

REDACTORES PRINCIPAIS: *J. Morgado e M. Zaluar*EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

HOMENAGEM A DESCARTES

Associando-se às homenagens prestadas ao grande pensador em todo o mundo civilizado por ocasião do tricentenário da sua morte, a Gazeta de Matemática julgou oportuno consagrar-lhe uma parte do presente número publicando um artigo original da autoria do seu colaborador António Gião e uma pequena antologia.

Rationalisme cartésien et positivisme expérimental dans la science moderne

par António Gião

Si le rôle fondamental que Descartes a joué — à côté de Galilée, Newton, Faraday, Maxwell, Einstein, . . . — dans l'élaboration de la Physique n'est pas très évident de prime abord, cela tient surtout au fait que sa contribution essentielle a consisté beaucoup moins en méthodes et résultats théoriques et expérimentaux qu'en une affirmation véhémement et fière de l'autonomie et de l'unicité de la raison considérée comme moyen de connaissance. Pour la première fois dans l'histoire de la pensée, l'activité de la raison a été envisagée systématiquement, non seulement comme l'unique moyen efficace de déduction — ce que la plupart des systèmes constructifs avaient fait précédemment —, mais encore et surtout comme possédant intrinsèquement un critérium permettant de juger en dernière instance de l'admissibilité des postulats. Ce critérium cartésien du vrai n'est que l'évidence immédiate d'un concept sous la lumière de la raison, c'est-à-dire la propriété qu'a un concept vrai d'être tel que son contraire puisse être jugé sans hésitation comme inadmissible. Aucune imposition de l'autorité extérieure (à laquelle s'est soumise et se soumet encore toute raison scolastique), aucun élément neutre ou inassimilable ne vient s'in-

troduire dans l'activité de la raison cartésienne: elle est donc à la fois tautologique et créatrice et ses créations sont faites de la même «étouffe» qu'elle même. C'est précisément la découverte de l'autonomie créatrice de la raison qui constitue à notre avis l'apport historique impérissable de Descartes; et le rationalisme moderne, dont il est incontestablement l'initiateur, se distingue facilement de tant de pseudo-rationalismes parce qu'il admet essentiellement que la raison est une activité dynamique, créatrice, autonome. De plus, l'opération intrinsèque de la raison cartésienne par laquelle elle décide de l'admissibilité d'un postulat n'est pas une opération idéale ou fictive, soustraite au temps. En effet, comme tout autre phénomène, la raison évolue et son fonctionnement devient plus souple à la suite de son effort progressif d'adaptation à un «réel» plus profondément et plus minutieusement exploré par l'observation et par l'expérience. La reconnaissance de ce fait est l'autre apport fondamental du cartésianisme.

Il est extrêmement intéressant de constater le peu d'importance et d'efficacité — à quelques exceptions près — des résultats obtenus par Descartes en Physique (et généralement dans les Sciences Naturelles)

par application de sa méthode théorique en partant de postulats soumis à l'épreuve de l'évidence cartésienne. Cela tient sans doute partiellement à l'état peu avancé de la science expérimentale de son temps, dont les résultats n'avaient pas la finesse et la généralité requises pour suggérer des principes à la raison, déclencher son activité créatrice et la guider dans le choix de postulats réellement constructifs. Mais la cause principale de cet échec nous semble être un fait fondamental dont Descartes ne paraît pas avoir été pleinement conscient: nous voulons parler du fait que les postulats de la Science — et de la Philosophie de la Nature — ne sont véritablement constructifs et efficacement explicatifs que s'ils sont quantitatifs, plus exactement, susceptibles d'être exprimés mathématiquement. La raison essentielle de ce fait, qui n'est qu'un aspect du problème central de l'adaptation biunivoque de la mathématique au réel, n'a pas besoin d'être élucidée dans cet article (1). Bornons-nous ici à ne pas l'oublier et à en tirer la conséquence évidente que l'idéal cartésien ne peut être atteint par une théorie physique qu'à l'aide d'une technique mathématique suffisamment évoluée et d'autant plus souple que les postulats initiaux visent à plus de généralité. La mathématique de Descartes et de ses contemporains était simplement «statique», ne possédant aucune des notions (celles de fonction en général, de dérivée, d'équation différentielle) nécessaires pour représenter le mouvement. Aucune Mécanique ne pouvait donc se développer avant la création ou adaptation par Newton — héritier des lois expérimentales de Galilée — de l'outillage mathématique indispensable. Bien que les lois principales de la dynamique galiléenne expérimentale ne puissent évidemment être traitées comme des principes cartésiens, la dynamique de Newton est néanmoins une construction théorique cartésienne, car elle peut être considérée comme un développement rationnel à partir d'un petit nombre de postulats (dont celui de la conservation de l'énergie de tout système mécanique isolé) pouvant subir avec succès l'épreuve de l'évidence cartésienne à la lumière de la raison envisagée, cela va sans dire, dans son développement historique.

Il en est de même de l'électromagnétisme de Maxwell qui, fondé sur la découverte expérimentale du champ et de ses lois par Faraday, et utilisant la notion de système d'équations aux dérivées partielles, appropriée à la description du changement — comme

la dynamique newtonienne avait utilisé la notion de système d'équations différentielles ordinaires, suffisante pour traduire le cas particulier du changement qu'est le mouvement proprement dit —, n'est, en réalité, que le développement mathématique des conséquences des postulats d'esprit cartésien d'action de contact et de conservation de l'énergie appliqués au champ électromagnétique.

Examinons maintenant la Relativité. Dans son développement historique elle ne semble pas cartésienne. Le postulat de l'invariance et de l'isotropie de la vitesse des actions électromagnétiques dans le vide (pour ne parler que des principes de base de la Relativité restreinte) ne possède évidemment pas l'évidence cartésienne, surtout quand on l'envisage, comme cela doit être, à la lumière de la raison telle qu'elle fonctionnait au début du siècle. Mais le développement logique de la Relativité ne coïncide pas du tout avec son développement historique et expérimental. La Relativité généralisée est la partie essentielle, fondamentale de l'ensemble, dont la Relativité restreinte n'est qu'un cas particulier. Or, la Relativité générale peut être considérée comme un développement logique à partir du postulat — évidemment cartésien si l'on admet l'autonomie et l'autodétermination complètes de l'Univers (1) — d'après lequel les propriétés du contenant (espace-temps) de l'Univers et de ses contenus (matière, électricité) se déterminent complètement et mutuellement. Ce postulat, qui requiert, pour être exprimé, la technique mathématique de la théorie des hypersurfaces, n'a jamais été rendu explicite d'une manière formelle par Einstein et probablement n'a même pas été présent à sa conscience de façon nette et systématique — de même que le principe de conservation de l'énergie n'a pas été aperçu par Newton —; c'est cependant lui qui nous semble exprimer l'essentiel de la Relativité. Il en découle non seulement que le contenant de l'Univers est un espace de Riemann à quatre dimensions et à métrique hyperbolique normale, mais encore la possibilité d'une théorie unitaire relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme.

On voit donc qu'il existe, depuis Galilée et Newton, un vaste courant d'esprit cartésien qui doit tendre vers une théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme, réalisant précisément l'idéal rêvé confusément par Descartes mais qu'il n'a pu et ne pouvait réaliser, car la technique mathématique d'alors lui permettait à peine de dépasser le stade des balbutiements qualitatifs et des pseudo démonstrations verbales.

À côté de ce courant, nous voyons apparaître dans la Physique, depuis l'introduction de l'interprétation probabiliste des résultats de la Mécanique quantique,

(1) Nous avons effleuré ce problème dans une précédente étude intitulée «Vers une réhabilitation du déterminisme» (*Gazeta de Matem.*, 43, 1950).

un courant nettement positiviste expérimental. En effet, partant des restrictions inhérentes à toute mesure «simultanée» des variables caractéristiques des états d'un système, du fait des interactions inévitables entre observateurs et appareils de mesure d'une part, et système observé d'autre part, les adeptes du courant d'idées positivistes en physique élèvent ces restrictions au rang de propriétés absolument fondamentales de l'Univers. Ils en déduisent tout naturellement, par la généralisation du raisonnement bien connu qui conduit aux relations d'incertitude $\Delta p. \Delta q \leq h/2\pi$, un principe nettement formulé pour la première fois par Bohr, appelé par lui «principe de complémentarité», selon lequel il serait de l'essence même des choses que l'observation de plus en plus précise de certaines propriétés de la Nature entraîne l'inobservabilité d'autant plus accusée de propriétés complémentaires, c'est-à-dire leur rejet progressif dans la non existence, en attachant au mot existence sa signification positiviste. Seul l'ensemble des variables complémentaires constitue l'observable (qu'il ne faut pas confondre avec le simultanément observable), toute autre grandeur ne pouvant être qu'un intermédiaire de calcul inobservable et donc sans existence physique. D'accord cependant avec les exigences positivistes, ces inobservables doivent en réalité être éliminés de l'expression des lois dans une Mécanique quantique parfaitement positiviste et conforme à l'esprit du principe de complémentarité. Il est clair, dans ces conditions, que toute loi sur l'évolution d'un système ne peut être que de nature probabiliste, puisque le principe de complémentarité nous oblige à considérer l'état initial qui déterminerait les états futurs comme non parfaitement défini, ou plutôt comme non entièrement réalisé. C'est ainsi, par exemple, que d'après cette position positiviste extrême en physique théorique (qui est cependant celle qui semble prévaloir dans beaucoup de cercles), un électron dont la position a été déterminée avec précision par une expérience ne possède pas de quantité de mouvement bien définie; il est impossible de dire que la notion de vitesse lui soit alors applicable. Inversement, si une expérience a déterminé, ou plutôt fixé, la quantité de mouvement de l'électron, sa position est complètement indéterminée, autrement dit il est alors une entité non localisable dans l'espace (et dans le temps), transcendant en quelque sorte la description spatio-temporelle. Le principe de complémentarité nous obligerait donc à admettre que les entités élémentaires qui constituent l'Univers ne résident pas dans l'espace et dans le temps, ou plutôt que le cadre spatio-temporel ne serait qu'un effet macroscopique dans lequel il serait impossible d'inclure les entités

élémentaires d'une manière tout-à-fait adéquate. La complémentarité des propriétés proviendrait justement de notre effort pour introduire les entités élémentaires dans un cadre qui ne leur convient pas. On voit que ce prétendu positivisme expérimental quantique mène tout droit à la conception d'un monde nouménal inconnaissable et transcendant dont le monde spatio-temporel ne serait qu'un effet statistique. Cette conclusion est étrange pour un système qui se prétend strictement positiviste et cela seul devrait nous mettre en garde contre ce courant d'idées, d'autant plus qu'il est nettement anti cartésien. La règle de l'élimination de toute grandeur inobservable des équations d'une théorie provient en réalité d'une interprétation injustifiée des exigences de la méthode expérimentale et hypertrophie le rôle que doit jouer l'expérience dans l'élaboration de la Physique théorique. Une construction abstraite doit être évidemment confirmée *a posteriori* par l'expérience, mais ses postulats de base, bien que naturellement suggérés par toute l'ambiance créée par la science expérimentale d'une époque donnée, sont formés au sein de la raison (elle-même historiquement informée par les résultats empiriques), et il est parfaitement légitime de les considérer comme des principes *a priori*, parfois aussi éloignés de l'expérience que les postulats de la Géométrie moderne. L'adoption des points de vue et des conclusions du «positivisme quantique» équivaut donc pour nous à un manque de confiance en la raison, à un abandon desséchant des postulats les plus généraux et les plus constructifs, pour se limiter à des principes selon lesquels l'Univers spatio-temporel aurait uniquement des propriétés quantifiées.

Cette sorte d'ascèse positiviste est non seulement anticartésienne et inutilement restrictive mais encore anti relativiste. En effet, l'expression la plus générale du principe de relativité conduit avant tout à un système d'équations du champ faisant intervenir des fonctions de nature à la fois géométrique et physique, essentiellement non quantifiées, et l'on ne peut nier à ces fonctions l'existence physique qu'en niant simultanément la validité du principe général de relativité. Certaines fonctions qui apparaissent dans les équations du champ (tenseurs de densité d'énergie-quantité de mouvement) peuvent néanmoins être exprimées à l'aide d'un ensemble dénombrable de fonctions d'onde de base dont les développements spectraux suivant les opérateurs linéaires et hermitiens correspondent précisément à la quantification générale des propriétés. Ainsi, l'élargissement de la Relativité en vue de la transformer en une théorie unitaire au moyen du principe qui, selon nous, en exprime l'essence et selon lequel il y a une détermination complète et réciproque du contenant et des contenus de l'Univers, conduit,

comme nous l'avons montré ailleurs en détail⁽²⁾, à la conception de deux modes d'existence physique, l'un non quantifié, l'autre quantifié, également réels et macroscopiquement équivalents. Il est essentiel d'ajouter que la justification de la quantification est indépendante de l'interprétation probabiliste de la Mécanique quantique. En réalité, la quantification véritablement relativiste exclut une telle interprétation, puisqu'il est facile de montrer⁽³⁾ que la notion de densité spatiale de probabilité d'un événement, qui est à la base de l'interprétation probabiliste, n'est plus applicable lorsque les propriétés géométriques du domaine spatial occupé par le système étudié ne peuvent pas être considérées comme euclidiennes. C'est ce qui a lieu dans tout système soumis à un champ de gravitation ou à un champ électromagnétique. D'une manière générale, il est nécessaire de remplacer les notions probabilistes par des notions déterministes (en particulier la notion de densité de probabilité de présence par celle de densité d'intensité de présence).

L'interprétation probabiliste des fonctions d'onde Ψ des équations de la Mécanique ondulatoire quantique n'est possible qu'en admettant que ces Ψ ne décrivent en réalité que des états virtuels, imposés arbitrairement à un système en considérant des déplacements virtuels compatibles avec les conditions aux limites. Un tel Ψ virtuel n'est évidemment pas soumis aux restrictions qui proviennent du caractère non

euclidien de la géométrie de l'Univers et il est possible de l'assujettir aux conditions requises pour former avec lui une densité de probabilité de présence. On ne peut cependant pas déduire de ces Ψ virtuels que le comportement réel des entités élémentaires soit de nature probabiliste⁽⁴⁾.

Ces considérations, dont nous n'avons donné ici qu'un résumé schématique, nous semblent permettre de conclure à la fragilité de la base du «positivisme quantique expérimental». Pour nous faire abandonner à contre coeur le grand courant cartésien qui nous semble être en quelque sorte le «fleuve de vie» de la science moderne, ce positivisme, nettement anti relativiste sous les apparences, devrait s'étayer sur des arguments plus solides. Malgré la «séduction» facile de quelques unes de ses conséquences, que l'on n'a évidemment pas manqué de mettre en épingle comme des preuves «décisives» en faveur de la vague d'assaut de l'irrationalisme contemporain (déguisé souvent en rationalisme), continuons donc fermement attachés à l'esprit de la Méthode que Descartes nous a léguée. Pardonnons lui d'avoir souvent donné à sa pensée une forme édulcorée: l'essentiel de ce qu'il avait à nous communiquer était à son époque suffisamment «suspect» pour qu'il se crût obligé de le faire accepter en l'enrobant d'un certain conformisme scolastique. Mais il faut savoir lire entre les lignes en lisant Descartes.

⁽²⁾ Cf. *loc. cit.* pour les références bibliographiques.

⁽³⁾ Cf. notre étude «Intensité et probabilité dans les systèmes spatio-temporels» (*Bol. Soc. Port. Mat.* (A), 1, 1947, pags. 29-40).

⁽⁴⁾ Cf. notre mémoire «Sur la signification des fonctions d'onde en théorie unitaire et en mécanique ondulatoire» (*Comptes rendus du Congrès international de Philosophie des Sciences* d'Octobre 1499, Paris, Hermann, sous presse).

Os determinantes Wronskianos

por J. Ribeiro de Albuquerque

Sejam y_1, y_2, \dots, y_n , n funções de uma variável x , definidas num mesmo intervalo (a, b) e admitindo em (a, b) derivadas sucessivas até à ordem $n-1$, inclusivè.

Suponhamos que estas n funções são linearmente dependentes, isto é, suponhamos que existe, definida em cada ponto de (a, b) , uma relação

$$(1) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0,$$

para valores não todos nulos das constantes c_1, c_2, \dots, c_n .

Derivemos a relação (1), $n-1$ vezes, até formar o sistema

$$\sum_k c_k y_k^{(j)} = 0 \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

A condição necessária para este sistema, linear e homogéneo nas constantes, ter uma solução não nula, é que seja nulo em cada ponto de (a, b) o determinante do sistema, isto é, seja identicamente nulo em (a, b) o determinante

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = |y_k^{(j)}| \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

A este determinante dá-se o nome de *Wronskiano das funções* y_k .

Do que se disse resulta uma propriedade importante dos determinantes Wronskianos que pode ser assim enunciada: