o sistema dado define 4 *funções reais de variável real, nas vizinhanças de* x=1.

b) *Fazendo* $\lambda=1$, *vem*

$$y_1=2-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y_2=2+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4},\quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4},$$

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_{x=1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\quad e\quad \left(\frac{dz_2}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

Soluções dos n.os 3164 a 3169 de Otília C. da Cunha Teles

NOTAS DE MATEMÁTICA

Sobre a aproximação fornecida pelos desenvolvimentos em fracção contínua

Quando do número A se conhece apenas que os primeiros $n+1$ cocientes incompletos do seu desenvolvimento em fracção contínua são $a_0, a_1, \cdots, a_n$, costuma calcular-se pela fórmula $\left|A-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_n^2}$ um limite superior do erro que se comete em tomando por A a sua reduzida de ordem n, $\frac{P_n}{Q_n}$. Mas pode deduzir-se uma fórmula um pouco melhor do facto de estar o cociente completo de ordem n, isto é, o número cujo desenvolvimento em fracção contínua seria $a_n, a_{n+1}, \cdots$, certamente comprendido entre a_n e a_n+1. A está portanto compreendido entre

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_n P_{n-1}+P_{n-2}}{a_n Q_{n-1}+Q_{n-2}}\quad \text{e}\quad \frac{(a_n+1)\,P_{n-1}+P_{n-2}}{(a_n+1)\,Q_{n-1}+Q_{n-2}}$$

expressões cuja diferença é, em módulo, inferior a

$$\frac{1}{Q_n\,(Q_n+Q_{n-1})}.$$

Se é inédita, deve-se a ideia que conduz a esta fórmula ao meu antigo aluno Jorge Manuel Pinheiro Guerra que, ignorando a fórmula usual, resolveu assim um problema de uma aula prática e que se não tem disposto a redigir esta nota embora lho tenha pedido várias vezes.

Renato Pereira Coelho

CRÍTICA DE LIVROS

Compêndio de Álgebra — 3.º ciclo, por *António Augusto Lopes*

(Aprovado oficialmente como livro único — *Diário do Governo,* II série, 24 de Junho de 1950)

1. São números os livros publicados no nosso país para o ensino da Matemática nos Liceus. Pode afirmar-se, porém, sem perigo de exagero, que são raríssimos os que, pelo seu nível científico, se podem considerar recomendáveis. Acresce a circunstância infeliz de serem quase normalmente postos de lado os livros que, pela sua seriedade e pelo cunho renovador que apresentam, deviam merecer da parte dos professores e das entidades oficiais um carinho e uma protecção dignos deles. É, por exemplo, o caso da *Aritmética Racional* de A. Aniceto Monteiro e J. Silva Paulo que constitui, sem dúvida, uma tentativa maravilhosa de racionalização do nosso ensino de Aritmética Racional.

O novo Estatuto do Ensino Liceal, criando o sistema do livro único, vai dar uma maior possibilidade de esquecimento dessas poucas obras que deveriam ir entrando na ferramenta de trabalho de estudantes e professores. Não é nosso objectivo discutir aqui o problema do livro único. Embora em desacordo com o sistema criado, aceitamo-lo, neste momento, como coisa assente ao destacar a alta responsabilidade dos autores desses livros únicos e das Comissões de Apreciação dos mesmos, nomeadas pelo Ministério da Educação Nacional, uma vez que o ensino de cada disciplina fica sujeito, pràticamente, durante um período mínimo de cinco anos, à orientação dum *único guia.* Da seriedade e do valor formativo desse ensino, onde a acção do professor ficou limitada, é índice o livro que for adoptado.

O trabalho que vamos apreciar foi aprovado como livro único de ensino de Álgebra (3.º ciclo). O seu Autor é professor efectivo dos liceus e tem publicado ùltimamente *vários* livros de exercícios ou de texto. Nenhum, porém, lhe poderia criar a responsabilidade deste pelas razões seguintes:

a) apresentou-o a concurso para ser aprovado como livro único;

b) destina-se aos estudantes do 3.º ciclo dos liceus, onde o ensino pode e deve revestir um carácter de rigor maior que nos dois ciclos anteriores;

c) algumas das matérias nele versadas, talvez as de tratamento mais delicado, exigem um grande cuidado na exposição, dada a sua importância em estudos subsequentes.

É tendo em vista os três aspectos agora citados que vamos criticar este Compêndio de Álgebra.

2. Numa primeira leitura deste livro colhe-se a impressão de que se trata duma obra em que o Autor se preocupou em corrigir a forma de tratamento de certos assuntos, incorrectamente estudados em muitos dos livros portugueses anteriores. Essa preocupação revela-se, nomeadamente, na forma como são apresentados os elementos sobre funções de variável real, onde transparecem certas intenções louváveis como, por ex., a de distinguir funções e expressões analíticas; certos aspectos do estudo dos polinómios; o problema das indeterminações; a discussão das equações do primeiro e segundo graus nos casos em que o coeficiente da mais alta potência da incógnita tende para zero; a forma de introdução no cálculo algébrico dos números complexos a duas unidades.

Este seria, sem dúvida, um aspecto positivo a salientar, se uma observação mais atenta não descobrisse a falta de cuidado na apresentação da maior parte desses mesmos assuntos. Nota-se afinal que o Autor não pensou, suficientemente, sobre os elementos de estudo de que se serviu ou então abastardou a forma expositiva, de modo a destruir, parcialmente nuns casos, noutros totalmente, a utilidade que resultaria da correcção de erros que há muito fazem escola no nosso ensino liceal. Muitas vezes seria preferível deixar as coisas como até aqui.

Há, porém, um capítulo, que desde já destacamos, onde mesmo uma leitura descuidada encontra reais deficiências e erros notáveis: é o cap. II, subordinado ao título geral *Limites*. Não desconhecemos as dificuldades de apresentação deste assunto a estudantes dos liceus, mas não podemos esquecer a importância capital dos diferentes pontos abordados nesse capítulo; basta que nos lembremos de que a noção de limite é base de toda a Análise. Dar ideias erradas ou estabelecer confusões neste domínio é prestar um péssimo serviço ao Ensino da Matemática e aos estudantes. Ora, o que o prof. A. A. Lopes apresenta é uma exposição confusíssima e, pior do que isso, com erros e imprecisões, que de forma alguma deveria servir (e está decretado que vai servir!) como modelo de ensino. Repetimos: consideramos difícil a apresentação correcta e clara deste assunto a estudantes dos liceus, mas, em virtude da indubitável importância do mesmo, entendemos que não se pode descurar a sua forma de tratamento. E julgamos que um estudo mais atento do que aquele que possìvelmente fez o prof. A. A. Lopes, uma atitude crítica mais vigilante (em todo o livro se nota ausência de senso crítico) ou até a utilização de mais elementos de consulta, poderiam ter evitado bastantes dos aspectos negativos que estamos a referir. Parece-nos, por exemplo, que as *Lições de Álgebra e Análise* do prof. Bento Caraça (que o Autor não cita na bibliografia) podiam fornecer quase todo o material para uma exposição elementar, correcta e acessível, da teoria dos limites. Também, o *Curso de Álgebra Superior* do prof. Vicente Gonçalves, que o Autor de certo consultou, visto estar inserto nas indicações bibliográficas, estudado com o cuidado que exige, evitaria tantos erros e imprecisões.

Antes de entrarmos na concretização de alguns pontos anteriormente focados, queremos dizer que, àparte um ou outro pormenor, a exposição de alguns assuntos é correcta e clara. Citamos como exemplos; Cap. V (Equações e princípios de equivalência) e Cap. VII (Sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas) no 6.º ano; Cap. V (Equações irracionais redutíveis ao 2.º grau) e Cap. VI (Trinómio de 2.º grau) no 7.º ano. Note-se, porém, que mesmo aqui não houve sensível progresso, visto quase todos estes assuntos serem já tratados de forma aceitável em livros anteriores, o que não é de estranhar atendendo à sua natureza.

3 — Como dissemos, este livro apresenta algumas tentativas de correcção a livros anteriores, também destinados ao Ensino Liceal. Infelizmente, esse intuito não resultou, como vamos provar com *alguns* exemplos.

Assim, no Cap. I (Funções duma variável real), onde nos parece ter havido a preocupação a que aludimos, além de várias imprecisões que nos abstemos de citar, destacam-se os erros seguintes. Depois de definidas as funções algébricas e transcendentes (definições rigorosas sem dúvida), o Autor ao exemplificar a 2.ª categoria diz: «Por exemplo, são transcendentes as funções definidas pela igualdade

$$y = x^{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots .$$

A primeira porque a variável independente figura com expoente irracional e a segunda porque são em número infinito as operações que incidem sobre a variável independente, embora todas sejam racionais» Pergunta-se então: A função

$$y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots , \quad |x| < 1 ,$$

é transcendente? Não há funções algébricas que se podem desenvolver em série? O que o Autor poderia dizer é que a representação explícita duma função transcendente, com o recurso exclusivo às operações racionais, exige *sempre* uma infinidade de operações. De resto, dada a maneira por que foram definidas as funções algébricas (e, portanto, as transcendentes), o Autor nunca poderia invocar qualquer justificação lógica — isto é, baseando-se exclusivamente nas definições dadas — para a transcendência das funções que indicou como exemplos. Ainda sobre a classificação de funções, esta outra observação: Uma vez que o Autor considerou irracionais *todas* as funções algébricas não racionais impunha-se que dissesse que existem funções irracionais (no sentido definido no livro), que não são do mesmo tipo de $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{5x-1}}$, citado como exemplo, em virtude das *equações gerais* de grau superior ao quarto não serem algèbricamente resolúveis (as suas raízes não podem, em geral, exprimir-se em função dos coeficientes, utilizando um número finito de operações racionais e extração de raizes). No mesmo capítulo, ao definir funções monótonas, diz: «uma função $y(x)$ diz-se crescente para o valor x_0 da variável independente, se a desigualdade $x>x_0$ implica $f(x)>f(x_0)$». Esta definição está completamente errada e o Autor teve, talvez, essa impressão pois, logo no período seguinte, embora em termos vagos que não convêm em Matemática, fala na vizinhança do ponto (mantendo no entanto $x>x_0$).

No capítulo III (Propriedades dos polinómios inteiros) encontramos deficiências da mesma ordem. Por exemplo, na definição de adição algébrica de dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$, chamando $S(x)$ à soma diz que « $S(x)$ é uma expressão analítica cujo valor numérico, para cada valor da variável, é igual à soma dos valores numéricos dos polinómios parcelas». É uma maneira de definir $S(x)$, mas o que não pode concluir-se lògicamente da definição, como faz o Autor, é que $S(x)$ é outro polinómio. Onde reconhece o Autor a *evidência* desta conclusão? Idêntica observação se poderia fazer para o produto. Havia uma forma de evitar estas dificuldades, dando definições *formais* das operações. Assim, para a soma dir-se-ia: sendo $P(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ e $Q(x)\equiv b_0x^n+$ $+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$, chamar-se-ia soma $S(x)$ ao polinómio $S(x)\equiv(a_0+b_0)x^n+\cdots+(a_n+b_n)$. No caso de serem diferentes os graus dos dois polinómios, a redução ao caso anterior seria imediata, acrescentando termos de coeficiente zero ao polinómio de menor grau. No mesmo capítulo, na demonstração de que todo o polinómio inteiro equivalente a zero é identicamente nulo, há uma referência ao *método de indução completa* (que o Autor afinal não utiliza), referência que pode induzir em erro. O Autor, em lugar de fazer a indução e esclarecer o método, faz a verificação da propriedade enunciada para polinómios do 1.º e 2.º graus e depois diz: «Procedendo por indução, *podemos* (o grifado é nosso) demonstrar que se o teorema é verdadeiro para um polinómio de grau $n-1$, também o é para um polinómio de grau n». Ora, para proceder por indução, não havia necessidade da verificação da propriedade para polinómios do 2.º grau; havia, sim, necessidade de provar que a verificação para polinómios de grau $n-1$ implica a sua verificação para polinómios de grau n. Só assim se teria feito uma autêntica demonstração. Aquele «*podemos*», que grifamos, sugere que a verificação de que $P(n-1)$ implica $P(n)$ é uma coisa estranha à indução e já consequência dela.

O Capítulo IV (Fracções algébricas racionais) revela a mesma ausência de senso crítico. Por exemplo, demonstra-se, a pág. 110, que multiplicando ou dividindo ambos os termos duma fracção algébrica por uma expressão analítica, não identicamente nula, se obtem uma fracção equivalente à dada. Antes de mais, note-se que o Autor fala em fracções equivalentes (e lida com este conceito), sem prèviamente definir a equivalência de fracções. Não é, porém, este ponto que queremos frizar; o que pretendemos é denunciar a falência total daquela demonstração (e doutras semelhantes) visto que, no seu decurso, se utilizam propriedades não demonstradas. Assim de $\frac{P}{Q}\cdot Q=P$ tira $\left(\frac{P}{Q}\cdot Q\right)\cdot E=P\cdot E$ e depois $\frac{P}{Q}\cdot(Q\cdot E)=P\cdot E$ «*pelas propriedades da multiplicação*» (o grifado é nosso). Estas propriedades — aqui a propriedade associativa — mesmo que demonstradas para polinómios, podiam ser aplicáveis neste caso? Não! É tão necessário mostrar que

$$\frac{P}{Q}\cdot(Q\cdot E)=\left(\frac{P}{Q}\cdot Q\right)\cdot E$$

como mostrar que $\frac{PE}{QE}=\frac{P}{Q}$. Ainda no Capítulo IV, relativamente ao § II — Símbolos de impossibilidade — e § III — Símbolos de indeterminação — queremos fazer as seguintes observações:

a) o Autor não pôs em relevo a *unidade essencial* dos dois parágrafos. Afinal, num e noutro ponto, trata-se de casos, onde são inaplicáveis certos teoremas de limites, relativos ao produto e ao quociente.

b) Uma vez que resolveu falar em *símbolos de impossibilidade* (e talvez tivesse de o fazer em virtude de se tratar de um tópico do programa) o que se impunha era a explicação do termo empregado. Que faz o Autor, nesse sentido? Depois de algumas considerações a propósito do símbolo $\frac{k}{0}$ conclue: «quer dizer, quando x tende para a, a fracção proposta é um infinitamente grande; é este o significado algébrico da fracção $\frac{k}{0}$ que, por este motivo, é um símbolo de impossibilidade». Esta explicação satisfaz? Parece-nos que não. O que se deveria apontar é a impossibilidade de solução da equação $0 \cdot x = k (k \neq 0)$. De resto, tendo dito no Cap II que um infinitamente grande é uma *variável*, com que direito dá aquele nome ao símbolo $\frac{k}{0}$? Quanto ao símbolos $\frac{\infty}{k}$ e $\frac{k}{\infty}$, entendemos que não deviam aparecer como símbolos de impossibilidade. Caso se quisesse referir a estes símbolos, havia um lugar indicado para isso no Cap. II.

c) Como explica o Autor a designação de símbolos de indeterminação? Quanto ao símbolo $\frac{0}{0}$ diz: «a fracção $\frac{0}{0}$ não tem significado e pode representar qualquer número, porque pondo $\frac{0}{0} = k$, vem $0 \cdot k = 0$ para todos os valores de k». Isto está precisamente às avessas; o que havia a assinalar é a indeterminação da equação $0 \cdot x = 0$, e, porque $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ admite a solução $\frac{b}{a}$, torna-se natural considerar $\frac{0}{0}$ como símbolo de indeterminação. Quanto ao símbolo $\frac{\infty}{\infty}$, só em termos de limites seria possível tratá-lo. Assim: sendo $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} F(x) = k$ $(k \neq 0)$ é óbvio que $\lim_{x \to a} f(x) \ F(x) = \infty$, qualquer que seja k. Daqui o escrever-se a *igualdade simbólica* $k \cdot \infty = \infty$ e considerar-se *depois* o símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ como símbolo de indeterminação, em virtude de k ser um número qualquer. Ainda aqui o Autor pôs as coisas às avessas e, além disso, não sentiu necessidade de recurso a termos de limites. Análoga observação se poderia fazer para o símbolo $0 \cdot \infty$.

d) No parágrafo relativo a indeterminações, ora se fala em fracções algébricas racionais, ora se fala em fracções algébricas. O Autor esqueceu que nesta última categoria, segundo a sua «definição», cabem fracções como, por ex., $\frac{\operatorname{cotg} x}{\log x}$. Desse esquecimento resultou poder afirmar que as indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se reduzem às do tipo $\frac{0}{0}$ *estudado* e, por outro lado, só ter estudado as indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ no caso das fracções algébricas racionais. Como faz então essa redução com o exemplo $\frac{\operatorname{cotg} x}{\log x}$ $(x = 0)$?

O capítulo relativo a números complexos a duas unidades, onde houve a nítida preocupação de saír dos moldes anteriormente usados nos livros do Ensino Liceal (e, até aqui, achamos muito bem) não reveste o possível caracter de rigor e, sobretudo, é um mau capítulo do ponto de vista didáctico. O Autor, em lugar de manter até á altura conveniente a notação (a, b), para designar os pares ordenados, preferiu a utilização de $a + bi$, que emprega desde o início da exposição, embora faça certas observações correctas quanto ao sinal $+$ e ao símbolo i. Aparecem, como consequência, confusões entre o sinal $+$, no sentido inicial, e o sinal $+$, símbolo operatório de adição, confusões que o Autor não conseguiu desvanecer, embora o tenha tentado (não devemos esquecer a categoria dos estudantes a quem se destina a exposição). Ora, parece possível esclarecer tudo isto. Assim, [1] definindo no conjunto dos pares (a, b) a igualdade e a adição — definições habituais — segue-se imediatamente que todo o complexo se pode considerar como soma de dois outros: $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$. Tendo-se definido também produto de um complexo por um número real, mediante a igualdade $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$, é legítimo escrever

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ são sinais de operações. Os complexos $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ (que fàcilmente se reconhece serem irredútiveis um ao outro pela operação de produto de um deles por um número real — operação já definida) constituem *as duas unidades do campo complexo*. Observe-se, de passagem, que o Autor não se refere na sua exposição às unidades do campo, desligando-se assim, por completo, do título do capítulo. Qualquer complexo (a, b) pode obter-se da *base* (conjunto das duas unidades) por meio dos números reais a e b. Definindo seguidamente o produto de complexos pela igualdade

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

ou $(ae_1 + be_2) \cdot (ce_1 + de_2) = (ac - bd)\, e_1 + (ad + bc)\, e_2$

é fácil estabelecer que $e_1^2 = e_1 \cdot e_1 = e_1$ e que $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2$; $e_2^2 = -e_1$, $e_1 \cdot (a, b) = (a, b) = (a, b) \cdot e_1$ o que mostra que a unidade e_1 desempenha no campo complexo o mesmo papel que 1 no campo real. Por outro lado, é fácil mostrar que entre os números complexos da forma $k \cdot e_1$ (k real) e os números reais k se pode estabelecer uma correspondência *isomorfa*,

[1] «Lições de Algebra e Análise», Bento Caraça.

podendo portanto convencionar-se escrever k em lugar de $k \cdot e_1$, o que corresponde a assimilar os números $k \cdot e_1$ aos números reais k (como $1 \cdot e_1 = e_1$, escrever-se-à 1 em lugar de e_1). Nestes termos é $(a, b) = a + b \cdot e_2$, $e_2^2 = -1$. Usando a letra i, em vez de e_2, aparece então a forma $a + bi$ para o par (a, b).

4 — Os exemplos podiam multiplicar-se. Particularmente, o livro é fertilíssimo na apresentação de formas imprecisas de expor, contradições e inferências ilegítimas. Porém, limitamos por aqui as citações. Antes de passarmos ao capítulo II — Teoria de Limites — apontemos outro facto, que se nos mostra absolutamente incompreensível. No estudo da equação de Diofante $ax + by = c$, ao demonstrar que $D(a, b) = 1$ implica a existência de soluções inteiras, o Autor serve-se de uma equação auxillar $au - bv = 1$ e prova para esta equação a existência de soluções inteiras. Que necessidade, melhor, que vantagem oferece a equação auxiliar na forma utilizada pelo professor A. A. Lopes? O que o Autor diz para a equação auxiliar poderia dizê-lo, ipsis verbis, para a equação sem mais nem menos rigor. O que poderia ter feito era associar à equação $ax + by = c$ a equação auxiliar $Au - Bv = 1$, onde A e B são os módulos de a e b. Conseguiria assim manter-se no quadro da Aritmética dos números positivos, a que estão limitados os alunos. É o que faz, por exemplo, o Prof. Vicente Gonçalves no seu Compêndio de Álgebra para o 7.º ano. O que não se compreende, de modo algum, é a substituição de $ax + by = c$ por $au - bv = 1$.

5 — Deixamos para lugar à parte o capítulo II sobre Limites. Quer pela forma infeliz por que é tratado este assunto, quer pela sua importância, entendemos que lhe devia ser dado um especial relevo. Mas, porque esta crítica já vai longa e ainda porque julgamos que pode ser útil aos leitores da «Gazeta de Matemática» de qualquer modo ligados ao Ensino Liceal a publicação dum pequeno estudo sobre limites, que abranja os diferentes tópicos do programa, deixaremos, para um próximo número, parte do que queríamos dizer à volta deste assunto. Por agora, vamo-nos limitar a apontar algumas das deficiências de que enferma a exposição desta matéria no livro do professor A. A. Lopes.

As noções de «infinitamente grande» e «infinitamente pequeno» são apresentadas sob forma confusíssima. O Autor, depois de abordar (e bem) o caso de sucessões de termos positivos, parece pretender generalizar ao caso de funções de variável contínua. No entanto, tudo fica tão pouco claro que nós próprios (e não podemos neste momento deixar de recordar os estudantes do 6.º ano) não sabemos se o Autor se refere a funções de variável contínua ou a sucessões, ao concluir, a pág. 45 e 46, com as definições respectivamente, de infinitamente grande e de infinitamente pequeno. No caso de se tratar de funções de variável contínua, as definições não servem; no 2.º caso (hipótese que consideramos pouco provável) tudo ficou restrito a sucessões, tornando-se portanto deslocados os exemplos que apresenta e, pior do que isso, ficando sem base tudo quanto é exposto a seguir.

A noção dada de «infinitésimos simultâneos» (expressão infelicíssima, mas oficialmente consagrada...) *não tem qualquer conteúdo*[1]. Em face dessa definição, pág. 47, *todos os infinitésimos são simultâneos*. O Autor em período seguinte — numa semi-correcção — fala na possível dependência entre ε e δ, *achando que essa dependência está implícita na definição dada* (!!), mas mesmo esta referência é infeliz e inconsequente, como o revela o exemplo que deu a seguir, exemplo que completa a péssima (e errada) exposição deste número do § I. Os n.ºs 4 e 5 do mesmo § I, respeitantantes a leis operatórias e outros teoremas sobre infinitésimos, apresentam várias deficiências, embora de menos gravidade; é por ex., lamentável o enunciado seguinte: «Se a e b são duas quantidades finitas e fixas e se a diferente de $a - b$ é um infinitésimo, essas duas quantidades são iguais».

O § II — limites de variáveis e de funções — mantém o nivel do parágrafo anterior. De resto, alguns dos seus erros não são mais que a repetição dos que aparecem no § I. Começa o Autor por definir, neste § II, «limite de uma variável independente» (terá sentido falar-se em limite de uma variável independente?) dando uma «definição» inteiramente destituída de sentido, que não traduz possívelmente o que estava no seu espírito. Na definição de limite de uma função, pag. 56, o Autor, à maneira de síntese, diz: «Esta definição traduz-se analíticamente pelas desigualdades 7) $|x - a| < \varepsilon$; $|y - b| < \delta$ e significa: — *aos valores de* x *que verificam a primeira correspondem valores de* y *que verificam a segunda*, quando ε e δ são positivos e arbitrários. Nos termos da parte final do n.º 3 — A, da pág. 48, δ depende, em geral, de ε». Notam-se aqui erros e contradições; assim, por um lado ε e δ são positivos e arbitrários (*erro grave*) e, por outro lado, δ depende em geral de ε, isto é $\delta = f(\varepsilon)$, o que contradizendo a primeira afirmação, mantém contudo o erro, visto que seria essencial frizar o carácter de independência de δ e não de ε, como o Autor sugere escrevendo

[1] O próprio Autor usa o termo em sentidos diferentes; ora considerando *infinitésimos ligados* como sinónimo de infinitésimos simultâneos, ora considerando dois infinitésimos quaisquer como simultâneos.

$\delta = f(\varepsilon)$. O n.º relativo a limites à direita e limites à esquerda mantém estes erros.

Quanto ao § IV, relativo à continuidade, tudo se passa afinal no mesmo plano do § II. Destacamos no entanto: o título do n.º 17 — *definição intuitiva de continuidade* — e respectivas considerações; as observações que seguem a definição analítica de continuidade, pag. 72; tudo quanto diz sobre continuidade à esquerda e à direita.

6 — Em conclusão, parece-nos que a obra, objecto desta crítica, não satisfaz para ser utilizada como livro único de ensino. Não podemos deixar de repetir neste momento algumas das afirmações feitas de início. Recai, não só sobre o Autor, mas também sobre a Comissão que apreciou os livros em concurso, a alta responsabilidade de terem fornecido a professores e estudantes um mau instrumento de trabalho que não preenche devidamente as condições exigíveis em livros desta índole. Admira-nos sobretudo que nenhum dos professores da Comissão de Apreciação tivesse sentido a gravidade dos erros e defeitos que apontamos (ou outros que não referimos). E não há dúvida de que pelo menos a Comissão, colectivamente, não a sentiu, pois de contrário seria obrigada como está expresso em disposições legais, a propor ao Autor as modificações convenientes.

Que essas modificações apareçam brevemente, ou pelo menos na próxima edição deste trabalho, para bem do Ensino da Matemática no nosso país.

LAUREANO BARROS

PROBLEMAS

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2399 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Mostre que [1]

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n^{p-1}} (n!)^{(p-1)/n} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 .$$

R: *Pretende-se calcular a soma da série cujo termo geral é* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n^{p-1}} (n!)^{(p-1)/n}$. *Ponhamos*

$$\varphi(n) = \left(\frac{p}{n^{p-1}}\right)^n (n!)^{p-1} .$$

Sabe-se que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varphi(n)}$ *e estes limites são iguais.*

Ora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} \left[p \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(p-1)} \right] = p \left(\frac{1}{e}\right)^{p-1} .$$

Para determinar a soma da série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{1}{e}\right)^{p-1}$, *notemos que a série geométrica* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x^p$, *convergente no intervalo aberto* $(-1, 1)$, *tem por soma* $\frac{x}{1-x}$ *e a série* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p x^{p-1}$, *obtida da anterior por derivação termo a termo, é uniformemente convergente em* $(-1, 1)$ *e, por isso, a sua soma pode calcular-se derivando* $\frac{x}{1-x}$. *Como a derivada de* $\frac{x}{1-x}$ *no ponto* $\frac{1}{e}$ *é precisamente* $\left(\frac{e}{e-1}\right)^2$, *fica provado o que se pretendia.*

2543 (*Gaz.. Mat.* nº 34) — Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} (p!)^{r/p} \Big/ \sum_{p=1}^{n} p^r \right) = e^{-r} .$$

R: *Seja* $f(n) = \varphi(n)/\psi(n)$; *Sabe-se que, se existe* $\lim\limits_{n\to\infty} [(\varphi(n) - \varphi(n-1))/(\psi(n) - \psi(n-1))]$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ *e estes limites são iguais. Fazendo então* $\varphi(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} (p!)^{r/p}$ *e* $\psi(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} p^r$, *vem*

$$\frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{\psi(n) - \psi(n-1)} = \left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)^r .$$

Sabe-se ainda que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\theta(n+1)}{\theta(n)}$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\theta(n)}$ *e estes limites são iguais (caso seja* $\theta(n) \geqslant 0$*).*

Pondo $\theta(n) = n!/n^n$, *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n+1)}{\theta(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} ,$$

donde se conclui que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = e^{-r}$, *c. q. d.*

Solução dos 2 problemas anteriores de José C. Morgado J.or

[1] É este o enunciado correcto do problema e não o publicado, por engano, no n.º 31 da revista.