MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de frequência 1949-50.**

3182 — *a*) Demonstre que toda a sucessão monótona tem limite.

Seja

$$u_n = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - \frac{2n-1}{n}\right] - (-1)^n\left[\frac{2n-1}{n} + \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right]\right\} \quad (a<0)$$

b) Mostre que u_{2K} e u_{2K-1} são sucessões monótonas. *c*) É a sucessão u_n convergente? No caso negativo indique os seus limites máximo e mínimo. *d*) Com que valor de a pode convergir a sucessão de termo geral u_n^2 (responda à pergunta sem calcular o valor de $(u_n)^2$).

3183 — *a*) Defina uma série absolutamente convergente e mostre que a soma duma série absolutamente convergente é independente da ordem dos seus termos. *b*) Como se comportam a esse respeito as séries simplesmente convergentes? Em que fundamenta a resposta? *c*) u_n/a_n tem limite finito com u_n qualquer e $a_n > 0$. Sendo Σa_n uma série convergente prove que Σu_n é uma série absolutamente convergente. Na hipótese de Σa_n ser divergente em que condições pode ainda Σu_n convergir absolutamente? E convergir simplesmente? *d*) Verifique pelas conclusões anteriores a convergencia absoluta da série de termo geral $\log(1+2/n^2)$.

3184 — Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo aberto (a,b) com limites laterais $f(a+0)$ e $f(b-0)$ de sinais contrários. Mostre que $f(x)$ se anula em algum ponto interior a (a,b).

3185 — *a*) Mostre que uma função com derivada finita num ponto é nesse ponto contínua. *b*) Determine a derivada na origem de $g(x)=xf(x)$ em que $f(x)$ é uma função contínua nesse ponto. *c*) Pode para esse efeito ser $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$?

3186 — *a*) Seja $y=f(x)$ uma função limitada num conjunto (x) com pontos em qualquer parte (α,β) do eixo real. Verifique que a função $\omega(x)$ está definida para qualquer valor finito de x ($\omega(x)$ é a oscilação de y no ponto de abcissa x). *b*) Considerando a hipótese de $f(x)$ estar definida para qualquer valor de x e só admitir pontos isolados de descontinuidade, prove que o mesmo acontece com $\omega(x)$.

F. C. P. — **Álgebra Superior — 1.º exercício de revisão — Dezembro de 1950.**

3187 — Seja (A/B) uma cisão definida no conjunto dos números racionais positivos. Provar que $\left(\frac{1}{B}\Big/\frac{1}{A}\right)$ é também uma cisão, sendo $1/B$ e $1/A$, respectivamente, os conjuntos dos inversos dos elementos de B e de A. R: a) *Todo o núumero da classe* 1/B *é menor que qualquer número da classe* 1/A; b) *como qualquer número racional pertence a* A *ou* B, *sendo* x *um número racional, o seu inverso* 1/x *(também racional) pertence a* A *ou* B; *portanto* x *pertence a* 1/A *ou* 1/B.

3188 — Provar que a relação $z' = \frac{1+iz}{1-iz}$ transforma o segmento do eixo dos xx compreendido entre os pontos $z=1$ e $z=-1$, numa semi-circunferência de centro na origem, que passa pelos pontos $z'=1$ e $z'=-1$. R: *Consideram-se os valores reais de* z, *tais que* $|z| \leqslant 1$. *Para esses valores, é claro que, sendo*

$$z' = \frac{(1+iz)^2}{(1-iz)(1+iz)} = \frac{1-z^2+2iz}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} + i\frac{2z}{1+z^2},$$

o módulo de z' *é igual a* 1, *e o seu argumento* *varia entre* $-\pi/2$ *e* $\pi/2 \cdot [\cos\theta \geqslant 0]$. *Para* $z=1$, *vem* $z'=1$, *e para* $z=-1$, $z'=-1$.

3189 — *a*) Se $x \neq y \neq z$, e se $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, provar que $1+xyz=0$. R: *Note-se que*

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

b) Calcular, a partir da definição, o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3190 — Resolver discutindo-o, o sistema linear

$$x + y + z + t = 1$$
$$ax + by + cz + dt = k$$
$$a^2 x + b^2 y + c^2 z + d^2 t = k^2$$
$$a^3 x + b^3 y + c^3 z + d^3 t = k^3 .$$

3191 — Sendo α e β dois números reais definidos por pares de sucessões convergentes,

$$\alpha \begin{cases} a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \\ b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \cdots \\ b'_1, b'_2, \cdots, b'_n, \cdots \end{cases}$$

provar que o par de sucessões

$$\begin{cases} (a_1+a'_1)/2, (a_2+a'_2)/2, \cdots, (a_n+a'_n)/2, \cdots \\ (b_1+b'_1)/2, (b_2+b'_2)/2, \cdots, (b_n+b'_n)/2, \cdots \end{cases}$$

define um número real e que esse número é precisamente $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

3192 — Sendo t uma variável real de quadrado menor que 1, provar que o afixo dum número complexo $z = t^2 - 1 + \sqrt{t^4 - t^2}$ pertence sempre à circunferência de centro no afixo do número $-1/2$ e raio $1/2$.

3193—Resolver, gráficamente, o sistema de equações

$$\begin{cases} |z - i| = 2 \\ |z - (1+i)| = |z + (1+i)| \end{cases}$$

3194 — Se $X = a + ib$ e $X' = a - ib$, provar que os números $X^n - X'^n$ (n, inteiro e positivo) e $\frac{X^n + X'^n}{X^n - X'^n}$ são imaginários puros. *Nota* — Recorrer à representação trigonométrica.

3195 — Partindo da identidade

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \begin{vmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{vmatrix}$$

justificar o seguinte teorema de de Euler: «o produto de dois números, cada um dos quais é a soma de quatro quadrados, é ainda a soma de quatro quadrados».

3196 — Se x, y, z não são todos nulos e se

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

provar que, ou $a+b+c=0$ ou $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$.

Soluções dos n.os 3187 a 3189 de A. Andrade Guimarães

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência — 30 de Junho de 1950.

3197 — Defina função homogénea e demonstre que a derivada parcial de uma tal função é também homogénea. Verifique a homogeneidade da função $g(y/x)$ e calcule o seu grau. Supondo a função $g(u)$ diferenciável mostre que a função $g(y/x)$ verifica a identidade de Euler. R: *Como* $g(yt/xt) = t^0 g(y\,x)$ *para* $x \neq 0$ *e* $t > 0$, *então* $g(y/x)$ *é homogénea de grau zero. Posto isto vem:* $x \cdot g'_{\frac{y}{x}}(y/x) \cdot (-y/x^2) + y \cdot g'_{\frac{y}{x}}(y/x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot g(y/x)$ *e a função verifica a identidade.*

3198 — Defina integral no sentido de Riemann de uma função $f(x)$ limitada no intervalo (a, b). Defina primitiva da mesma função no mesmo intervalo. Se $f(x)$ é integrável e primitivável em (a, b), como se calcula o seu integral naquele intervalo? Justifique. Descreva e justifique o método de primitivação por decomposição e calcule a primitiva de $\frac{3x-2}{x^2-2x} - x^2 \cdot \operatorname{sen} x$.

$$R: P\frac{3x-2}{x^2-2x} - Px^2 \cdot \operatorname{sen} x = P\frac{2x-2}{x^2-2x} + P\frac{x}{x(x-2)} -$$
$$- Px^2 \cdot \operatorname{sen} x = \log C(x^2-2x)(x-2) +$$
$$+ x^2 \cos x - 2(x \operatorname{sen} x + \cos x).$$

3199 — Prove que efectuando a operação de Jacobi sobre um determinante o valor deste não vem alterado. Descreva o cálculo abreviado de um determinante ($n > 3$). Enuncie o primeiro teorema de Laplace e aplique-o à segunda coluna do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(Defina prèviamente os termos com que enunciar o teorema de Laplace). R: *O teorema de Laplace a que se refere a questão é o seguinte: um determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos complementos*

$$\Delta = -3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3200 — Trate o problema da determinação das raizes inteiras e fraccionárias de uma equação algébrica de coeficientes inteiros e deduza condições necessárias de existencia dessas raizes. Prove que a equação $f(x) = 0$ de coeficientes inteiros não admite raizes ímpares se um, pelo menos, dos números $f(-1)$, $f(+1)$ for ímpar.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º Exame de frequência — 2.ª chamada, 1950, Julho, 15.**

3201 — Calcule a primitiva de $f(x) = \dfrac{2}{x(x-1)} + {}$ $+ \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$. Descreva e justifique o método de primitivação por substituição. R:

$$P\frac{2}{x(x-1)} + P\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = \frac{1}{3} P\, 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x + {}$$
$$+ P\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\right) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \log C \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 .$$

3202 — Dada a função $z = f(x, y)$ quando é ela diferenciável no ponto $P(a, b)$? Supondo $f(x, y)$ diferenciável em $P(a, b)$, seja $M(x, y)$ um ponto vizinho de P e calcule o limite da função quando o ponto M se desloque para P. Justifique. Sendo $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ e as funções φ e ψ diferenciáveis no ponto t_0 que faz $\varphi(t_0) = a$ $\psi(t_0) = b$ indique o valor da derivada $\dfrac{dz}{dt}$ no ponto t_0. Para $z = (x+y)^2 + xy$ e com $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$ calcule $\dfrac{dz}{dt}$ no ponto $t = \pi/4$. R:

$$\left[\frac{dz}{dt}\right]_{\pi/4} = \left[\frac{dz}{dx}\right]_{\substack{x=\operatorname{sen}\pi/4 \\ y=\cos\pi/4}} \cdot \left[\frac{dx}{dt}\right]_{\pi/4} + \left[\frac{dz}{dy}\right]_{\substack{x=\operatorname{sen}\pi/4 \\ y=\cos\pi/4}} \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{dy}{dt}\right]_{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 .$$

3203 — Enuncie o teorema de d'Alembert e deduza a decomposição em factores primos de um polinómio de grau n. Determine um polinómio de grau mínimo e de coeficientes racionais que admita a raiz $\sqrt{2}$, a raiz dupla $2-i$ e que assuma o valor 4 para $x=2$. R: $a_0(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2+i)^2(x-2-i)^2 = a_0(x^2-2)[(x-2)^2+1]^2$ *e para* $x=2$ *vem* $2a_0 = 4$ *portanto* $2(x^2-2)[(x-2)^2+1]^2$ *é o polinómio pedido.*

3204 — Enuncie o 1.º teorema de Laplace e o seu consequente. Justifique este último. Verifique que é nulo o determinante Δ e determine uma composição linear das linhas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

R: *Pelo primeiro teorema de Laplace aplicado à primeira coluna:*

$$2(50) + 2(-25) + 1(-50) - 1(0) = 0$$

e aplicando o consequente às outras colunas veem as relações:

$$-1(50) + 4(-25) - 3(-50) + 0(0) = 0$$
$$2(50) + 0(-25) + 2(-50) + 3(0) = 0$$
$$-1(50) + 2(-25) + 0(-50) + 4(0) = 0$$

que somadas e representando por $L_1\ L_2\ L_3\ L_4$ *as matrizes linhas e por* **0** *a matriz nula de tipo* (1×4): $(50)L_1 + (-25)L_2 + (-50)L_3 + (0)L_4 = \mathbf{0}$.

Soluções dos n.os 3197 a 3204 de J. Ribeiro de Albuquerque.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — GEOMETRIA DESCRITIVA — **2.º exame de frequência, 1950 — Ponto n.º 1.**

3205 — Conduzir por um ponto do 1.º bissector uma recta que faça ângulos de 50º com uma recta vertical de afastamento 4 cm. e com a L. T. R: *A recta pedida é a 3.ª aresta dum triedro cujas faces medem* 50º, 50º *e* 90º. *As outras duas arestas são paralelas a* L. T. *e à recta vertical respectivamente.*

3206 — É dado um plano cujos traços formam ângulos de 45º com L. T. Por um ponto qualquer do plano conduzir as rectas deste que formam ângulos de 60º com uma recta vertical de afastamento nulo. R: *Considere a superfície cónica de revolução de eixo vertical, vértice no ponto de intersecção da* L. T. *com o plano dado e tendo por meridiana principal duas rectas que fazem ângulos de* 60º *com o eixo. Determine a secção feita nesta superfície pelo plano dado. As rectas pedidas são as paralelas conduzidas pelo ponto às duas rectas que formam a secção.*

3207 — Por um ponto de cota 3 cm. e afastamento 4 cm. conduzir os planos que distam 2 cm. da *L. T.* R: *Planos tangentes conduzidos pelo ponto a uma superfície cilíndrica de revolução tendo a* L. T. *por eixo e cujas geratrizes distam 2 cm. deste.*

Ponto n.º 2

3208 — É dado um plano vertical inclinado 60º sobre o plano vertical de projecção. Conduzir por um ponto do 2.º bissector uma recta que forme ângulos de 55º com esse plano e com a *L. T.* R: *Considere com vértice no ponto dado um triedro em que uma das faces é limitada por uma paralela a* L. T. *e por uma recta normal ao plano dado. A recta pedida é a 3.ª aresta deste triedro cujas faces medem respectivamente* 55º, 35º. *e* 30º

3209 — Determinar os pontos dum plano horizontal de cota 3 cm. que distam 5 cm. duma recta do plano horizontal de projecção que faz com a *L. T.* um ângulo de 40.º R: *O lugar dos pontos é constituído* *pelas duas rectas da secção do plano dado, na superfície cilíndrica de revolução cujo eixo é a recta do plano horizontal de projecção e cujas geratrizes distam 5 cm. daquele eixo.*

3210 — Por uma recta do 1.º bissector, cujas projecções fazem com a *L. T.* ângulos de 60.º, conduzir os planos que fazem ângulos de 40º com L. T. R: *Planos tangentes conduzidos pela recta dada a uma superfície cónica de revolução tendo por vértice o ponto comum à recta do 1.º bissector e à* L. T, *esta por eixo e de ângulo no vértice igual a* 80º.

Soluções dos n.os 3205 a 3210 de João Farinha

ANÁLISE INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — **1.º exame de frequência ordinário — Fevereiro 1949.**

3211 — Estudar o integral $\int_0^{\infty} \frac{3x^4}{(x^3+1)^3}\,dx$ e, em caso de convergência, calculá-lo. R: *O integral é convergente porque*

$$\lim_{x\to\infty} x^s \cdot \frac{3x^4}{(x^3+1)^3} = 1 \quad (s=5>1).$$

Integrando por partes tem-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{3x^4}{(1+x^3)^3}\,dx = \left[-\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^2\,(x^2-x+1)^2} = -\frac{1}{9}\left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^{\infty} -$$

$$-\frac{1}{9}\Big[\log(x+1)\Big]_0^{\infty} + \frac{1}{18}\int_0^{\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx +$$

$$+\frac{1}{9}\int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{1}{9} +$$

$$+\frac{2}{9}\left[\frac{3\pi}{\sqrt{27}} + \frac{1}{3} - \frac{6}{\sqrt{27}}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{9}\left(1+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

3212 — Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-a\cos x}{1-a\cos x + a^2}\,dx$.

R:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1/2 - a^2/2}{1-2a\cos x + a^2}\right) dx = \frac{1}{2}\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + $$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+a^2)(\cos^2 x/2 + \mathrm{sen}^2 x/2) - 2a(\cos^2 x/2 - \mathrm{sen}^2 x/2)} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-a)^2\cos^2 x/2 + (1+a^2)\,\mathrm{sen}^2 x/2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x/2\; dx/2}{(1-a)^2 + [(1+a)\,\mathrm{tg}\,x/2]^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + (1-a^2)\frac{1}{(1+a)(1-a)}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{(1+a)\,\mathrm{tg}\,x/2}{1-a}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \mathrm{arctg}\,\frac{1+a}{1-a}.$$

3213 — Dá-se um tetraedro $ABCD$; sejam S_A, S_B, S_C, S_D quatro escalares iguais às áreas das faces do tetraedro. Considerem-se quatro vectores normais às faces, dirigidos do interior para o exterior do tetraedro e de módulos iguais a KS_A, KS_B, KS_C e KS_D, sendo K um número positivo; demonstrar que a soma destes 4 vectores é nula. R:

$$S = \frac{K}{2}\Big[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CB}\Big]$$

mas

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\ , \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\wedge(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Logo:

$$S = \frac{K}{2}\Big[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\Big] = 0$$

q. e. d.

Note-se que os vectores nas circunstâncias do problema são o produto de $\frac{K}{2}$ *pelo produto externo dos vectores arestas do tetraedro.*

Soluções dos n. 3211 a 3213 de M. Soares Madureira

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — **Outubro de 1950 — 1.ª chamada.**

3214 — Um referencial rígido $Axyz$ cujo eixo Az coincide constantemente com Oz está animado de um movimento helicoidal relativamente a $Oxyz$. *a*) Fixar as leis temporais de variação de z (cota de A) e de Φ (ângulo de Ax com Ox) para que o movimento seja de passo p e ainda de modo que um ponto M à distância a do eixo Az (ponto que pode ser escolhido sobre Ax) possua um movimento de aceleração tangencial constante e igual a b. *b*) O movimento obtido na alínea precedente pode, em projecção sobre Oxy, obedecer à lei das áreas relativamente a O? Justificar a resposta e, não sendo afirmativa, dizer qual deveria ser a lei do movimento helicoidal para aquela condição ser satisfeita.

3215 — Um ponto material M de peso mg e massa m é obrigado a mover-se sobre a parábola perfeitamente polida $y^2=2ax$ cujo eixo Ox é vertical. Além do peso actua sobre o ponto uma força constante mF paralela a Oy. *a*) Escrever as equações do movimento de M sob a forma de Mac-Laurin. *b*) Escrever o integral da força viva expresso nas coordenadas do ponto e das suas primeiras derivadas. *c*) Sabendo que o ponto no instante $t=0$ se encontra na posição de ordenada $y=a$, calcular a velocidade que deve ser-lhe comunicada nesse instante para que atinja o vértice da parábola com velocidade nula.

3216 — Um disco circular vertical de centro C e raio b pode rolar sem escorregamento sobre um eixo horizontal AB. Um fio inextensível $ESDM$ está fixo em E à periferia do disco, aplica-se sobre ele, abandona-o horizontalmente em S e depois de passar através de um anel D perfeitamente polído cai verticalmente sustentando na extremidade um peso p. *a*) Sabendo que em C actua uma força horizontal F, calcular o seu valor de modo que o disco e o ponto estejam em equilíbrio (aplicar o teorema dos trabalhos ou das velocidades virtuais). *b*) Calcular as componentes da reacção que se desenvolve no ponto de contacto do disco com a horizontal AB.

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final — Outubro de 1950.

3217 — É dado um sólido S cujo elipsoide de inércia, em relação ao ponto fixo O do sólido, é de revolução. O sólido está animado dum movimento de Poinsot em relação ao ponto O. Escrever as equações de Euler e integrá-las, determinando as equações do movimento. R: *Seja* $Ax^2+Ay^2+Cz^2=1$ *a equação do elipsoide em relação ao ponto* O. *As equações de Euler serão:*

$$\frac{dp}{dt}+kqr=0,\quad \frac{dq}{dt}-kpr=0,\quad \frac{dr}{dt}=0,\left(k=\frac{C}{A}-1\right),$$

que, integradas, dão

$$p=c_2\,\mathrm{sen}\,\mu t+c_3\cos\mu t$$
$$q=c_3\,\mathrm{sen}\,\mu t-c_2\cos\mu t \qquad \mu=kc_1$$
$$r=c_1.$$

O sólido tem pois um movimento de rotação em torno do ponto O, *definido pelo vector* $\vec{\omega}=p\mathbf{I}+q\mathbf{J}+r\mathbf{K}$.

3218 — Um ponto P, de massa m, move-se sem atrito, sobre uma recta OP que, por sua vez, está animada duma rotação uniforme, num plano fixo (Oxy), em torno da origem O. Não há forças activas. Achar a força viva, escrever as equações de Lagrange e as equações canónicas de Hamilton. R: *Em coordenadas semi-polares* $(\vec{R},\vec{S},\vec{K})$ *será*

$$P-O=re^{i\omega t} \qquad \omega\rightarrow \text{rotação}$$

e a força viva toma a forma $2T=m(r'^2+r^2\omega^2)$

As equações do movimento serão então

$$F_R=m(r''-r\omega^2) \qquad rF_S=\frac{d}{dt}mr^2\omega^2.$$

3219 — Verificar que o ponto P definido pela equação

$$b_1(P-B_1)+b_2(P-B_2)+\cdots+b_n(P-B_n)=0$$

é o centro de gravidade dum sistema de massas $b_1, b_2\cdots b_n$ colocadas respectivamente nos pontos $B_1, B_2\cdots B_n$. R: *Da expressão corrente que define o centro de gravidade* $M(G-O)=\Sigma_i m_i(P_i-O)$ *resulta imediatamente* $\Sigma_i m_i(G-P_i)=0$, *igualdade equivalente à equação proposta.*

Soluções dos n.os 3217 a 3219 de J. Gaspar Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

85 — SEMPLE, J. G., and ROTH, L. — **Introduction to Algebraic Geometry.** Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+446 pp. Price 30 s. net.

A nuestro juicio, el mérito principal de la obra que vamos a presentar reside en el hecho de contener un vasto y bien elegido material experimental de geometria algebraica. En tal sentido, lo consideramos de inestimable valor para el especialista de aquella disciplina. Dicho material encuentra su lugar, no solo en la parte expositiva del texto, sino también y especialmente en las numerosas notas y en los ejemplos y ejercicios, puestos al final de cada párrafo y de cada capítulo, seleccionados con el fino espíritu geométrico que poseen los autores, ambos distinguidos investigadores en el campo de la geometria algebraica.