nação do m. d. c. (método das divisões sucessivas), tem-se: m. d. c. $(5n+2, 2n+1)$ = *m. d. c.* $(2n+1, n)$ = = *m. d. c.* $(n, 1) = 1$ *qualquer que seja* n *inteiro, c. q. d.*

3146 — Dado o trinómio $f(x) = (k-1)x^2 + kx + k - 2$ de raizes x_1 e x_2 determine k de modo que as raizes satisfaçam às relações $x_1 < 1 < x_2 < 3$. R: *O enunciado deve pretender a determinação dos valores reais de* k. *Para que o valor* 1 *esteja compreendido entre as raizes* x_1 *e* x_2, *reais e diferentes, de* f(x), *terá que ser:*

$$(k-1) \cdot f(1) = 3(k-1)^2 < 0,$$

desigualdade impossível qualquer que seja k *real.*

3147 — A partir do desenvolvimento de $(x+a)^m$, deduza que $\binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \binom{m}{6} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^{m-1} - 1$, se m é par. R: *Desenvolva-se o binómio*

$$(x+a)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} a^k.$$

1.º) — *Faça-se* $x = a = 1$ *e obter-se-á,*

$$\text{(I)} \quad 2^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}.$$

2.º) — *Faça-se* $x = 1$ *e* $a = -1$, *obtendo-se,*

$$\text{(II)} \quad 0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}.$$

3.º) — *Some-se ordenadamente* (I) *com* (II). *Anular-se-ão, no 2.º membro, os termos da forma* $\binom{m}{2k+1}$, *resultando:* $2^m = 2 \cdot \sum_{k=0}^{m/2} \binom{m}{2k}$ *se for* m *par. Daqui,*

$$2^{m-1} - 1 = \sum_{k=1}^{m/2} \binom{m}{2k} \qquad \textit{c. q. p.}$$

3148 — Uma esfera de raio R e um cone de revolução cuja base tem de raio R e cuja altura é $2R$ estão assentes num plano π. Seccionaram-se os dois sólidos por um plano α paralelo ao plano π. Calcular a distância x dos dois planos α e π de modo que sejam iguais as áreas das secções produzidas na esfera e no cone pelo plano α. R: *Sejam respectivamente* r_1 *e* r_2 *os raios das circunferências, secções determinadas na esfera e no cone pelo plano* α. *Seja* β *um plano perpendicular a* π *contendo o centro da esfera e o eixo do cone. Considere-se* a) *na secção diametral da esfera, produzida por* β: *o triângulo rectângulo de hipotenusa* R *e catetos* r_1 *e* $R-x$ *de que são vértices o centro da esfera, o centro da circunferência, secção por* α, *e um dos* 2 *pontos comuns à secção da esfera, por* α, *e à secção da esfera, por* β. *Donde,* $r_1 = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}$; b) *na secção que contem o eixo do cone: o triânguto rectângulo de catetos* r_2 *e* $2R - x$, *semelhante ao triângulo rectângulo de catetos* R *e* 2R *(raio da base do cone e eixo do cone). Consequentemente, da semelhança destes triângulos, resultará* $r_2 = (2R - x)/2$. *Como tem que ser* $\pi r_1^2 = \pi r_2^2$, *obtem-se, substituindo valores e desprezando a solução* $x = 2R$, *sem interesse,* $x = 2R/5$.

3149 — Construa um triângulo conhecendo um lado, o ângulo oposto e a mediana relativa ao lado dado (utilize *o método dos lugares geométricos*). R: *Do conhecimento dum lado* $\overline{AB}$ *e da mediana referente a este lado, conclue-se que os possíveis vértices* C *dos triângulos procurados pertencem a uma circunferência de centro no ponto médio* M *de* $\overline{AB}$ *e raio igual ao comprimento da mediana. O conhecimento do ângulo* α *oposto a* $\overline{AB}$ *permite concluir que os vértices* C *dos triângulos a construir são pontos dos quais o segmento* $\overline{AB}$ *é observado sob um dado ângulo* α; *pertencem, portanto, aos arcos capazes do ângulo* α *em relação a* $\overline{AB}$. *(Vd. construção deste lugar geométrico, p. e. em* Elementos de Geometria — 3.º ciclo — Nicodemos e Calado*). As intersecções daquela circunferência com estes dois arcos da circunferência tendo* $\overline{AB}$ *como corda comum, são os vértices dos quatro triângulos cuja construção é possível, únicas soluções do problema.*

Soluções dos n.os 3144 a 3149 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — 1949-50.**

3150 — *a*) Enuncie e demonstre uma condição necessária e suficiente para a existência de raízes iguais num polinómio $f(z)$. Como se comporta o cociente $f(z)/f'(z)$ relativamente aos zeros de $f(z)$?

b) Estabeleça as relações a que devem satisfazer os coeficientes do polinómio $x^4 + px^2 + qx + r$ para que admita uma raiz tripla. Que se pode afirmar neste caso da natureza das raízes suposto $f(z)$ real? E se os coeficientes forem racionais?

3151 — Resolva algèbricamente a equação $z^{12}-1=0$. Refira-se a um método de abaixamento que também possa ser usado no cálculo das suas raízes.

3152 — Enuncie e demonstre o teorema de Laplace relativo ao desenvolvimento dum determinante segundo os menores de ordem m contidos em m filas paralelas da sua matriz. A que se reduz esse desenvolvimento na hipótese de existir apenas um menor significativo de ordem m nessas m filas?

3153 — Em que condições se multiplicam matrizes? Como se calcula o determinante da matriz $P=A.B$, supondo $A\ (m\times n)$ e $B\ (n\times m)$. Prove que é $|P|=0$ sempre que $n<m$. Supondo $n=m$, de quantos modos se pode fazer o produto $|A|\times|B|$? Justifique.

3154 — Enuncie e demonstre a regra de derivação dum determinante. Calcule a derivada de

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) & \pi(x) \\ \varphi(a) & \psi(a) & \pi(a) \\ \varphi(b) & \psi(b) & \pi(b) \end{vmatrix}$$

e prove que para algum c exterior ao intervalo (a,b) se tem

$$\begin{vmatrix} \varphi'(c) & \psi'(c) & \pi'(c) \\ \varphi(a) & \psi(a) & \pi(a) \\ \varphi(b) & \psi(b) & \pi(b) \end{vmatrix} = 0 .$$

Supõe-se que as funções φ, ψ, π são regulares e com derivadas não conjuntamente infinitas em nenhum ponto interior de (a,b).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência — 29 de Março de 1950**.

3155 — Defina vizinhança de um ponto, e ponto de acumulação de um conjunto (x). Enuncie e demonstre o teorema de Bolzano-Weierstrass. Diga o que é necessário e suficiente para que u seja limite da sucessão u_n sem que seja ponto de acumulação do conjunto (u_n). Que é o ponto u no conjunto (u_n)? Prove que uma sucessão não tem dois limites finitos distintos. Qual é o limite máximo da sucessão $w_n=u_n+v_n$ se forem u e v os limites máximos das sucessões u_n e v_n? Justifique.

3156 — Se a soma dos n primeiros têrmos de uma série for $S_n=A-1/n$, diga se a série é convergente e, em caso afirmativo, qual é a soma? Qual é o limite do termo geral u_n daquela série? Justifique. Sejam u_n e v_n os termos gerais de séries de termos positivos; se para $n\geqslant m$ é $u_{n+1}/u_n\ v_{n+1}/v_n \leqslant$ o que pode afirmar sobre o caracter das séries? Enuncie e demonstre o segundo teorema de Cauchy.

Determine o menor inteiro α por forma que as séries $u_n=\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ e $v_n=\frac{1}{n^\alpha}$ sejam da mesma natureza. R: *Se* $\lim_{n=\infty} u_n/v_n=1$ *as 2 séries serão da mesma natureza, e como se tem* $u_n/v_n=n^{\alpha-2}\cdot\log(1+1/n)^n$ *e portanto* $1=\lim_{n=\infty} n^{\alpha-2}\times\lim_{n=\infty}\log(1+1/n)^n=\lim_{n=\infty} n^{\alpha-2}$, *deverá ser* $\alpha=2$. *A série* u_n *é convergente e as séries* v_n *são convergentes para* $\alpha\geqslant 2$.

3157 — Enuncie e demonstre o teorema de Cauchy e mostre que êle contém como caso particular o teorema de Lagrange. Calcule $\lim_{x=\pi/2-0}(\operatorname{tg} x)^{x-\pi/2}$.

R: $\lim_{x=\pi/2-0}(\operatorname{tgx})^{x-\pi/2}=e^{\lim_{x=\pi/2-0}(x-\pi/2)\log\operatorname{tg}x}$ *e calculando agora o verdadeiro valor do expoente vem:*

$$\lim_{x=\pi/2}(x-\pi/2)\log\operatorname{tg}x=\lim_{x=\pi/2}\frac{\log\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{x-\pi/2}}=$$

$$=\lim_{x=\pi/2}\frac{\dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x}}{-\dfrac{1}{(x-\pi/2)^2}}=\lim_{x=\pi/2}\frac{-(x-\pi/2)^2}{\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2x}=$$

$$=\lim_{x=\pi/2}\frac{-2(x-\pi/2)}{\cos 2x}$$

donde

$$\lim_{x=\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{x-\pi/2}=e^0=1 .$$

3158 — Seja γ a imagem da função $y=f(x)$. Figure $M(x,y)$ sobre γ e tome o ponto médio $Q(X,Y)$ do segmento $\overline{OQ}$. Deduza a equação $Y=g(X)$ da curva descrita por Q quando M percorre γ. Supondo que esta última curva tem uma assíntota oblíqua $y=mx+p$, prove que também a primeira admite assíntota oblíqua e ache a sua equação. Compare as direcções das duas curvas nos pontos correspondentes M e Q. R: *As coordenadas de* Q *são* $X=x/2$, $Y=y/2$; *portanto a equação da curva* γ *será* $2Y=f(2X)$ *ou* $Y=\frac{1}{2}f(2X)$.

Como se tem

$$m=\lim_{x=\infty}y/x=\lim_{X=\infty}Y/X \quad e \quad p=\lim_{x=\infty}(y-mx)=$$
$$=\lim_{X=\infty}(2Y-m\,2X)=2\lim_{X=0}(Y-mX)$$

a equação da assíntota à curva γ *será* $Y=mX+p/2$.

De $$\frac{dY}{dX}=\frac{1}{2}\frac{d\,f(2X)}{d\,2X}\cdot\frac{d\,2X}{dX}=\frac{1}{2}f'(x)\cdot 2=\frac{dy}{dx}$$

as tangentes em pontos correspondentes das duas curvas têm coeficientes angulares iguais; as duas curvas têm tangentes paralelas.

3159 — Seja c um zero triplo da função $f(x)$ no intervalo (a, b). Prove que a sucessão $F(x)$ de Fourier perde na sua primeira parte três variações seguidas quando x passa por c.

Deduza a partir da sucessão de Fourier a regra dos sinais de Descartes.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 1.ª época — 1950, Julho, 20.

3160 — Determine o valor do parâmetro p que torne compatíveis as equações:

$$\begin{cases} x - 2y - t + 2u = 4 \\ 2x - y - 2t + u = -1 \\ y + 2u = 3 \\ 3x - 2t + u = -1 \\ x + 4y + t + pu = -10. \end{cases}$$

Ache a solução do sistema.

R: *Condense-se a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & p & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 6 & 2 & (p-2) & -14 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 2 & (p-14) & -32 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & (p+20) & 30 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & (p+20-15) & 0 \end{bmatrix}$$

a última equação será compatível com as restantes para o valor de $p = -5$. *O sistema proposto será então equivalente ao seguinte:*

$$\begin{aligned} x - 2x - t + 2u &= 4 \quad \textit{com a solução} \quad & x &= 1 \\ y + 2u &= 3 & y &= -1 \\ t - 17u &= -31 & t &= 3 \\ -9u &= -18 & u &= 2 \end{aligned}$$

3161 — Escreva o desenvolvimento em série inteira de x de $f'(x)$ e de $f(x) = \log|2 + x|$. Em que hipótese é que o desenvolvimento de $f(x)$ se pode obter do de $f'(x)$? R: *Temos*

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\left[1\Big/\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{2^n} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^n}{2^n} \; (\textit{para } |x| < 2)$$

e primitivando termo a termo vem:

$$U(x) = \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} + C$$

absolutamente convergente para $|x| < 2$. $U(x)$ *será a primitiva de* $f'(x)$ *onde for uniformemente convergente, portanto em qualquer intervalo interior ao seu intervalo de convergência, e se* $U(x)$ *é convergente num extremo do seu intervalo de convergência absoluta então nesse mesmo intervalo é uniformemente convergente. Em conclusão:*

$$\log|2 + x| = C + \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} \; (\textit{para} |x| < 2)$$

e tem de ser necessàriamente $C = \log 2$.

3162 — Faça a contagem e separação das raizes da equação $4x^3 - 5x^2 - 14x - 6 = 0$ e calcule em primeira aproximação a maior das raizes reais. R: *Os limites das raizes são* $l = -1$ *e* $L = 3$. *A sucessão de Sturm achada pelo algoritmo das divisões sucessivas é* $f_0 = 4x^3 - 5x^2 - 14x - 6$, $f_0'/2 = f_1 = 6x^2 - 5x - 7$, $f_2 = 193x + 143$ e $f_4 = 54$.

x	−1	−3/4	−1/2	0	2	3
f_0	−	0	−	−	−	+15
f_1	+		−	−	+	+32
f_2	−		+	+	+	+
f_4	+		+	+	+	+
var.	3		1	1	1	0

Há três raizes reais uma das quais, a maior, entre 2 e 3, *as outras duas entre* -1 *e* 0. *Fraccionando o intervalo* $(-1, 0)$ *as raizes ficam na primeira metade* $(-1, -1/2)$ *e partindo de novo encontra-se uma raiz* $-3/4$; *baixando de grau encontram-se as outras duas* $1 \pm \sqrt{3}$ · *Querendo calcular a maior pelo método de Newton, o extremo favorável é* 3 *e vem* $3 - 15/64 = 2{,}76$.

3163 — Defina função contínua num ponto e limites $f(a-0)$ e $f(a+0)$. Estude a continuidade da função $y = 1/(1 + a^{1/x})$ $(a > 0)$ no ponto de abcissa $x = 0$. R:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{h}}} = 0$$

$(a > 1)$ h *positivo; o mesmo limite* $= 1$ $(a < 1)$.

$$\lim_{h=0} \frac{1}{1 + a^{-\frac{1}{h}}} = 1 \;(a > 1) \; \textit{o mesmo limite} = 0 \;(a < 1).$$

Os limites laterais são diferentes; tudo depende do valor da função para $x = 0$.

Soluções dos n.os 3156 a 3163 de J. Ribeiro de Albuquerque

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 1.º exame de frequência de 1949-50 — Ponto n.º 1.

3164 — Seja x', y', z' a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 7x - y - z = 0 \\ -3x + y - 7z = 70 \\ 10x - y - 9z - 40 = 0 \end{cases}$$

e sejam x'', y'', z'' os denominadores respectivamente da 1.ª, da 3.ª e da 5.ª reduzidas da fracção contínua $[5, 3, 5, 1, 5]$. Ache a equação cartesiana do plano, que passa pela origem dos eixos coordenados e é paralelo às rectas, que suportam os vectores

$\mathbf{u}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}'' = x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3.$

R: *Obtidos pela regra de Cramer, a solução do sistema proposto* $x' = 16$, $y' = 111$, $z' = 1$ *e pela lei de formação dos denominadores das reduzidas duma fracção contínua,* $x'' = 1$, $y'' = 16$, $z'' = 111$, *serão*

$\mathbf{u}' = 16\,\mathbf{e}_1 + 111\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ *e* $\mathbf{u}'' = \mathbf{e}_1 + 16\,\mathbf{e}_2 + 111\,\mathbf{e}_3$.

A equação pedida será

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 16 & 111 & 1 \\ 1 & 16 & 111 \end{vmatrix} = 0 \quad ou \quad 2461x - 355y + 29z = 0.$$

3165 — Determine λ por forma que as equações $x^4 - x^2 - 2 = 0$ e $x^3 + x^2 + \lambda x + \lambda = 0$ tenham raízes comuns. Em seguida ache os valores dessas raízes.

R: *O resto da divisão de* $P(x) = x^4 - x^2 - 2$ *por* $Q(x) = x^3 + x^2 + \lambda x + \lambda$ *é* $R_1(x) = -\lambda x^2 + \lambda - 2$, *que nunca pode ser identicamente nulo e o da divisão de* $Q(x)$ *por* $R_1(x)$ *é* $R_2(x) = \dfrac{\lambda^2 + \lambda - 2}{\lambda}(x+1)$ *que se anula identicamente para* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -2$; *a estes valores correspondem respectivamente, como raízes comuns das equações propostas,* $\pm i$ *e* $\pm\sqrt{2}$.

3166 — É dada a equação

$$u^2 + 2(2x^2 + 4y^2 + z^2)\,u + \lambda^2 = 0$$

onde λ representa um parâmetro real diferente de zero. *a*) Indique quantas funções reais de variável real $u_k(x, y, z)$ pode a equação definir nas vizinhanças do ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ da quádrica $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 2 = 0$; *b*) Atribua a λ um valor conveniente e determine seguidamente du_k no ponto genérico da quádrica. R: a) *Sendo em* $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} u^2 + 4u + \lambda^2 = 0 \\ 4 - \lambda^2 \geqslant 0 \\ 2u + 4 \neq 0 \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \quad e\ portanto \begin{cases} 0 < \lambda^2 < 4 \\ u = -2 \pm \sqrt{4 - \lambda^2} \end{cases}$$

a equação define duas funções reais de variável real nas vizinhanças desse ponto. b) *Atribuindo a* λ *o valor* $\sqrt{3}$ *vem*

$$u_1(x_0, y_0, z_0) = -1, \quad u_2(x_0, y_0, z_0) = -3 \quad e$$
$$du_1 = 4x_0\,dx + 8y_0\,dy + 2z_0\,dz,$$
$$du_2 = -12x_0\,dx - 24y_0\,dy - 6z_0\,dz.$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência 1949-50 — Ponto n.º 2.

3167 — Sejam x', y', z' respectivamente o 1.º, o 3.º e o 5.º cocientes incompletos do desenvolvimento em fracção contínua do número $\dfrac{400}{301}$ e seja x'', y'', z'' a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 8x + y - z = 1 \\ -3x - y + z = 14 \\ 2x + 6y - z + 12 = 0 \end{cases}$$

Ache um ângulo formado pelas rectas que suportam os vectores $\mathbf{u}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}'' = x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3$. (Eixos ortogonais). R: *Determinados* $x' = 1$, $y' = 24$, $z' = 3$ *e* $x'' = 3$, $y'' = 1$, $z'' = 24$ *como*

$$\cos\varphi = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \frac{99}{586}$$

será solução do problema

$$\varphi_1 = \arccos\frac{99}{586} \quad 0 < \varphi_1 < \pi/2.$$

3168 — Ache a equação reduzida ou canónica da quádrica da equação $x^2 - y^2 + z^2 - xz + y = 0$. Classifique a superfície. R: *A quádrica é um hiperbolóide de duas folhas, cuja equação reduzida é* $4x^2 - 6y^2 - 2z^2 = 1$.

3169 — É dado o sistema $\begin{cases} (x-\lambda)^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + 2y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$

onde λ representa um parâmetro real.

a) Para que valores de λ define o sistema, nas visinhanças do ponto $x = 1$, quatro funções reais de variável real $\begin{cases} y_h(x) \\ h = 1, 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} z_h(x) \\ h = 1, 2 \end{cases}$?

b) Atribua a λ um valor nas condições da alínea anterior e calcule seguidamente $\left(\dfrac{dy_h}{dx}\right)_{x=1}$ e $\left(\dfrac{dz_h}{dx}\right)_{x=1}$.

R: a) *Sendo, para* $x = 1$

$$\begin{cases} (1-\lambda)^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y + z = 4 \\ \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \quad e,\ da\acute{\imath} \quad \begin{cases} y = 2 \mp \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\lambda - \lambda^2} \\ z = 2 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\lambda - \lambda^2} \\ 2\lambda - \lambda^2 \neq 0 \end{cases}$$

e verificando-se a condição $2\lambda - \lambda^2 >$ *ou seja* $0 < \lambda < 2$, *o sistema dado define* 4 *funções reais de variável real, nas vizinhanças de* x=1.

b) *Fazendo* $\lambda=1$, *vem*

$$y_1=2-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y_2=2+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4},\quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4},$$

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_{x=1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\quad e\quad \left(\frac{dz_2}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

Soluções dos n.os 3164 a 3169 de Otília C. da Cunha Teles

NOTAS DE MATEMÁTICA

Sobre a aproximação fornecida pelos desenvolvimentos em fracção contínua

Quando do número A se conhece apenas que os primeiros $n+1$ cocientes incompletos do seu desenvolvimento em fracção contínua são $a_0, a_1, \cdots, a_n$, costuma calcular-se pela fórmula $\left|A-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_n^2}$ um limite superior do erro que se comete em tomando por A a sua reduzida de ordem n, $\frac{P_n}{Q_n}$. Mas pode deduzir-se uma fórmula um pouco melhor do facto de estar o cociente completo de ordem n, isto é, o número cujo desenvolvimento em fracção contínua seria $a_n, a_{n+1}, \cdots$, certamente comprendido entre a_n e a_n+1. A está portanto compreendido entre

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_n P_{n-1}+P_{n-2}}{a_n Q_{n-1}+Q_{n-2}}\quad \text{e}\quad \frac{(a_n+1)P_{n-1}+P_{n-2}}{(a_n+1)Q_{n-1}+Q_{n-2}}$$

expressões cuja diferença é, em módulo, inferior a

$$\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}.$$

Se é inédita, deve-se a ideia que conduz a esta fórmula ao meu antigo aluno Jorge Manuel Pinheiro Guerra que, ignorando a fórmula usual, resolveu assim um problema de uma aula prática e que se não tem disposto a redigir esta nota embora lho tenha pedido várias vezes.

Renato Pereira Coelho

CRÍTICA DE LIVROS

Compêndio de Álgebra — 3.º ciclo, por *António Augusto Lopes*

(Aprovado oficialmente como livro único — *Diário do Governo*, II série, 24 de Junho de 1950)

1. São números os livros publicados no nosso país para o ensino da Matemática nos Liceus. Pode afirmar-se, porém, sem perigo de exagero, que são raríssimos os que, pelo seu nível científico, se podem considerar recomendáveis. Acresce a circunstância infeliz de serem quase normalmente postos de lado os livros que, pela sua seriedade e pelo cunho renovador que apresentam, deviam merecer da parte dos professores e das entidades oficiais um carinho e uma protecção dignos deles. É, por exemplo, o caso da *Aritmética Racional* de A. Aniceto Monteiro e J. Silva Paulo que constitui, sem dúvida, uma tentativa maravilhosa de racionalização do nosso ensino de Aritmética Racional.

O novo Estatuto do Ensino Liceal, criando o sistema do livro único, vai dar uma maior possibilidade de esquecimento dessas poucas obras que deveriam ir entrando na ferramenta de trabalho de estudantes e professores. Não é nosso objectivo discutir aqui o problema do livro único. Embora em desacordo com o sistema criado, aceitamo-lo, neste momento, como coisa assente ao destacar a alta responsabilidade dos autores desses livros únicos e das Comissões de Apreciação dos mesmos, nomeadas pelo Ministério da Educação Nacional, uma vez que o ensino de cada disciplina fica sujeito, pràticamente, durante um período mínimo de cinco anos, à orientação dum *único guia*. Da seriedade e do valor formativo desse ensino, onde a acção do professor ficou limitada, é índice o livro que for adoptado.

O trabalho que vamos apreciar foi aprovado como livro único de ensino de Álgebra (3.º ciclo). O seu Autor é professor efectivo dos liceus e tem publicado ùltimamente *vários* livros de exercícios ou de texto. Nenhum, porém, lhe poderia criar a responsabilidade deste pelas razões seguintes: