1950 — Julho — Ponto n.º 1.

3170 — Demonstrar que, se se dividem dois inteiros positivos pela sua diferença, os restos são iguais e os quocientes diferem de uma unidade. R: *Como* $a=(a-b)+b$ *e* $a-b=\dot{\overline{(a-b)}}$, *resulta, pelo teorema fundamental da divisibilidadde, que* a *e* b *dão, na divisão por* $a-b$, *restos iguais. Sendo, então,*

$$a=(a-b)\,q+r \;\; e \;\; b=(a-b)\,q'+r \;\; (r<a-b),$$

virá $a-b=(a-b)\,q-(a-b)\,q'$, *logo* $a-b=(a-b)(q-q')$, *donde resulta* $q-q'=1$.

3171 — Verificar que 8128 é um número perfeito, isto é: igual à soma dos seus divisores incluindo a unidade e excluindo o próprio número. R: $8128=2^6\cdot 127$; *os divisores de* 8128 *são* 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 127; 254; 508; 1016; 2032; 4064; 8128. *A soma* $1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064$ *é, efectivamente,* 8128:

3172 — Demonstrar que a^2+b^2 só é divisível por 7 se a e b são ambos divisíveis por 7. R: *Será* $a=\dot{7}\pm r\;(r=0,1,2,3)$ $\;b=\dot{7}\pm r'\;(r'=0,1,2,3)$; *logo*

$a^2 = \dot{7}+r_1$ $(r_1=0,1,4,2)$ $b^2=\dot{7}+r_1'$ $(r_1'=0,1,4,2)$ *respectivamente. Se for* $a=\dot{7}$ *e* $b=\dot{7}$, *será então* $a^2+b^2=\dot{7}$; *se* a *e* b *não forem conjuntamente* $\dot{7}$ *é fácil verificar, combinando todos os outros casos, que* $a^2+b^2 \neq \dot{7}$.

3173 — Decompor de todos os modos possíveis 1348 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas de 17 e de 31 respectivamente. R: *Teremos de resolver em números inteiros positivos a equação* $17x+31y=1348$; *as parcelas serão* $17x$ *e* $31y$ *sendo* (x,y) *uma solução inteira positiva da equação. As soluções* (x,y) *são* $(10,38)$ *e* $(41,21)$.

3174 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^4-(4m-3)x^2+3m^2-5m+2=0$, sejam: 1.° — quatro números reais em progressão aritmética; 2.° — quatro imaginários puros também em progressão aritmética. Verificar as soluções do problema. R:

1.° — *Supondo* y' *e* y'' *as duas raizes da resolvente e admitindo que* $y' \geqslant y''$ *e* $y''>0$, *as raízes da equação biquadrada serão, por ordem crescente,* $-\sqrt{y'}$, $-\sqrt{y''}$, $+\sqrt{y''}$, $+\sqrt{y'}$. *Impondo a condição de estes quatro números reais estarem em progressão aritmética virá* $y'=9y''$. *Portanto, se for* $y'=9y''$ *e* $y'>0$ *as raizes da equação dada estarão em progressão aritmética e serão reais.*

2.° — *Atendendo às observações anteriores é fácil concluir que, se for* $y'=9y''$ *e* $y''<0$, *as raizes da equação dada serão imaginários puros em progressão aritmética.*

No 1.° caso será $m=7/6$; *no 2.°* $m=17/26$.

3175 — Sendo n inteiro positivo e $x>0$ demonstrar que, se o termo médio do desenvolvimento de $(1+x)^{2n}$ é maior que todos os outros, x está compreendido entre $\dfrac{n}{n+1}$ e $\dfrac{n+1}{n}$. N. B. — Comparar o termo médio com os dois que lhe são contíguos. R: *O termo médio é* $\binom{2n}{n}x^n$; *o que o antecede é* $\binom{2n}{n-1}x^{n-1}$ *e o que o segue é* $\binom{2n}{n+1}x^{n+1}$. *Pondo* $\binom{2n}{n}x^n > \binom{2n}{n-1}x^{n-1}$ *e* $\binom{2n}{n}x^n > \binom{2n}{n+1}x^{n+1}$ *vem, respectivamente,* $x>\dfrac{n}{n+1}$ *e* $x<\dfrac{n+1}{n}$.

Soluções dos n.^{os} 3170 a 3175 de Laureano Barros

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1950 — Ponto n.° 3.

3176 — Designando por M o menor múltiplo comum dos números A e B e atendendo a que se dois números são primos entre si, também a sua soma e o seu produto são primos entre si, demonstre que m.d.c. $(A,B)=$ m.d.c. $(A+B,M)$. R: *Designando por* D *o m. d. c.* (A,B) *e tendo em atenção que* $M\cdot D=A\cdot B$, $A=D\cdot Q$ *e* $B=D\cdot Q'$, *com* Q *e* Q' *primos entre si, a igualdade a demonstrar é equivalente a* $D=$ m. d. c. $[D\cdot(Q+Q'), D\cdot Q\cdot Q']$ *ou* m. d. c. $(Q+Q', Q\cdot Q')=1$, *por uma propriedade do* m. d. c. *Esta última resulta de serem* $Q+Q'$ *e* $Q\cdot Q'$ *primos entre si.*

3177 — Calcule o resto da divisão por 7 do número $x=18^{1000}\cdot 23+44$. R: *Analisando as potências sucessivas, de expoente inteiro e positivo, de* 18, *em relação ao divisor* 7 *conclue-se que*

$$18^{3K}\equiv 1 \pmod 7),\ 18^{3K+1}\equiv 4 \pmod 7 \text{ e } 18^{3k+2}\equiv 2 \pmod 7.$$

Assim, tem-se $18^{1000}\equiv 4 \pmod 7$. *E, por ser* $23\equiv 2 \pmod 7$ *e* $44\equiv 2 \pmod 7$ *segue-se que é* $x\equiv 3 \pmod 7$.

3178 — Prove que a equação $x^2-(a+b)x+ab-a^2=0$ tem sempre raízes reais, quaisquer que sejam os números reais a e b. R: *Com efeito*

$$\Delta=(a+b)^2-4ab+4a^2=(a-b)^2+4a^2$$

anula-se quando $a=b=0$ *e é positivo em todos os outros casos com* a *e* b *reais.*

3179 — Dado o polinómio $P(x)=x^4+4x^3-x^2-10x+6$, substitua x por $X+h$ e determine h de modo que o polinómio em X seja desprovido do termo do 3.° grau. R: *O termo em* X^3 *do polinómio* $P(X+h)$ *tem por coeficiente* $4(h+1)$. *Logo,* $h=-1$ *é o valor procurado.*

3180 — Determinar os valores de x que verificam simultâneamente as igualdades: $\operatorname{cotg} a=\sqrt{1-x^2}$ e $\operatorname{cosec} a=\sqrt{x-4}$. R: *Os valores de* x *para os quais é possível a 2.ª igualdade,* $x \geqslant 5$, *tornam ilegítima a 1.ª, por tornar imaginário o seu 2.° membro. Sendo incompatíveis as duas igualdades, não há valor algum de* x *nas condições do enunciado*

3181 — Determine os ângulos x inferiores a 180° e tais que tornam positiva a fracção

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1}{\operatorname{sen} x-1}.$$

R: *Fazendo* $\operatorname{sen} x=z$, *há que determinar os valores reais de* z *do intervalo* $(0,1)$ *tais que* $(2z^2+z-1)\cdot(z-1)>0$. *Das soluções,* $-1<z<1/2$ *e* $z>1$, *desta desigualdade, apenas interessam, portanto, os valores* $0<z<1/2$ *ou* $0°<x<30°$ *e* $150°<x<180°$.

Soluções dos n.^{os} 3176 a 3181 de O. Morbey Rodrigues