4. M. T. Antunes — *Os sismógrafos electromagnéticos e o registo conforme dos movimentos do solo.*

5. José Sebastião e Silva — *Sobre a topologia dos espaços funcionais analíticos.*

6. José Ribeiro de Albuquerque — *O teorema de «Baire» sobre os conjuntos.*

7. José Ribeiro de Albuquerque — *A função «aderência» e seus invariantes.*

8. Gustavo de Castro — *Sobre a comparação das variâncias de dois universos normais.*

9. Gustavo de Castro — *Sobre um problema de Fisher.*

10. L. A. Santaló — *Observaciones sobre superficies y poliedrales inscritas.*

11. Arechaga e L. de Letona — *Dos teoremas sobre determinación del número de cifras de un producto ô cociente.*

12. Mischa Cotlar e R. A. Ricabarra — *Sobre la teoria de la integración.*

13. Mariano Fernández Bollo — *La transparência elastica de algunas rocas de la Peninsula Ibérica.*

14. Y. Frenkel e M. Cotlar — *Mayorantes de Perrón — Denjoy no aditivos.*

15. E. Pajares — *Sobre una curva transcendente deducida de un problema de física.*

16. P. Pi Calleja — *Sobre determinación de singularidades de la série Taylor mediante el argumento de sus coeficientes.*

17. Julio Rey Pastor — *La matemática abstracta del siglo XX.*

18. Clements Saénz Garcia — *Notas geométricas acerca de números pitagóricos.*

19. Ramón Vital de Artaza — *Critica de los actuales métodos de cálculo de las bóvedas cilindricas delgadas.*

20. Renato Pereira Coelho — *Um critério de continuidade.*

As comunicações n.^{os} 4, 13 e 19 devem ter sido incluidas nesta secção certamente por engano dos organizadores do volume com os resumos das comunicações, visto os títulos corresponderem a matéria de outras secções do congresso. Não foram por isso discutidas na Secção de Matemática. A Mesa desta Secção também retirou a comunicação n.º 1, que de resto não tinha sido transmitida ao Congresso por intermédio da Sociedade Portuguesa de Matemática.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Ensino liceal — Exames do 3.º ciclo — 1950.

3132 — Decomponha em factores o polinómio $3x^3+8x^2+3x-2$, sabendo que -1 é um zero desse polinómio. R: *Como* -1 *é um zero do polinómio este é divizível por* $x+1$ *e será* $3x^3+8x^2+3x-2=(x+1)\times(3x^2+5x-2)$ *como facilmente se reconhece. Os zeros de* $3x^2+5x-2$ *são* $x_1=-2$ *e* $x_2=1/3$. *Então é:* $3x^3+8x^2+3x-2=3\cdot(x+1)(x+2)(x-1/3)$.

3133 — Derive em ordem a x a função

$$y=\operatorname{sen}[(x^2+1)/(x^2-1)].$$

R: $y'=[-4x/(x^2-1)^2]\,x\cos[x^2+1)/(x^2-1)]$.

3134 — Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta $3y-x=1$ com a circunferência de centro $C(1,-1)$ e raio igual a $\sqrt{5}$. R: *A equação da circunferência referida é* $(x-1)^2+(y+1)^2=5$ *e as coordenadas dos pontos pedidos são as soluções do sistema formado pela equação da recta e da circunferência. Então como* $x=3y-1$ *vem* $(3y-2)^2+(y+1)^2=5$ *ou* $10y^2-10y=0$ *donde* $y_1=0$ *e* $y_2=1$, *valores que substituidos na equação da recta dão* $x_1=-1$ *e* $x_2=2$. *Logo os pontos pedidos são:* $(-1,0)$ *e* $(2,1)$.

3135 — Empregando uma fórmula de transformação logarítmica, determine o valor de $f(15^0)$, dado por:

$$f(x)=\operatorname{sen}(90^0-x)+\operatorname{sen}x$$

R: *Teremos de calcular então* $\operatorname{sen}75^0+\operatorname{sen}15^0$ *e como* $\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}(A+B)/2\cdot\cos(A-B)/2$ *será* $f(15^0)=2\cdot\operatorname{sen}(75^0+15^0)/2\cdot\cos(75^0-15^0)/2=2\operatorname{sen}45^0\times\cos30^0=2\cdot\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2=\sqrt{6}/2$.

3136 — Os ponteiros do relógio duma torre medem, respectivamente 85 cm e 1,25 m. Calcule a distancia entre os extremos dos ponteiros desse relógio às 4 horas. (Empregue logaritmos). R: *Se for* $a=125$ *e* $b=85$ *o comprimento dos ponteiros, que às 4 horas formam entre si um ângulo de* 120^0, *as fórmulas que resolvem o problema são:* $\operatorname{tg}(A-B)/2=[(a-b):(a+b)]\cdot\operatorname{cotg}60^0$ *e a distância entre as extremidades dos ponteiros* $c=[(a+b)\operatorname{sen}60^0]:\cos(A-B)/2$. *Daqui resulta* $\log\operatorname{tg}(A-B)/2=\log4+\log\operatorname{cotg}60^0+\operatorname{colg}21=0,60206+\overline{2},67778+\overline{1},76144=\overline{1},04128$ *donde* $(A-B)/2=6^0\,16'\,33'$.

Finalmente $\log c=\log(a+b)+\log\operatorname{sen}60^0+\operatorname{colg}\cos(A-B)/2=2,32222+\overline{1},93753+0,00261=2,26236$ *e daqui* $c=183$ cm.

3137 — Um número de 3 algarismos significativos diminue de 72 unidades se trocar entre si os algarismos das dezenas e das unidades. Se trocar os algarismos das centenas e das dezenas, o número aumenta de 270 unidades. Determine esse número. R: *Seja* $a\cdot10^2+b\cdot10+c$ *o número. Então pelo enunciado é*

$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 72 + a \cdot 10^2 + c \cdot 10 + b$ *e* $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c + 270 = b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + c$. *Da primeira tira-se* $9b - 9c = 72$ *ou* $b - c = 8$ *e da segunda* $b - a = 3$. *Os valores possíveis de* b *são então* 9 *e* 8. *No primeiro caso* $c = 1$ *e* $a = 6$ *e o número é* 691. *No segundo caso* $c = 0$ $a = 5$ *e o número é* 580.

Soluções dos n.os 3132 a 3137 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1950 — Ponto n.º 3.

3138 — Demonstrar que quaisquer que sejam os inteiros a e b, $(a+b)^7 - (a^7+b^7)$ é sempre divisível por 7. R: $(a+b)^7 - (a^7+b^7) = 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 = \dot{7}$, *visto,* 21 *e* 35 *serem múltiplos de* 7 *e* a *e* b *inteiros.*

3139 — Demonstrar que $n^5 - n$, onde n é inteiro qualquer, é sempre divisível por 30. R: *Note-se que* $n^5 - n = (n-1)\,n\,(n+1)\,(n^2+1)$ *e* $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. *Como* $n-1$, n *e* $n+1$ *são três inteiros consecutivos um deles é múltiplo de* 3 *e pelo menos um é par. Um dos* 4 *factores em que* $n^5 - n$ *se decompõe é também múltiplo de* 5. *Com efeito: ou* $n = \dot{5}$; *ou* $n = \dot{5} + 1$ *e* $n - 1 = \dot{5}$; *ou* $n = \dot{5} + 2$ *e* $n^2 + 1 = \dot{5}$; *ou* $n = \dot{5} + 3$ *e* $n^2 + 1 = \dot{5}$; *ou* $n = \dot{5} + 4$ *e* $n + 1 = \dot{5}$.

3140 — Demonstrar que $3^{2n+2} - 8n - 9$, onde n é qualquer inteiro positivo, é sempre divisível por 64. [*N. B.*—Escrevendo $f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ calcular $f(1)$, formar a diferença $f(n+1) - 9f(n)$ e proceder por indução completa]. R: $f(1) = 3^4 - 8 - 9 = 64$

$$f(n+1) - 9\,f(n) =$$
$$3^{2n+4} - 8n - 17 - 3^{2n+4} + 72n + 81 = 64n + 64 = \dot{64}.$$

Tem-se pois $f(n+1) = 9\,f(n) + 64$ *e a hipótese* $f(n) = \dot{64}$ *arrasta* $f(n+1) = \dot{64}$, *c. q. p.*

3141 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\dfrac{7843}{37 \times 59}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 37 e 59 respectivamente. R: *Há que determinar* x *e* y *inteiros e positivos tais que*

$$\frac{7843}{37 \cdot 59} = \frac{x}{37} + \frac{y}{59} \quad ou \quad 59x + 37y = 7843.$$

As soluções inteiras e positivas desta equação de Diofanto são: $x_1 = 5$, $y_1 = 204$; $x_2 = 42$, $y_2 = 145$; $x_3 = 79$, $y_3 = 86$; *e* $x_4 = 116$, $y_4 = 27$.

3142 — Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento de $(1 + x^2/5)^7\,(1 + 2x/5)^n$ (n inteiro positivo) segundo potências crescentes de x, mostrar que há dois valores de n para os quais os coeficientes daqueles três termos estão em progressão aritmética e calcular esses dois valores. R:

$$\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^7 \cdot \left(1 + \frac{2x}{5}\right)^n = \left(1 + \frac{7}{5}x^2 + \frac{21}{25}x^4 + \cdots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \frac{2n}{5}x + \frac{4n(n-1)}{25 \cdot 2}x^2 + \cdots\right) =$$
$$= 1 + \frac{2n}{5}x + \left(\frac{7}{5} + \frac{2n(n-1)}{25}\right)x^2 + \cdots$$

Se os coeficientes destes 3 *termos estiverem em progressão aritmética ter-se-à:*

$$\frac{2n}{5} - 1 = \frac{7}{5} + \frac{2n(n-1)}{25} - \frac{2n}{5} \quad ou$$
$$n^2 - 11n + 30 = 0.$$

Esta equação admite as raizes 5 *e* 6, *inteiros e positivos, c. q. p.*

3143 — Para que valores de m tem a equação $x^2 - x - 5 = m(4x - 5m)$ raizes reais e desiguais? R: *A equação dada é equivalente a*

$$x^2 - (1 + 4m)\,x + 5\,(m^2 - 1) = 0.$$

Os valores de m *a que correspondem raizes reais e desiguais são os que verificam:*

$$(1 + 4m)^2 - 20\,(m^2 - 1) > 0 \quad ou \quad 4m^2 - 8m - 21 < 0.$$

Notando que os zeros do 1.º membro são $7/2$ *e* $-3/2$ *os valores de* m *pedidos são:* $-3/2 < m < 7/2$.

Soluções dos n.os 3138 a 3143 de Manuel Zaluar.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1949 — Ponto n.º 1.

3144 — Dois números a e b, não divisíveis por 5, têm por soma 1620. Calcular a e b sabendo que o seu máximo divisor comum admite 12 divisores. R: *O m. d. c.* $(a, b) = D$ *é divisor de* $a + b = 1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$. *Por serem* $a \neq \dot{5}$ *e* $b \neq \dot{5}$, D *só poderá ser da forma* $D = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ *com* α *e* β *inteiros positivos e tais que* $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) = 12$. *Das raizes desta equação apenas interessam as que conduzirem a um valor para* D, *divisor de* 1620. *Assim, tem-se:* $\alpha = 2$, $\beta = 3$ *e* $D = 108$. *Por ser* $a = Dq$ *e* $b = Dq'$, *com* q *e* q' *primos entre si, ter-se-à,* $q + q' = (a + b)/D = 15$ *e, portanto, correspondentemente,* $q = 1, 2, 4, 7$, $q' = 14, 13, 11, 8$, $a = 108, 216, 432, 756$ *e* $b = 1512, 1404, 1188, 864$.

3145 — Demonstre que qualquer que seja o inteiro n a fracção $\dfrac{2n+1}{5n+2}$ é uma fracção irreductível. R: *Utilizando o algoritmo de Euclides para a determi-*

nação do m. d. c. (método das divisões sucessivas), tem-se: m. d. c. $(5n+2, 2n+1) =$ *m. d. c.* $(2n+1, n) =$ $=$ *m. d. c.* $(n, 1) = 1$ *qualquer que seja* n *inteiro, c. q. d.*

3146 — Dado o trinómio $f(x) = (k-1)x^2 + kx + k - 2$ de raízes x_1 e x_2 determine k de modo que as raízes satisfaçam às relações $x_1 < 1 < x_2 < 3$. R: *O enunciado deve pretender a determinação dos valores reais de* k. *Para que o valor* 1 *esteja compreendido entre as raízes* x_1 *e* x_2, *reais e diferentes, de* f(x), *terá que ser:*

$$(k-1)\cdot f(1) = 3(k-1)^2 < 0,$$

desigualdade impossível qualquer que seja k *real.*

3147 — A partir do desenvolvimento de $(x+a)^m$, deduza que $\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+\binom{m}{6}+\cdots+\binom{m}{m} = 2^{m-1}-1$, se m é par. R: *Desenvolva-se o binómio*

$$(x+a)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} a^k.$$

1.º) — *Faça-se* $x = a = 1$ *e obter-se-á,*

$$\text{(I)} \quad 2^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}.$$

2.º) — *Faça-se* $x = 1$ *e* $a = -1$, *obtendo-se,*

$$\text{(II)} \quad 0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}.$$

3.º) — *Some-se ordenadamente* (I) *com* (II). *Anular-se-ão, no 2.º membro, os termos da forma* $\binom{m}{2k+1}$, *resultando:* $2^m = 2\cdot\sum_{k=0}^{m/2}\binom{m}{2k}$ *se for* m *par. Daqui,*

$$2^{m-1} - 1 = \sum_{k=1}^{m/2} \binom{m}{2k} \qquad \text{c. q. p.}$$

3148 — Uma esfera de raio R e um cone de revolução cuja base tem de raio R e cuja altura é $2R$ estão assentes num plano π. Seccionaram-se os dois sólidos por um plano α paralelo ao plano π. Calcular a distância x dos dois planos α e π de modo que sejam iguais as áreas das secções produzidas na esfera e no cone pelo plano α. R: *Sejam respectivamente* r_1 *e* r_2 *os raios das circunferências, secções determinadas na esfera e no cone pelo plano* α. *Seja* β *um plano perpendicular a* π *contendo o centro da esfera e o eixo do cone. Considere-se* a) *na secção diametral da esfera, produzida por* β: *o triângulo rectângulo de hipotenusa* R *e catetos* r_1 *e* $R-x$ *de que são vértices o centro da esfera, o centro da circunferência, secção por* α, *e um dos* 2 *pontos comuns à secção da esfera, por* α, *e à secção da esfera, por* β. *Donde,* $r_1 = \sqrt{R^2-(R-x)^2}$; b) *na secção que contem o eixo do cone: o triângulo rectângulo de catetos* r_2 *e* $2R-x$, *semelhante ao triângulo rectângulo de catetos* R *e* 2R *(raio da base do cone e eixo do cone). Consequentemente, da semelhança destes triângulos, resultará* $r_2 = (2R-x)/2$. *Como tem que ser* $\pi r_1^2 = \pi r_2^2$, *obtem-se, substituindo valores e desprezando a solução* $x = 2R$, *sem interesse,* $x = 2R/5$.

3149 — Construa um triângulo conhecendo um lado, o ângulo oposto e a mediana relativa ao lado dado (utilize *o método dos lugares geométricos*). R: *Do conhecimento dum lado* $\overline{AB}$ *e da mediana referente a este lado, conclue-se que os possíveis vértices* C *dos triângulos procurados pertencem a uma circunferência de centro no ponto médio* M *de* $\overline{AB}$ *e raio igual ao comprimento da mediana. O conhecimento do ângulo* α *oposto a* $\overline{AB}$ *permite concluir que os vértices* C *dos triângulos a construir são pontos dos quais o segmento* $\overline{AB}$ *é observado sob um dado ângulo* α; *pertencem, portanto, aos arcos capazes do ângulo* α *em relação a* $\overline{AB}$. *(Vd. construção deste lugar geométrico, p. e. em* Elementos de Geometria — 3.º ciclo — Nicodemos e Calado*). As intersecções daquela circunferência com estes dois arcos da circunferência tendo* $\overline{AB}$ *como corda comum, são os vértices dos quatro triângulos cuja construção é possível, únicas soluções do problema.*

Soluções dos n.os 3144 a 3149 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — 1949-50.**

3150 — *a*) Enuncie e demonstre uma condição necessária e suficiente para a existência de raízes iguais num polinómio $f(z)$. Como se comporta o cociente $f(z)/f'(z)$ relativamente aos zeros de $f(z)$?

b) Estabeleça as relações a que devem satisfazer os coeficientes do polinómio x^4+px^2+qx+r para que admita uma raiz tripla. Que se pode afirmar neste caso da natureza das raízes suposto $f(z)$ real? E se os coeficientes forem racionais?