comme nous l'avons montré ailleurs en détail [2], à la conception de deux modes d'existence physique, l'un non quantifié, l'autre quantifié, également réels et macroscopiquement équivalents. Il est essentiel d'ajouter que la justification de la quantification est indépendante de l'interprétation probabiliste de la Mécanique quantique. En réalité, la quantification véritablement relativiste exclut une telle interprétation, puisqu'il est facile de montrer [3] que la notion de densité spatiale de probabilité d'un événement, qui est à la base de l'interprétation probabiliste, n'est plus applicable lorsque les propriétés géométriques du domaine spatial occupé par le système étudié ne peuvent pas être considérées comme euclidiennes. C'est ce qui a lieu dans tout système soumis à un champ de gravitation ou à un champ électromagnétique. D'une manière générale, il est nécessaire de remplacer les notions probabilistes par des notions déterministes (en particulier la notion de densité de probabilité de présence par celle de densité d'intensité de présence).

L'interprétation probabiliste des fonctions d'onde Ψ des équations de la Mécanique ondulatoire quantique n'est possible qu'en admettant que ces Ψ ne décrivent en réalité que des états virtuels, imposés arbitrairement à un système en considérant des déplacements virtuels compatibles avec les conditions aux limites. Un tel Ψ virtuel n'est évidemment pas soumis aux restrictions qui proviennent du caractère non euclidien de la géométrie de l'Univers et il est possible de l'assujettir aux conditions requises pour former avec lui une densité de probabilité de présence. On ne peut cependant pas déduire de ces Ψ virtuels que le comportement réel des entités élémentaires soit de nature probabiliste [4].

Ces considérations, dont nous n'avons donné ici qu'un résumé schématique, nous semblent permettre de conclure à la fragilité de la base du «positivisme quantique expérimental». Pour nous faire abandonner à contre coeur le grand courant cartésien qui nous semble être en quelque sorte le «fleuve de vie» de la science moderne, ce positivisme, nettement anti relativiste sous les apparences, devrait s'étayer sur des arguments plus solides. Malgré la «séduction» facile de quelques unes de ses conséquences, que l'on n'a évidemment pas manqué de mettre en épingle comme des preuves «décisives» en faveur de la vague d'assaut de l'irrationalisme contemporain (déguisé souvent en rationalisme), continuons donc fermement attachés à l'esprit de la Méthode que Descartes nous a léguée. Pardonnons lui d'avoir souvent donné à sa pensée une forme édulcorée: l'essentiel de ce qu'il avait à nous communiquer était à son époque suffisamment «suspect» pour qu'il se crût obligé de le faire accepter en l'enrobant d'un certain conformisme scolastique. Mais il faut savoir lire entre les lignes en lisant Descartes.

---

(2) Cf. *loc. cit.* pour les références bibliographiques.

(3) Cf. notre étude «Intensité et probabilité dans les systèmes spatio-temporels» (*Bol. Soc. Port. Mat.* (A), I, 1947, pags. 29-40).

(4) Cf. notre mémoire «Sur la signification des fonctions d'onde en théorie unitaire et en mécanique ondulatoire» (*Comptes rendus du Congrès international de Philosophie des Sciences* d'Octobre 1499, Paris, Hermann, sous presse).

Os determinantes Wronskianos

por **J. Ribeiro de Albuquerque**

Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$, n funções de uma variável x, definidas num mesmo intervalo (a, b) e admitindo em (a, b) derivadas sucessivas até à ordem $n-1$, inclusivè.

Suponhamos que estas n funções são linearmente dependentes, isto é, suponhamos que existe, definida em cada ponto de (a, b), uma relação

$$(1) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0,$$

para valores não todos nulos das constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Derivemos a relação (1), $n-1$ vezes, até formar o sistema

$$\sum_k c_k y_k^{[J]} = 0 \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \cdots, n \\ J = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

A condição necessária para este sistema, linear e homogéneo nas constantes, ter uma solução não nula, é que seja nulo em cada ponto de (a, b) o determinante do sistema, isto é, seja identicamente nulo em (a, b) o determinante

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = |y_k^{[J]}| \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \cdots, n \\ J = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

A este determinante dá-se o nome de *Wronskiano das funções* y_k.

Do que se disse resulta uma propriedade importante dos determinantes Wronskianos que pode ser assim enunciada:

PROPRIEDADE 1. *A condição necessária para* n *funções* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *serem linearmente dependentes em* (a, b), *é que seja identicamente nulo em* (a, b) *o seu Wronskiano* $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$.

Estudemos de perto este notável tipo de determinantes.

Chamaremos determinante funcional a todo o determinante cujos elementos são funções.

Entre os determinantes funcionais vamos considerar uma categoria muito geral, constituída pelos determinantes Δ_n, n qualquer finito, assim definidos:

DEFINIÇÃO 1. Chamaremos Δ_n a um determinante de ordem n, $|f_{ik}|$, cujos elementos são funções de uma variável x, definidas, contínuas e admitindo derivada nos pontos de um mesmo intervalo (a, b).

Os determinantes Wronskianos pertencem à categoria considerada e propomo-nos resolver o problema da sua caracterização naquela categoria.

Consideremos, para isso, a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO P_n. *Se num determinante* Δ_n, *a derivada de um qualquer menor de ordem* p, Δ_p, *contido em* p *linhas consecutivas de* Δ_n, *é o determinante que se obtem derivando os elementos da última linha de* Δ_p, *então* Δ_n *é o Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha.*

A proposição P_n é verdadeira para $n=2$. Com efeito, tem-se por hipótese:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{vmatrix}$$

e portanto: $f'_{11} f_{22} = f'_{12} f_{21}$, ou ainda: $\dfrac{f_{21}}{f'_{11}} = \dfrac{f_{22}}{f'_{12}} = k$, o que dá para Δ_2, a forma:

$$\Delta_2 = k \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{11} & f'_{12} \end{vmatrix};$$

mas derivando e comparando o resultado com o valor da derivada admitido por hipótese, vem $k=1$, o que prova a proposição P_2.

Vamos em seguida supor a proposição P_n verdadeira, e concluir que P_{n+1} será também verdadeira.

Consideremos um determinante Δ_{n+1}, onde as derivadas Δ'_p de qualquer menor Δ_p contido em p linhas consecutivas, se obtem derivando a última linha de Δ_p.

Em tal hipótese os complementos algébricos dos elementos da primeira linha de Δ_{n+1} são determinantes de ordem n, tais que a derivada Δ'_p de um qualquer seu menor Δ_p contido em p linhas consecutivas é o determinante que se obtem derivando a última linha de Δ_p.

Esses complementos algébricos estão nas condições exigidas na proposição P_n, que vamos supor verdadeira.

Tais complementos algébricos serão então Wronskianos das funções elementos da respectiva primeira linha.

Mas os menores de segunda ordem contidos nas duas primeiras linhas de Δ_{n+1}, são, em virtude da proposição P_2, Wronskianos das funções elementos da respectiva primeira linha, e isso leva a concluir que Δ_{n+1}, é ele também, um Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha.

Demonstrou-se assim por indução matemática que a proposição P_n é verdadeira qualquer que seja n finito.

Consideremos agora a proposição seguinte, recíproca da anterior:

PROPOSIÇÃO π_n. *Se* Δ_n *é Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha, então a derivada de um qualquer seu menor* Δ_p, *de ordem* p *contido em* p *linhas consecutivas, é o determinante que se obtem derivando a última linha de* Δ_p.

A Proposição π_n é verdadeira para $n=2$. Com efeito, temos nesse caso:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{11} & f'_{12} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{11} & f'_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f''_{11} & f''_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f''_{11} & f''_{12} \end{vmatrix}.$$

Suponhamos a proposição π_n verdadeira e tomemos um Wronskiano de $n+1$ funções cujo desenvolvimento segundo os elementos da última linha, será

$$\Delta_{n+1} = \sum_k f_k^{(n)} \Delta_{nk};$$

derivando, vem

$$\Delta'_{n+1} = \sum_k f_k^{(n+1)} \Delta_{nk} + \sum_k f_k^{(n)} \Delta'_{nk}. \tag{2}$$

Seja Δ_p um menor de ordem $p \leqslant n$ do determinante Δ_{n+1}; dois casos se podem dar: ou as p linhas consecutivas de Δ_p são as últimas p linhas de Δ_{n+1}, ou não o são. Não o sendo, o menor Δ_p é também menor de certo A_{nk} que é um Wronskiano verificando a proposição π_n. Se Δ_p está contido nas p últimas linhas de Δ_{n+1}, vem para ele um desenvolvimento análogo ao já obtido para Δ_{n+1}.

$$\Delta_p = \sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n)} \Delta_{n\alpha_k}$$

cuja derivada é

$$\Delta'_p = \sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n+1)} \Delta_{n\alpha_k} + \sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n)} \Delta'_{n\alpha_k}.$$

Mas os determinantes $\Delta_{n\alpha_k}$ são menores de ordem $p-1$ de certos $A_{n\alpha_k}$ e portanto $\sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n)} \Delta'_{n\alpha_k}=0$. Então, vem $\Delta'_p=\sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n+1)} \Delta_{n\alpha_k}$ o que permite afirmar que também estes menores Δ_p verificam a proposição π_n. Resta provar que a derivada do próprio Δ_{n+1} se obtem com a mesma lei; mas isso resulta de (2) visto que é também

$$\sum_k f_k^{(n)} \Delta'_{nk} = 0 .$$

A proposição π_n é verdadeira qualquer que seja n finito. Podemos portanto enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1. *A condição necessária e suficiente para um determinante Δ_n ser um Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha, é que a derivada Δ'_p de um qualquer seu menor Δ_p contido em* p *linhas consecutivas, seja o determinante que se obtem derivando os elementos da última linha de Δ_p.*

Para o caso de ser $p=n$, resulta do teorema a propriedade dos Wronskianos, conhecida com o seguinte enunciado.

Propriedade 2. *A derivada de um determinante Wronskiano obtem-se derivando a sua última linha.*

Como é fácil de ver o teorema 1 resulta por sua vez da propriedade 2. O teorema e a propriedade são lògicamente equivalentes. Pode pois dizer-se que a propriedade 2 é uma propriedade *característica* dos Wronskianos.

Consideremos um determinante Δ_n, não necessàriamente um Wronskiano, e suponhamos que num ponto x_0 do intervalo (a, b) onde as funções elementos de Δ_n são definidas, contínuas e admitem derivada, se tem

$$\Delta_n(x_0) = 0 , \quad A_{lm}(x_0) \neq 0$$

representando como é costume fazer-se, por A_{lm} o complemento algébrico do elemento bem determinado $f_{lm}(x)$. Consideremos os sistemas

$$\sum_k A_{ik} f_{jk} = \delta_{ij} \Delta_n - A_{im} f_{jm}$$

$$\begin{cases} j \neq l & j = 1, 2, \cdots, n \\ k \neq m & k = 1, 2, \cdots, n \\ i \neq l & i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} , \quad \delta_{ij} \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = 1 & i = j \end{cases}$$

Todos estes sistemas têm como determinante principal, quando considerados A_{ik} como incógnitas, o determinante A_{lm}. No ponto x_0 aqueles sistemas reduzem-se aos sistemas de Cramer

$$\sum_k A_{ik} f_{jk} = - A_{im} f_{jm} \quad \begin{cases} j \neq l & j = 1, 2, \cdots, n \\ k \neq m & k = 1, 2, \cdots, n \\ i \neq l & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Resolvendo tais sistemas, obtem-se:

$$A_{ik} = - \frac{A_{im}}{A_{lm}} D$$

onde por D se representa o determinante que se obtem de A_{lm} pondo na coluna k os elementos da coluna m de Δ_n.

Mudando com $m-k-1$ inversões a posição destes elementos, obtem-se:

$$A_{ik} = (-1)^{m-k} \frac{A_{im}}{A_{lm}} A_{lk}$$

ou, o que é equivalente

$$(3) \qquad (-1)^k \frac{A_{ik}}{A_{lk}} = (-1)^m \frac{A_{im}}{A_{lm}} .$$

Esta relação verifica-se sempre mesmo até para os valores $k=m$ e $i=l$, como facilmente se vê. São pois relações absolutamente gerais para todos os valores de

$$i = 1, 2, \cdots, n$$
$$k = 1, 2, \cdots, n$$

combinados como se desejar.

Façamos pois o seguinte enunciado:

Se num ponto x_0 *do intervalo* (a, b) *se tem* $\Delta_n(x_0)=0$ *e* $A_{lm}(x_0) \neq 0$ *então, é constante a relação* $(-1)^k \frac{A_{ik}}{A_{lk}}$, *isto é, tem-se sempre:*

$$(-1)^k \frac{A_{ik}}{A_{lk}} = \rho \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

Façamos nas fórmulas (3): $i=s$ e $i=t$, $s \neq t$ e dividamos ordenadamente as expressões que assim se obtêm; virá:

$$\frac{A_{sk}}{A_{tk}} = \frac{A_{sm}}{A_{tm}} = \rho .$$

Estas últimas expressões verificam-se para todos os valores de

$$\begin{cases} s = 1, 2, \cdots, n \\ t = 1, 2, \cdots, n \\ k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

apenas submetidos à condição de ser: $s \neq t$. A constante ρ é arbitrária mas *sempre finita*. Com efeito, tem-se para $t=l$:

$$\frac{A_{sm}}{A_{lm}} = \rho \neq \infty$$

visto que por hipótese se tem $A_{lm}(x_0) \neq 0$.

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2. *É condição necessária e suficiente, para ser nulo num ponto de* (a, b) *o determinante* Δ_n, *sem* *que o seja nesse ponto um dos seus menores de orden* $n-1$, *que se tenha*

$$\frac{A_{sk}}{A_{tk}} = \rho$$

sendo ρ *sempre uma constante finita, e quaisquer que sejam os valores de* s, t, k $(s \neq t)$.

Viu-se que a condição era necessária. Suponhamos que num ponto x_0 do intervalo se tem

$$A_{sk} = \rho\, A_{tk}$$

então também

$$\sum_k f_{sk}\, A_{sk} = \rho \sum_k f_{sk}\, A_{tk}$$

mas sendo $s \neq t$ o segundo membro desta relação é nulo devido a um teorema conhecido sobre os determinantes. Tem-se pois $\Delta_n(x_0) = 0$.

Porém para ρ ser sempre finito será necessàriamente um $A_{ik}(x_0) \neq 0$.

Suponhamos que no intervalo (a, b) se tem identicamente $W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = 0$ e que em cada ponto de (a, b) se não anula um dos menores $A_{ik}(x)$ $k = 1, 2, \cdots, n$.

Tomemos um ponto x_0 do intervalo (a, b) e suponhamos para fixar ideias que é $A_{nn}(x_0) \neq 0$.

Pelo teorema 2, será, para todo o k: $\dfrac{A_{sk}}{A_{tk}} = \rho$ e pondo nestas expressões $s = n$, $t = n-1$, virão

$$A_{n-1,k} = \rho\, A_{nk} \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

Pelo teorema 1, ou mais directamente pela propriedade 2 dos determinantes Wronskianos, temos: $\dfrac{dA_{nk}}{dx} = A_{n-1,k}$, e portanto, seguem-se as expressões:

$$\frac{dA_{n1}}{dx} = \rho\, A_{n1}, \frac{dA_{n2}}{dx} = \rho\, A_{n2}, \cdots, \frac{dA_{nn}}{dx} = \rho\, A_{nn}.$$

Sendo por hipótese $A_{nn}(x_0) \neq 0$ e $A_{nn}(x)$ contínua no ponto x_0, existe uma vizinhança V_{x_0} do ponto x_0, tal que para $x \in V_{x_0}$ é $A_{nn}(x) \neq 0$.

Das relações anteriores resultará

$$A_{nn}\frac{dA_{nk}}{dx} - A_{nk}\frac{dA_{nn}}{dx} = 0 \quad k = 1, \cdots, n-1$$

e em todo o ponto x interior a V_{x_0} se terá

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A_{nk}}{A_{nn}}\right) = 0$$

e portanto existem constantes não todas nulas, dadas por

$$\frac{A_{nk}}{A_{nn}} = C_k.$$

A_{nk} são os complementos algébricos dos elementos da última linha de W, logo será nula a expressão

$$\sum_k A_{nk}\, y_k = 0$$

e portanto nos pontos interiores a V_{x_0} subsiste a relação de dependência linear entre as funções y_k

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{A_{nn}} y_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k\, y_k + y_n = 0.$$

Conclui-se que nos pontos interiores a V_{x_0} é válida a relação

$$(4) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1} + y_n = 0$$

Procuremos um ponto de acumulação de V_{x_0} onde A_{nn} se anule; se não existisse um tal ponto poderíamos tomar uma vizinhança de x_0 contendo V_{x_0} onde fosse ainda válida a relação (4).

Seja x_1 esse ponto e suponhamos $A_{nn-1}(x_1) \neq 0$; por um raciocínio análogo teríamos numa vizinhança V_{x_1} de x_1 uma relação

$$(5) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_{n-2} y_{n-2} + y_{n-1} + k_n y_n = 0.$$

Eliminando entre (4) e (5) y_n virá

$$(k_1 - c_1 k_n)\, y_1 + (k_2 - c_2 k_n)\, y_2 + \cdots +$$
$$+ (k_{n-2} - c_{n-2} k_n)\, y_{n-2} + (1 - c_{n-1} k_n)\, y_{n-1} = 0$$

e esta relação é verificada nos pontos de intersecção das vizinhanças V_{x_0} e V_{x_1} pontos esses onde é $A_{nn} = W[y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}] \neq 0$.

Então tem-se necessàriamente

$$k_1 - c_1 k_n = 0,\ k_2 - c_2 k_n = 0, \cdots, k_{n-2} - c_{n-2} k_n = 0,$$
$$1 - c_{n-1} k_n = 0$$

e as constantes k_n e c_n são proporcionais. Resulta pois que no conjunto $V_{x_0} + V_{x_1}$ coincidem os desenvolvimentos (4) e (5).

O intervalo (a, b) é limitado, poderemos cobri-lo por um número finito de vizinhanças de seus pontos (Teorema de Heine-Borel) e então a relação (4) subsiste no intervalo (a, b).

Poderemos enunciar finalmente esta outra propriedade dos Wronskianos:

PROPRIEDADE 3. *Se num intervalo* (a, b) *é identicamente nulo o Wronskiano* $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ *e em cada ponto de* (a, b) *não é nulo um dos complementos algébricos dos elementos da última linha de* W, *então as funções* y_k *são linearmente dependentes em* (a, b).