mado «racionalismo hegeliano» é apenas um exemplo do abuso que se pode fazer de certos termos...).

Afinal, trata-se de duas tendências *complementares* da nossa mente, com supremacia duma ou de outra, conforme os indivíduos e conforme as circunstâncias. Do equilíbrio de ambas, da sua acção alternada e recíproca, resultará a fecundidade do pensamento.

Hoje, neste mundo atormentado em que tudo parece oscilar, assistimos à erupção do intuicionismo sob as mais variadas vestes: empirismo, pragmatismo, contingentismo, evolucionismo, historicismo, esteticismo, voluntarismo, surrealismo, existencialismo, etc., etc. (porque, neste campo, os «ismos» dividem-se e sub-dividem-se de maneira alucinante, repelindo-se mùtuamente). Até no âmbito de matemática — a cidadela da *razão racionante* — vemos introduzir-se o intuicionismo, com grande alarido, determinando a divisão entre matemáticos platónicos e matemáticos empiristas.

Mas entretanto, por obra de matemáticos — longe do bulício do mundo, serenamente, sem altas pretenções — tem-se vindo a desenvolver uma actividade filosófica que se liga directamente à tradição de Leibniz. Refiro-me à lógica matemática ou logística, cujos iniciadores principais foram Booie, Frege, Peano e que atinge a sua maioridade no obra monumental de Whitehead e Russell, «Principia Mathematica». A lógica matemática é, até certo ponto, a lógica formal de Aristóteles rejuvenescida e reabilitada; mas é muito mais do que isso, porque enriquecida com alguns séculos de experiência de análise algébrica e infinitesimal, que a tornam o mais poderoso instrumento até hoje conhecido para a análise do pensamento abstracto. Quando se instituiu o simbolismo algébrico, que põe a nu toda a mecânica dum certo tipo de raciocínio, surgiu a ideia de o generalizar, criando uma linguagem simbólica para o uso de toda a ciência. A ideia já se tinha de certo modo apresentado a Ramón Lull, místico catalão do século XIII, que a expôs na sua «Ars compendiosa inveniendi veritatem»; mais tarde, a mesma ideia tornou-se um dos motivos predilectos das meditações de Leibniz; mas os seus resultados não foram apreciáveis: estava-se ainda nos primórdios da álgebra. O sonho duma língua científica universal não se realizou como o concebera Leibniz — foi mesmo reconhecido impossível; mas que imensos, insuspeitados horizontes se nos abriram com a nova lógica! A princípio. os logísticos foram alvo de críticas sarcásticas, principalmente por parte de H. Poincaré. Houve, sem dúvida, exageros e ingenuidades que justificaram a troça; mas não esqueçamos, por outro lado, que Poincaré recebeu muito a influência de seu cunhado, Emílio Boutroux, o filósofo contigentista que precedeu imediatamente Bergson na estrada do intuicionismo. Hoje a lógica simbólica ri-se do anátema lançado pelo grande matemático e pensador, que já nas «Dernières Pensées» parece inclinado a abrandar a ironia. Certamente, a nova lógica tem um seu domínio limitado, e pretender sair dele será sempre pouco sensato. Mas, pelo menos no que se refere à matemática, a sua utilidade está hoje fora de dúvida: a sua intervenção em análise funcional, álgebra abstracta, etc. tornou-se fundamental. Um dos seus principais cultores, David Hilbert, foi um dos maiores matemáticos dos últimos tempos. A nova lógica oferece ao matemático uma férrea disciplina mental que o impede de cair em divagações como aquela do general atrás mencionado.

Mas nunca é demais repetir: a matemática não é tudo, está muito longe de ser tudo. O matemático deve sempre evitar o perigo da deformação profissional, que pode ser nociva para a própria actividade científica e já fazia dizer aos antigos: «mathematicus purus, purus asinus». Nas horas vagas, o seu espírito deve orientar-se para outros domínios: procurar na arte, na literatura, na filosofia, um equilíbrio que foi perturbado (sem cair num diletantismo dispersivo, outro perigo a evitar!). E ter presente o conselho de David Hume no seu ensaio sobre o intelecto humano:

«Sê um filósofo, mas, no meio de toda a tua filosofia, sê ainda e sempre um homem».

N. R. — Artigo publicado em *Ciência*, Revista dos Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, Ano III — N.º 3, Janeiro-Março de 1950.

Problèmes de dépouillements — II

Problèmes intéressant un nombre non limité de candidats

par Pierre Dufresne

Jusqu'ici nous n'avons étudié que des problèmes de dépouillements intéressant deux candidats. Nous passons maintenant à l'étude de deux problèmes concernant un nombre non limité de candidats.

Grâce à l'appui qui m'avait été donné par Mr Darmois et par M.r Dugué j'avais pu faire paraître l'énoncé du premier problème et une démonstration partielle dans le *Bulletin Mathématique des Facultés des Sciences et des Grandes Écoles* de Septembre-Octobre, 1938. La même revue publiait en Février 1939 sous la signature de M.r R. Lagrange une démonstration générale de la formule. C'est une nouvelle démonstration très différente que je donnerai ici. Le second problème est inédit.

Pour la résolution de ces problèmes j'utilise des relations mathématiques.

Relations Mathématiques

Première relation

Soit une droite et sur cette droite un certain nombre de points que nous désignerons par les lettres de

l'alphabet A, B, C, etc., le point le plus à gauche étant le point A, le point suivant le point B, etc.

Les segments $AB, AC, AD, BC, BD, CD \cdots$ etc. représentent des nombres entre lesquels existent des relations: $AC = AB + BC$, $AD = AB + BC + CD$, $BD = BC + CD \cdots$ etc.

Ces nombres sont supposés positifs et nous les désignerons indifféremment par AB ou par BA, par BC ou par $CB \cdots$ etc.

Nous aurons à considérer les produits des nombres désignés par des segments ayant une extrémité commune par exemple le produit $AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE \cdot AF$. Dans un but de simplification nous désignerons simplement par $AB \cdots AF$ le produit que nous venons d'écrire et d'une manière analogue les autres produits.

$KA \cdots KN$ désignera ainsi le produit $KA \cdot KB \cdot KC \cdots KN$ de tous les nombres représentés par des segments limités par le point K d'une part et d'autre part par un des points $A, B, C \cdots N$ (le point K étant exclu).

Nous désignerons par $a, b, c, d \cdots$ etc. les rangs respectifs des points $A, B, C, D \cdots$ etc. $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, etc.

Nous nous proposons de démontrer que:

$$\frac{1}{AB \cdots AN} - \frac{1}{BA \cdots BN} + \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

N désignant une lettre d'un rang quelconque.

Nous emploierons uns méthode de récurrence. La relation est exacte dans le cas de deux nombres. En effet elle s'écrit alors $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BA} = 0$ ou $AB = BA$.

Elle est encore exacte dans le cas de trois nombres. Elle s'écrit alors

$$\frac{1}{AB \cdot AC} - \frac{1}{BA \cdot BC} + \frac{1}{CA \cdot CB} = 0$$

$$\text{ou } AC = AB + BC$$

Nous disons qu'elle est exacte dans le cas de n nombres si elle est exacte dans le cas de m nombres $(n = m + 1)$.

Remarquons tout d'abord que

$$\frac{1}{AB \cdots AN} = \frac{1}{AN} \cdot \frac{1}{AB \cdots AM}$$

$$\frac{1}{BA \cdots BN} = \frac{1}{AN} \left[\frac{AB}{BA \cdots BN} + \frac{BN}{BA \cdots BN} \right] = \frac{1}{AN} \left[\frac{1}{BC \cdots BN} + \frac{1}{BA \cdots BM} \right]$$

$$\frac{1}{CA \cdots CN} = \frac{1}{AN} \left[\frac{AC}{CA \cdots CN} + \frac{CN}{CA \cdots CN} \right] = \frac{1}{AN} \left[\frac{1}{CB \cdots CN} + \frac{1}{CA \cdots CM} \right]$$

$$\frac{1}{KA \cdots KN} = \frac{1}{AN} \left[\frac{AK}{KA \cdots KN} + \frac{KN}{KA \cdots KN} \right] = \frac{1}{AN} \left[\frac{1}{KB \cdots KN} + \frac{1}{KA \cdots KM} \right]$$

$$\frac{1}{NA \cdots NM} = \frac{1}{AN} \frac{1}{NB \cdots NM}$$

D'où il résulte que:

$$\frac{1}{AB \cdots AN} - \frac{1}{BA \cdots BN} + \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NA \cdots NM} =$$

$$= \frac{1}{AN} \left[\frac{1}{AB \cdots AM} - \frac{1}{BA \cdots BM} + \frac{1}{CA \cdots CM} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KM} + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{1}{MA \cdots ML} \right] + \frac{1}{AN} \left[-\frac{1}{BC \cdots BN} + \frac{1}{CB \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KB \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NB \cdots NM} \right]$$

et si les deux suites entre parenthèses sont nulles la première l'est également, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I

L'égalité
$$\frac{1}{AB \cdots AN} - \frac{1}{BA \cdots BN} + \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

obtenue en supposant que AB, AC, $BA \cdots$ etc. sont des nombres arithmétiques s'écrirait en les considérant comme des nombres algébriques, c'est à dire en posant $BA = -AB$, etc.

$$\frac{1}{AB \cdots AN} + \frac{1}{BA \cdots BN} + \cdots + \frac{1}{KA \cdots KN} + \\ + \cdots + \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

En effet le dénominateur du k.ème terme: $KA \cdot KB \cdots KN$ est le produit de $(k-1)$ nombres négatifs à savoir KA, $KB \cdots KJ$ et de $(n-k)$ nombres positifs $KL, \cdots KN$.

Remarque II

L'égalité
$$\frac{1}{AB \cdot AC \cdot AD} - \frac{1}{BA \cdot BC \cdot BD} + \\ + \frac{1}{CA \cdot CB \cdot CD} - \frac{1}{DA \cdot DB \cdot DC} = 0$$

peut s'écrire:

$$AB \cdot AC \cdot BC - AB \cdot AD \cdot BD + AC \cdot AD \cdot CD - \\ - BC \cdot BD \cdot CD = 0$$

$AB \cdot AC \cdot BC =$ Produit de tous les arrangements possibles de trois lettres A, B, C prises 2 à 2
$AB \cdot AD \cdot BD =$ idem A, B, D » » » »
$AC \cdot AD \cdot CD =$ idem A, C, D » » » »
$BC, BD, CD =$ idem B, C, D » » » »

on établira de même que:

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD - \\ - AB \cdot AC \cdot AE \cdot BC \cdot BE \cdot CE + \\ + AB \cdot AD \cdot AE \cdot BD \cdot BE \cdot CE - \\ - AC \cdot AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE \cdot DE + \\ + BC \cdot BD \cdot BE \cdot CD \cdot CE \cdot DE = 0$$

$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD$ étant le produit de tous les arrangements possibles des quatre lettres A, B, C, D prises 2 à 2
$AB \cdot AC \cdot AE \cdot BC \cdot BE \cdot CE$, idem, idem, A, B, C, E prises 2 à 2
$AB \cdot AD \cdot AE \cdot BD \cdot BE \cdot DE$, idem, idem, A, B, D, E prises 2 à 2
$AC \cdot AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE \cdot DE$, idem, idem, A, C, D, E prises 2 à 2
$BC \cdot BD \cdot BE \cdot CD \cdot CE \cdot DE$, idem, idem, A, B, C, D prises 2 à 2

Deuxième relation

ψ étant un point situé au delà de N je me propose de démontrer que

$$\frac{A\psi}{AB \cdots AN} - \frac{B\psi}{BA \cdots BN} + \frac{C\psi}{CA \cdots CN} - \cdots + \\ + (-1)^{k+1} \frac{K\psi}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{N\psi}{NA \ldots NM} = 0$$

Remarquons que l'égalité

$$\frac{1}{AB \cdots AM} - \frac{1}{BA \cdots BM} + \frac{1}{CA \cdots CM} - \cdots + \\ + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KM} + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{1}{MA \cdots ML} = 0$$

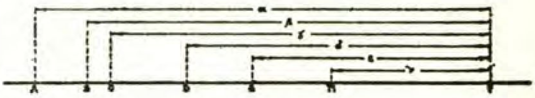
peut s'écrire de la façon suivante:

$$(1) \qquad AN \frac{1}{AB \cdots AN} - BN \frac{1}{BA \cdots BN} + \\ + CN \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} KN \frac{1}{KA \cdots KN} + \\ + \cdots + (-1)^{m+1} MN \frac{1}{MA \cdots MN} = 0$$

d'autre part

$$(2) \qquad N\psi \frac{1}{AB \cdots AN} - N\psi \frac{1}{BA \cdots BN} + \\ + N\psi \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} N\psi \frac{1}{KA \cdots KN} + \\ + \cdots + (-1)^{m+1} N\psi \frac{1}{MA \cdots MN} + \\ + (-1)^{n+1} N\psi \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

et en additionnant membre à membre ces deux égalités (1) et (2) on obtient l'égalité cherchée.



Si l'on pose $A\psi = \alpha$, $B\psi = \beta$, $C\psi = \gamma, \cdots$ $N\psi = \nu$ c'est à dire $AB = BA = (\alpha - \beta)$ $AC = CA = (\alpha - \gamma)$ $AD = DA = (\alpha - \delta) \cdots$ etc, l'égalité s'écrit

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta) \cdots (\alpha-\nu)} - \frac{\beta}{(\beta-\alpha) \cdots (\beta-\nu)} + \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha) \cdots (\gamma-\nu)} + \\ + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{k}{(k-\alpha) \cdots (k-\nu)} + \\ + \cdots (-1)^{n+1} \frac{\nu}{(\nu-\alpha) \cdots (\nu-\mu)} = 0$$

À noter que cette équation par ailleurs absolument générale est inexacte lorsque le premier membre se réduit à deux termes; la différence $\frac{A\psi}{AB} - \frac{B\psi}{BA}$ qui s'écrit aussi $\frac{\alpha}{AB} - \frac{\beta}{BA}$ n'est nulle que dans le cas limite où les deux points A et B sont confondus.

Remarque I.

Considérons maintenant $AB, AC, BA, \cdots$ etc. comme des nombres algébriques et appelons ψ un point situé n'importe où sur la droite c'est à dire aussi bien à gauche du point A qu'entre le point A et le point N ou au delà du point N.

Je me propose de démontrer que:

$$\frac{A\psi}{AB\cdots AN}+\frac{B\psi}{BA\cdots BN}+\frac{C\psi}{CA\cdots CN}+\cdots+$$
$$+\frac{K\psi}{KA\cdots KN}+\cdots+\frac{N\psi}{NA\cdots NM}=0$$

Remarquons que l'égalité

$$\frac{1}{AB\cdots AM}+\frac{1}{BA\cdots BM}+\frac{1}{CA\cdots CM}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{KA\cdots KM}+\cdots+\frac{1}{MA\cdots ML}=0$$

peut s'écrire de la façon suivante:

$$AN\frac{1}{AB\cdots AN}+BN\frac{1}{BA\cdots BN}CN\frac{1}{CA\cdots CN}+$$
$$+\cdots+KN\frac{1}{KA\cdots KN}+\cdots+MN\frac{1}{MA\cdots MN}=0$$

d'autre part

$$N\psi\frac{1}{AB\cdots AN}+N\psi\frac{1}{BA\cdots BN}+N\psi\frac{1}{CA\cdots CN}+$$
$$+\cdots+N\psi\frac{1}{KA\cdots KN}+\cdots+N\psi\frac{1}{MA\cdots MN}+$$
$$+N\psi\frac{1}{NA\cdots NM}=0$$

et en additionnant membre à membre ces deux égalités on obtient l'égalité cherchée.

Si l'on pose $A\psi=\alpha$, $B\psi=\beta$, $C\psi=\gamma\cdots N\psi=\nu$ c'est à dire $AB=\alpha-\beta$, $AC=\alpha-\gamma$, $BA=\beta-\alpha$, $CA=\gamma-\alpha\cdots$ etc. l'équation devient:

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\nu)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)\cdots(\beta-\nu)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)\cdots(\gamma-\nu)}+$$
$$+\cdots+\frac{k}{(k-\alpha)\cdots(k-\nu)}+\cdots+\frac{\nu}{(\nu-\alpha)\cdots(\nu-\mu)}=0$$

Exemple

$AB=3 \quad BC=2 \quad A\psi=2$ ou

$\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=-3,\ (\alpha-\beta)=3,\ (\alpha-\gamma)=5,\ (\beta-\gamma)=2$

l'équation

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0$$

devient: $$\frac{2}{15}+\frac{1}{6}-\frac{3}{10}=0$$

Premier Problème.

On supose qu'au cours d'une élection des candidats $A, B, C, D\cdots M, N$ aient obtenu des nombres respectifs de suffrages $a, b, c, d, \cdots m, n$.

Je désignerai par:

$\theta=a+b+c+d+\cdots+m+n$ le nombre total des bullettins déposés au nom de l'un quelconque des candidats $A, B, C, D \ldots M, N$, et par

$N_{(a,b,c,d\ldots m,n)}$ le nombre de tous les dépouillements différents possibles de ces θ bulletins.

$$N_{(a,b,c,d\ldots m,n)}=\frac{\theta!}{a!\,b!\,c!\,d!\cdots m!\,n!}$$

Il s'agit de calculer *la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins comptés portant le nom de* A *soit constamment supérieur à celui des bulletins dépouillés portant le nom de* B, *le nombre des bulletins portant le nom de* B *constamment supérieur à celui des bulletins portant le nom de* C ··· *le nombre des buletins dépouillés portant le nom de M constamment supérieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* N.

Il est clair que le premier bulletin sorti devra être un bulletin A, à ce moment le nombre des bulletins déposés au nom de B, sera obligatoirement nul et ne pourra donc être supérieur au nombre des bulletins portant le nom de C qui lui même ··· quand nous disons que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins sortis portant le nom de B devra être supérieur au nombre des bulletins sortis portant le nom de C nos voulons exprimer d'abord qu'aucun bulletin au nom de C ne devra être dépouillé avant qu'un bulletin au nom de B ne l'ait été, ensuite qu'à partir du moment ou un bulletin au nom de B aura été effectivement dépouillé le nombre des bulletins qui seront comptés au nom de ce candidat sera toujours supérieur au nombre de ceux qui seront comptés au nom du candidat C.

Je désignerai par:

$$P_{(a,b,c,d\ldots m,n)\,[A>B>C>D>\ldots>M>N]}$$

la probabilité cherchée, et par

$$N_{(a,b,c,d\ldots m,n)\,[A>B>C>D\ldots>M>N]}$$

le nombre des dépouillements différents possibles des θ bulletins, qui vérifient les conditions énoncées.

Donc:

$$P_{(a,b,c,d\ldots m,n)\,[A>B>C>D\ldots>M>N]}=$$
$$=\frac{N_{(a,b,c,d\ldots m,n)\,[A>B>C>D\ldots>M>N]}}{N_{(a,b,c,d\ldots m,n)}}.$$

LEMME. *Si* $a > b > c > \cdots > m > n$

$$
\begin{aligned}
& N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] = \\
& = N_{(a-1,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] + \\
& + N_{(a,b-1,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] + \\
& + N_{(a,b,c-1,\ldots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] + \\
& + \cdots \\
& + N_{(a,b,c,\cdots(m-1),n)}[A>B>C\cdots>M>N] + \\
& + N_{(a,b,c,\cdots m,n-1)}[A>B>C\cdots>M>N] \cdot
\end{aligned}
$$

Démonstration analogue à celle du lemme page 3 (*Gaz. Mat.* n.os 44-45).

THÉORÈME. *Si* $a \geqslant b \geqslant c \geqslant \cdots \geqslant m \geqslant n$ *et* $m \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
& N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] = \\
& = \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-m}{a+m}\cdot\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{b-d}{b+d}\cdots \\
& \cdots\frac{b-m}{b+m}\cdot\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}\cdot \\
& \cdot\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}\,.
\end{aligned}
$$

Si $a<b$, ou $b<c$, ou $c<d\cdots$ ou $m<n$ il est clair que $N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N]=0$. La formule conduirait à des résultats pouvant être négatifs et toujours absurdes.

Si $a=b$, ou $b=c$, ou $c=d,\cdots$ ou $m=n$, il est encore clair que $N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N]=0$ mais la formule donne effectivement un résultat nul.

Je passe maintenant à la démonstration générale. J'utiliserai une méthode de récurrence. Je constate que la formule est exacte pour les plus petites valeurs de θ: par exemple pour $\theta=3$ c'est à dire pour $a=3$ et $b=0$ d'une part et d'autre part pour $a=2$, $b=1$, $c=0$. Je me propose de prouver que la formule est encore exacte pour une valeur quelconque θ_1 de θ et pour tous les ensembles possibles de valeurs de $a,b,c,\cdots m,n$ répondant aux conditions $a>b>c\cdots>m>n$ si elle est exacte pour $\theta=\theta_1-1$ et pour tous les ensembles possibles de valeurs de $a,b,c,\cdots m,n$ répondant aux conditions $a\geqslant b\geqslant c\geqslant\cdots\geqslant m\geqslant n$.

En vertu du lemme j'ai le droit d'écrire

$$
\begin{aligned}
& N_{(a,b,c\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] = \\
& = N_{(a-1),b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] + \\
& + N_{(a,b-1,c,\ldots m,n)}[A>B>C\ldots>M>N] + \\
& + N_{(a,b,c-1,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] + \\
& + \cdots \\
& + N_{(a,b,c,\cdots m-1,n)}[A>B>C\cdots>M>N] + \\
& + N_{(a,b,c,\cdots m,n-1)}[A>B>C>\cdots>M>N] \cdot
\end{aligned}
$$

Et en supposant le théorème exact pour $\theta=\theta_1-1$

$$
\begin{aligned}
& N_{(a,b,c\ldots m,n)}[A>B>C>\ldots>M>N] = \\
& \left[\frac{a-b-1}{a+b-1}\cdot\frac{a-c-1}{a+c-1}\cdots\frac{a-n-1}{a+n-1}\cdot\frac{b-c}{b+c}\,\frac{b-d}{b+d}\cdots\right. \\
& \quad \cdots\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots \\
& \quad \left.\cdots\frac{m-n}{m+u}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{(a-1)!\,b!\,c!\cdots m!\,n!} + \\
& + \left[\frac{a-b+1}{a+b-1}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdots\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c-1}{b+c-1}\cdot\frac{b-d-1}{b+d-1}\cdots\right. \\
& \quad \cdots\frac{b-n-1}{b+n-1}\,\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots \\
& \quad \left.\cdots\frac{m-n}{m+n}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{a!\,(b-1)!\,c!\cdots m!\,n!} + \\
& + \left[\frac{a-b}{a+b}\,\frac{a-c+1}{a+c-1}\cdots\frac{a-n}{a+n}\,\frac{b-c+1}{b+c-1}\,\frac{b-d}{b+d}\cdots\right. \\
& \quad \cdots\frac{b-n}{b+n}\,\frac{c-d-1}{c+d-1}\cdots\frac{c-n-1}{c+n}\cdots \\
& \quad \left.\cdots\frac{m-n}{m+n}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{a!\,b!\,(c-1)!\cdots m!\,n!} + \\
& + \cdots \\
& + \left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdots\frac{a-m+1}{a+m-1}\cdot\frac{a-n}{a+n}\,\frac{b-c}{b+c}\cdots\right. \\
& \quad \cdots\frac{b-m+1}{b+m-1}\,\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-m+1}{c+m-1}\,\frac{c-n}{c+n}\cdots \\
& \quad \left.\cdots\frac{m-n-1}{m+n-1}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{a!\,b!\,c!\cdots(m-1)!\,n!} + \\
& + \left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdots\frac{a-n+1}{a+n-1}\,\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{b-d}{b+d}\cdots\right. \\
& \quad \cdots\frac{b-n+1}{b+n-1}\,\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n+1}{c+n}\cdots \\
& \quad \left.\cdots\frac{m-n+1}{m+n-1}\right]\frac{(a+b+c\ \ \cdots+n-1)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,(n-1)!}
\end{aligned}
$$

Nous allons chercher à simplifier cette somme. Nous constatons d'abord que:

$$\frac{a-b-1}{a+b-1} = \frac{a-b}{a+b}\left(1-\frac{2b}{(a-b)\,(a+b-1)}\right)$$

et de même que

$$\frac{a-c-1}{a+c-1} = \frac{a-c}{a+c}\left(1-\frac{2c}{(a-c)\,(a+c-1)}\right) \qquad \text{etc.}$$

Nous constatons également que

$$\frac{a-b+1}{a+b-1} = \frac{a-b}{a+b}\left(1+\frac{2a}{(a-b)\,(a+b-1)}\right)$$

et de même que

$$\frac{a-c+1}{a+c-1}=\frac{a-c}{a+c}\left(1+\frac{2a}{(a-c)\,(a+c-1)}\right)\qquad \text{etc.}$$

D'autre part nous posons:

$$\begin{aligned}(a-b)\,(a+b-1)&=AB\\(a-c)\,(a+c-1)&=AC\\(b-c)\,(b+c-1)&=BC\\(a-d)\,(a+d-1)&=AD\\(b-d)\,(b+d-1)&=BD\\&\cdots\text{etc.}\end{aligned}$$

enfin nous apellons Φ le produit

$$\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-m}{a+m}\cdot\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{b-d}{b+d}\cdots$$
$$\cdots\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}\cdot$$
$$\cdot\frac{(a+b+c+\cdots+m+n-1)\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!\cdots m\,!\,n\,!}\cdot$$

Finalement nous obtenons:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c\,,\,\cdots\,m\,,\,n)\,[A>B>C\cdots>M>N]}$$
$$=\Bigg[\left(1-\frac{2b}{AB}\right)\left(1-\frac{2c}{AC}\right)\left(1-\frac{2d}{AD}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{2m}{AM}\right)\left(1-\frac{2n}{AN}\right)a+$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AB}\right)\left(1-\frac{2c}{BC}\right)\left(1-\frac{2d}{BD}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{2m}{BM}\right)\left(1-\frac{2n}{BN}\right)b+$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AC}\right)\left(1+\frac{2b}{BC}\right)\left(1-\frac{2d}{CD}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{2m}{CM}\right)\left(1-\frac{2n}{CN}\right)c+$$
$$+\cdots$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AM}\right)\left(1+\frac{2b}{BM}\right)\left(1+\frac{2c}{CM}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1+\frac{2l}{LM}\right)\left(1-\frac{2n}{MN}\right)m+$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AN}\right)\left(1+\frac{2b}{BN}\right)\left(1+\frac{2c}{CN}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1+\frac{2l}{LN}\right)\left(1+\frac{2m}{MN}\right)n\Bigg]\Phi\,.$$

Il est facile de démontrer qu'il existe entre les quantités $AB\,,\,AC\,,\,BC\,,\,BD\,,\,CD\,,\,AD\cdots$ etc. les relations $AC=AB+BC$, $AD=BC+CD$, $AD=AB+$ $+BC+CD\cdots$ etc. il suffit pour cela de vérifier la première relation dont l'exactitude prouve l'exactitude de toutes les autres.

Or l'équation $AC=AB+BC$ exprime que:

$$(a+c-1)\,(a-c)=(b-c)\,(b+c-1)+(a-b)\,(a+b-1)$$

ou que

$$[(a-b)+(b-c)](a+c-1)=(b-c)\,(b+c-1)+$$
$$+(a-b)(a+b-1)$$

ou que

$$(b-c)(a+c-1-b-c+1)=(a-b)\,(a+b-1-a-c+1)$$

ou que

$$(b-c)(a-b)=(a-b)(b-c)\,.$$

Cette remarque étant faite nous constatons que nous pouvons écrire encore:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c\,,\,\cdots\,m\,,\,n)\,[A>B>C>\,\cdots\,>M>N]}$$
$$=\Bigg[(a+b+c+\cdots+m+n)+2\,ab\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{AB}\right)+$$
$$+2\,ac\left(\frac{1}{AC}-\frac{1}{AC}\right)+\cdots+2\,an\left(\frac{1}{AN}-\frac{1}{AN}\right)+$$
$$+2\,bc\left(\frac{1}{BC}-\frac{1}{BC}\right)+\cdots+2\,bn\left(\frac{1}{BN}-\frac{1}{BN}\right)+$$
$$+2\,cd\left(\frac{1}{CD}-\frac{1}{CD}\right)+\cdots+2\,cn\left(\frac{1}{CN}-\frac{1}{CN}\right)+$$
$$+\cdots+2\,mn\left(\frac{1}{MN}-\frac{1}{MN}\right)+$$
$$+4\,a\,bc\left(\frac{1}{AB\cdot AC}-\frac{1}{AB\cdot BC}+\frac{1}{AC\cdot BC}\right)+$$
$$+4ab\,d\left(\frac{1}{AB\cdot AD}-\frac{1}{AB\cdot BD}+\frac{1}{AD\cdot DB}\right)+\cdots+$$
$$+4ab\,n\left(\frac{1}{AB\cdot AN}-\frac{1}{AB\cdot BN}+\frac{1}{AN\cdot NB}\right)+\cdots+$$
$$+4\,lm\,n\left(\frac{1}{LM\cdot LN}-\frac{1}{LM\cdot MN}+\frac{1}{LN\cdot NM}\right)+$$
$$+8ab\,cd\left(-\frac{1}{AB\cdot AC\cdot AD}+\frac{1}{AB\cdot BC\cdot BD}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{AC\cdot BC\cdot CD}+\frac{1}{AD\cdot BD\cdot CD}\right)+\cdots+$$
$$+8kl\,mn\left(-\frac{1}{KL\cdot KM\cdot KN}+\frac{1}{KL\cdot LM\cdot LN}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{KM\cdot LM\cdot MN}+\frac{1}{KN\cdot LN\cdot MN}\right)+\cdots+$$
$$+(-1)^n\,2^n\,ab\,c\cdots mn\left(\frac{1}{AB\cdot AC\cdots AN}-\right.$$
$$-\frac{1}{AB\cdot BC\cdots BN}+\frac{1}{AC\cdot BC\cdots CN}-\cdots$$
$$\left.+(-1)^n_1\frac{1}{AN\cdot BN\cdots CN}\right)\Bigg]\Phi$$

et comme toutes les quantités entre parenthèses s'annulent sauf la première

$$N_{(a,\,b,\,c,\,\cdots\,m,\,n)\,[A>B>C\cdots>M>N]} =$$
$$=(a+b+c+\cdots+m+n)\,\Phi=$$
$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdots\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdot\frac{d-c}{d+c}\cdot\frac{d-n}{d+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}\right)\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME. *Si* $a \geqslant b \geqslant c \cdots \geqslant m \geqslant n$

$$P_{(a,\,b,\,c,\,\cdots\,m,\,n)\,[A>B>C>\cdots>M>N]}=\frac{a-b}{a+b}\cdot$$
$$\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-m}{a+m}\cdot\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\,\frac{b-d}{b+d}\cdots$$
$$\cdots\frac{b-m}{b+m}\,\frac{b-n}{b+n}\,\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}.$$

(continua)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE A TEORIA DAS FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIAVEIS COMPLEXAS

Em 7 de Setembro do corrente teve lugar este colóquio na Universidade de Harvard em Cambridge, Mass, U. S. A.. Foram as seguintes as comunicações apresentadas:

A. Zygmund, Univ. de Chicago — *On the existence of boundary values of functions of several complex variables.*

H. Behnke, Univ. de Münster — *Der Rungesche Satz in der Funktionentheorie einer und mehrerer Veränderlichen.*

S. Bergman, Univ. de Harvard, e M Schiffer, Univ. Hebraica, Jerusalem — *The method of class extension in the theory of functions of several complex variables.*

H. Hopf, Escola Politécnica Federal Suiça, Zürich — *Some remarks on abstract and concrete 4-dimensional Riemann surfaces.*

M. P. Lelong, Univ. de Paris e de Lille — *On the complex singularities of harmonic functions.*

K. Kodaira, Institute for Advanced Study, Princeton. — *On a method of construction of meromorphic functions on compact analytic manifolds.*

G. Springer, Instituto de Tecnologia de Massachussets — *On orthogonalization over the distinguished boundary surface and the corresponding kernel function.*

R. Godement, Univ. de Nancy — *Two problems in group representations connected with complex variables.*

P. R. Garabedian, Univ. de Stanford — *Generalized Laplace equations associated with the kernel function.*

K. Stein, Univ. de Münster — *Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen meherer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellen.*

G. Julia, Univ. de Paris — *Sur les familles de fonctions de plusieurs variables.*

F. Severi, Univ. de Roma — *Un théorème d'unicité, sur la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables qui attend le théorème d'existence associé.*

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

As reuniões do congresso tiveram lugar em Lisboa de 23 a 29 de Outubro, no Instituto Superior Técnico. Ao que já dissemos nos n.os anteriores da nossa revista, relativamente à 1.a secção — Ciências Matemáticas, devemos acrescentar que o discurso inaugural da secção deveria ser pronunciado pelo Prof. Julio Rey Pastor de Buenos Aires que era o Vice-Presidente espanhol da secção. Devido à sua não comparência no Congresso o discurso foi lido pelo Prof. Júlio Palácios, professor da Faculdade de Ciências de Lisboa e director do Centro de Estudos de Física do Instituto para a Alta Cultura.

A Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências publicou um volume de 248 páginas com os resumos das comunicações apresentadas e que foi distribuido aos congressistas. Destas comunicações transcrevemos textualmente os títulos das comunicações enviadas:

1. Victor das Neves — *Solução dos problemas: Trisecção do ângulo. Rectificação da circuuferência. Quadratura do círculo.*

2. Manuel dos Reis — *Sobre fórmulas assintóticas conjecturais relativas a números primos.*

3. António Almeida Costa — *Sobre os nilideais e os ideais quase regulares.*