ANO XI–N.º 46 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO – 1950

REDACTORES PRINCIPAIS: *J. Morgado* E *M. Zaluar*

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

A função de Dirac — Sua interpretação matemática

por **Ruy Luís Gomes**

Segundo a Mecânica Quântica quando um sistema físico de n graus de liberdade se encontra no estado (físico) representado pela função normada

$$\varphi(x_1 \cdots x_n), \int |\varphi|^2 dx_1 \cdots dx_n = 1,$$

a densidade de probabilidade correspondente à posição $x_1 \cdots x_n$ no espaço R^n das configurações possíveis, é $|\varphi(x_1 \cdots x_n)|^2$. Por outro lado, na estruturação geral (da Mecânica quântica) essa densidade de probabilidade aparece sob a forma

$$\left| \int \varphi(y_1 \cdots y_n)\, \delta_x(y_1 \cdots y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \right|^2,$$

em que x representa o conjunto ordenado $x_1 \cdots x_n$ e $\delta_x(y_1 \cdots y_n)$ a função própria da grandeza-posição em R^n referente ao valor $x_1 \cdots x_n$.

Concretamente $\delta_x(y_1 \cdots y_n)$ tem de satisfazer[1] a

$$(1) \qquad \begin{aligned} y_1\, \delta_x(y_1 \cdots y_n) &= x_1\, \delta_x(y_1 \cdots y_n) \\ &\cdots \\ y_n\, \delta_x(y_1 \cdots y_n) &= x_n\, \delta_x(y_1 \cdots y_n), \end{aligned}$$

juntamente com uma condição de normalização.

Ora, para satisfazer a (1) terá de ser

$$(2) \quad \delta_x(y_1 \cdots y_n) = 0 \quad \text{para} \quad y_i \neq x_i, i = 1 \cdots n;$$

no ponto $x_1 \cdots x_n$, $\delta_x(y_1 \cdots y_n)$ fica indeterminada.

Uma função nestas condições é, porém, incompatível com uma relação de normalização

$$(3) \qquad \int_{R^n} \delta_x(y_1 \cdots y_n)\, dy_1 \cdots dy_n = 1.$$

No entanto, se tomarmos (2) e (3) como equações definidoras de um novo tipo de função, à qual ainda sejam aplicáveis as regras ordinárias do cálculo com funções, deduz-se, de (2),

$$(4) \qquad \int_{R^n} (\psi(x) - \psi(y))\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n = 0,$$

donde

$$\int_{R^n} \psi(x)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n = \int_{R^n} \psi(y)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n$$

ou finalmente

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{R^n} \psi(y)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n,$$

por força de (3).

E esta expressão de $\psi(x)$ identifica os dois valores

$$|\psi(x)|^2 \quad \text{e} \quad \left| \int_{R^n} \psi(y)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n \right|^2$$

da densidade de probabilidade, de acordo com os princípios gerais da Mecânica Quântica.

Ora, se é certo que nenhum matemático legitimará a dedução de (5), pois nenhuma *verdadeira função* satisfaz a (2) e (3), de todos é sabido que a pseudo função $\delta_x(y)$, introduzida por Dirac, presta grandes serviços em diferentes domínios da Física Matemática.

Este facto, ao lado de muitos outros no campo do cálculo operacional[2], abre uma nova crise no conceito de função e, assim, surge a questão de saber como vencer essa crise.

Antes de responder a essa interrogação, vamos, porém, considerar, à parte, a igualdade

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{R^n} \delta_x(y)\, \psi(y)\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n,$$

para demonstrar que não existe função alguma que lhe satisfaça.

Para isso é necessário começar por definir a família Ψ das funções ψ que figuram em (5). Ora, como do ponto de vista da Física, nos interessam apenas

(1) Consultar qualquer obra de Mecânica Quântica.

(2) Consultar L. Schwartz — *Théorie des Distributions*, págs. 5-6, Tome I, Act. Sc. Ind., Hermann — Paris, 1950.

aquelas que têm norma, $\int_{R^n} |\psi|^2 dy_1 \cdots dy_n$, finita, vamos obrigá-las às duas condições: 1) serem contínuas sobre todo o espaço R^n; 2) serem nulas no exterior de um conjunto compacto.

O teorema que pretendemos demonstrar, formula-se, pois, nestes termos: *não existe função*, $\delta_x(y)$, *que verifique* (5) *sendo* $\psi \in \Psi$.

Se exigirmos que $\delta_x(y)$ seja contínua sobre todo R^n, a demonstração pode fazer-se do seguinte modo [3].

Raciocinando, por comodidade de notação, em R^1, admitamos, por absurdo, que existe uma tal função $f(y)$. De duas uma: ou $f(y) \equiv 0$ ou há, pelo menos, um ponto $y_0 \neq x$ no qual $f(y_0) \neq 0$. Na primeira hipótese temos

$$\int_{R^1} f(y)\,\psi(y)\,dy = 0 \quad \text{para } \psi \text{ qualquer,}$$

enquanto que nós podemos arranjar uma função ψ, tal que $\psi(x) \neq 0$. Numa palavra — é impossível satisfazer a (5).

Na segunda hipótese, construamos um intervalo $[a, b]$ de modo que $c \in [a, b]$, $x \notin [a, b]$, e $f(y)$ tenha em $[a, b]$ ímfimo e supremo do mesmo sinal.

Tomando $\psi(y)$, assim definida

$$\begin{aligned} &\psi(y) = 0 && y \leqslant a \\ &\psi(y) = (y-a)^2 (y-b)^2 && a \leqslant y \leqslant b \\ &\psi(y) = 0 && b \leqslant y \end{aligned}$$

vem

$$0 = \psi(x) \neq \int_{R^1} \psi(y)\,f(y)\,dy = \int_a^b (y-a^2)\,(y-b)^2 f(y)\,dy,$$

donde a impossibilidade de (5).

Repare-se, de resto, em que o fulcro da dedução anterior está no seguinte: se $f(y)$ é contínua num ponto $y_0 \in R^n$ relativamente a R^n, e se $f(y_0) \neq 0$, existe um intervalo de R^n contendo y_0 tal que nele $f(y)$ tem um ínfimo e um supremo do mesmo sinal.

Esta demonstração é, pois, aplicável todas as vezes que os pontos de continuidade de $f(y)$ com relação a R^n formam um conjunto tal que o seu complementar tem medida — L nula, como acontece quando $f(y)$ é integrável-Riemann em todo intervalo de R^n.

Demonstra-se ainda fàcilmente a impossibilidade de (5), quando exigimos [4] de $f(y)$ a condição: $f(y)$ *e* $f^2(y)$, *são somáveis* [1] *em todo conjunto compacto de* R^n.

Imaginemos, por exemplo, que $n=1$ e tomemos as funções

$$\begin{aligned} &\psi_m(y) = \operatorname{sen}(2m+1)\,y \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \\ &\psi_m(y) = 0 \quad , \quad y \leqslant 0 \quad \text{e} \quad 2\pi \leqslant y. \end{aligned}$$

Supondo que $x = \pi/2$, terá de ser

$$\psi_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{R^1} \psi_m(y)\,f(y)\,dy$$

ou seja

$$(-1)^m = \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(2m+1)\,y]\,f(y)\,dy, \quad m = 0, 1, \cdots$$

Ora, como

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2p+1)\,y \cdot \operatorname{sen}(2q+1)\,y \cdot dy = 0, \quad p \neq p,$$

temos [5]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2m+1)\,y \cdot f(y)\,dy\right]^2}{\pi^2} \leqslant \int_0^{2\pi} f^2(y)\,dy$$

ou

$$\int_0^{2\pi} f^2(y)\,dy \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2},$$

o que é absurdo.

Posto isto, vamos dar uma demonstração *absolutamente geral da impossibilidade de*

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{R^n} \psi(y)\,f(y)\,dy,$$

quando ψ *é qualquer função de* Ψ *e* $f(y)$ *uma função determinada, somável em todo compacto* [6] *de* R^n.

Começamos por recordar o

Teorema de Urysohn [2]. *Dado um conjunto fechado* F *de* R^n *contido num conjunto aberto* G, *é sempre possível construir uma função contínua sobre todo* R^n *tal que*

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = 1 \quad , \quad x \in F \\ &\varphi(x) = 0 \quad , \quad x \in R^n - G \\ &0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \quad , \quad x \in G - F. \end{aligned}$$

---

(3) E. Goursat — *Cours d'Analyse Mathématique*, Tome III, 1923, págs. 545-546.

(4) Digo exigimos porque a somabilidade de f num compacto, K, não implica necessàriamente a somabilidade de f^2. Basta considerar a função $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ no compacto $[0, 1]$. Na verdade $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}$ é finito, ao contrário de $\int_0^1 \frac{dy}{y}$.

(5) É a desigualdade de Bessel, que se obtém desenvolvendo

$$\int_0^{2\pi} [f(y) - \Sigma a_m \operatorname{sen}(2m+1)\,y]^2 dy \geq 0,$$

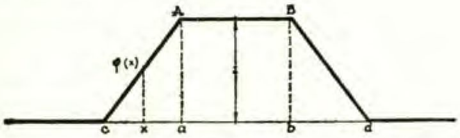
com

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \operatorname{sen}(2m+1\ y\,dy.$$

(6) Por outras palavras, vamos demonstrar que o *operador* ou *tranformação linear* $A(\psi) = \psi(x)$, *x fixo*, $\psi \in \Psi$, *não é redutível ao integral* $\int_{R^n} \psi(y)\,f(y)\,dy$, no qual f representa um função somável em todo compacto de R^n.

Vamos fazer a demonstração na hipótese particular de se tratar de R^1, mas devemos desde já acentuar que o teorema, válido em R^n, se estende a espaços muito mais gerais.

Suponhamos, então, para facilidade de representação geométrica, que F é o intervalo fechado $[a, b]$ e G o intervalo aberto (c, d), de tal modo que $c < a < b < d$.



Como mostra a figura, o traço indefinido a cheio corresponde a uma solução do problema.

Ora, dos triângulos semelhantes caA e $cx\varphi(x)$, tira-se

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{1} = \frac{\overline{cx}}{\overline{ca}} = \frac{\rho(x, R^1 - (c, d))}{\rho(x, R^1 - (c, d)) + \rho(x, [a, b])},$$

designando por $\rho(x, M)$ a distância[7] do ponto x ao conjunto M.

No caso de F e G, $F \subset G$, serem conjuntos de R^n,

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, R^n - G)}{\rho(x, R^n - G) + \rho(x, F)},$$

como se verifica imediatamente.

Passemos agora à demonstração da impossibilidade de (5). Tomemos um intervalo fechado K e escrevamos o seu interior como soma de uma infinidade numerável de intervalos fechados sem pontos interiores comuns:

$$i(K) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j \, .$$

Como $I_n = \sum_{j=1}^{n} K_j$, que é um conjunto fechado, está contido em $i(K)$, que é um conjunto aberto, podemos aplicar o teorema de Urysohn, construindo uma função $\psi_n \in \Psi$, tal que

$$\begin{array}{ll} \psi_n(x) = 1 & x \in I_n \\ \psi_n(x) = 0 & x \in R^n - i(K) \\ 0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant 1 & x \in i(K) - I_n \end{array}$$

Ora, introduzindo ψ_n em (5), vem

$$\psi_n(0) = \int_{i(K)} f(x)\, \psi_n(x)\, dx$$

$$= \int_{I_n} f(x)\, dx + \int_{i(K)-I_n} \psi_n(x)\, f(x)\, dx$$

visto $f(x)\,\psi_n(x)$ ser somável em $i(K)$ e coincidir com $f(x)$ em I_n.

Mas, como a medida-L de $i(K) - I_n$ tende para zero com[8] $\frac{1}{n}$, tem-se

$$\lim_n \psi_n(0) = \int_{i(K)} f(x)\, dx \, .$$

Agora, dois casos se podem apresentar: a origem, 0, pertence a $i(K)$; a origem, 0, é exterior a $i(K)$.

No primeiro caso, também pertence a I_n para n suficientemente grande e daí resulta que

$$1 = \int_{i(K)} f(x)\, dx \, ,$$

pois $\psi_n = 1$ para $x \in I_n$.

No segundo $0 \in R_n - i(K)$ e, portanto, $\psi_n(0) = 0$, donde

$$0 = \int_{i(K)} f(x)\, dx \, .$$

Obtidos estes resultados, tomemos um intervalo K que contenha a origem no interior e escolhamos depois os K_j de maneira que $0 \notin i(K_j)$, j qualquer, como é sempre possível.

Teremos, então,

$$1 = \int_{i(K)} (fx)\, dx = \sum_j \int_{K_j} f(x)\, dx =$$

$$= \sum_j \int_{i(K_j)} f(x)\, dx = 0 \, ,$$

e este absurdo mostra que não pode existir função $f(x)$ nas condições enunciadas[3].

(Continua)

NOTAS

[1] Função somável num conjunto é aquela, que tem integral-L finito nesse conjunto.

[2] O teorema de Urysohn é válido em espaços muito mais gerais (consultar, por exemplo P. Alexandroff und H. Hopf — *Topologie*, erster Band, pp. 73-78, Berlin, 1935).

[3] Dada uma forma linear contínua como é, por por exemplo, $A(\psi) = \psi(x)$, em que ψ é uma função contínua dum intervalo fixo $[a, b]$, e x um ponto determinado de $[a, b]$, Hadamard demonstrou que se pode sempre escrever $A(\psi) = \lim_n \int_a^b K_n(y)\, \psi(y)\, dy$, sendo $K_n(y)$ uma função contínua (consultar *C. R. Acad. Sc.* Paris, 9 de Fev.º 1903). Mais tarde F. Riesz, demonstrou que $A(\psi) = \int_a^b K(y)\, d\alpha(y)$, sendo $\alpha(y)$ uma função de variação total limitada (consultar *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **149**, p. 974).

(7) O ínfimo das distâncias de x aos pontos de M.

(8) ψ_n é não-negativa e não excede 1, portanto de valor inferior a um número independente de n.