# Problèmes de dépouillements

## I — Problèmes intéressant deux candidats

par **Pierre Dufresne**

Les premiers problèmes de probabilités peuvent être ramenés, pour la plupart, à des calculs de probabilités de résultats finaux d'une suite de tirages.

Une collection étant donnée comprenant des nombres connus d'objets appartenant à des familles déterminées on recherche, par exemple, la probabilité pour que, sur $\mu$ tirages effectués il y en ait eu exactement $\alpha$ qui aient fait sortir un objet de la famille $A$, $\beta$ qui aient fait sortir un objet de la famille $B$, $\gamma$ un objet de la famille $C$... etc.

Les conditions des tirages sont fixées à l'avance et on convient généralement qu'ils sont effectués dans une même collection mais tantôt on spécifie qu'un objet sorti à un tirage doit être remis avant le tirage suivant (nous dirons qu'il s'agit d'une suite de tirages identiques) et tantôt que les objets extraits ne sont jamais réintégrés (suite de tirages éliminatifs).

On cherchera, ainsi à déterminer la probabilité pour que, si l'on tire douze cartes d'un jeu de trente deux on sorte six cartes rouges et six cartes noires, ou pour que si on lance six fois un dé il tombe les six fois sur une face différente. C'est dans ce cas le résultat global qui importe: tant de cartes rouges sorties et tant de cartes noires ou tant de tirages ayant fait sortir le chiffre six et tant le chiffre cinq... etc. et non pas l'ordre de chacun des résultats élémentaires. Nous étudierons ici une autre catégorie de problèmes où ce n'est pas le résultat global qui compte, résultat généralement donné d'avance mais la manière dont il pourra être obtenu. Nous les appellerons des problèmes de dépouillements car ils reviennent à calculer, en fonction du nombre total de dépouillements possibles la proportion de ceux qui vérifient une ou plusieurs conditions posées.

Lorsqu'on «dépouille» totalement un jeu de trente deux cartes le résultat final ne fait pas de doute, si on distingue les cartes seulement par leur couleur (rouge ou noir) on sait qu'on sortira du jeu seize cartes rouges et seize cartes noires. Un problème de dépouillement consistera à rechercher la probabilité pour que le nombre des cartes rouges sorties ne soit jamais inférieur, durant tout le dépouillement, au nombre des cartes noires sorties au même moment.

Le principal problème de dépouillement actuellemente traité est connu sous le nom de problème du scrutin.

*Le problème du scrutin.* Il peut s'énoncer de la manière suivante: *Sachant qu'au cours d'un scrutin un candidat* A *a obtenu un nombre* a *de suffrages et un autre candidat* B *un nombre plus petit* b *on demande de calculer la probabilité pour qu'au cours du dépouillement le nombre des bulletins sortis portant le nom de* A *soit toujours supérieur à celui des bulletins sortis portant le nom de* B». Denis André a donné une solution très ingénieuse de ce problème. Nous en donnerons une autre solution fort différente mais, avant de commencer les calculs quelques remarques préliminaires s'imposent: nous voulons mettre en garde le lecteur sur l'interprétation malheureuse qui peut être faite des résultats. Tout problème mathémathique sous-entend des hypothèses qui ne sont que rarement mises en évidence. Dans le cas qui nous occupe l'hypothèse sous-entendue est que tous les dépouillements possibles sont considérés, à priori, comme également probables. En réalité, après une scrutin, les bulletins ne sont généralement pas suffisemment mêlés pour qu'il en soit ainsi. C'est d'autant plus grave que les bulletins ne sont pas déposés dans un ordre quelconque; certaines catégories d'électeurs ont coutume de voter le matin, l'autre l'après-midi, il y a des groupes d'amis ou de sympathisants qui votent ensemble... etc.

Je désignerai par:

$\theta$ le nombre total des bulletins déposés au nom de $A$ ou au nom de $B$. Donc $\theta=a+b$.

$N_{(a,b)}$ le nombre de tous les dépouillements différents possibles de ces $\theta$ bulletins

$$N_{(a,b)}=\frac{\theta!}{a!\,b!}$$

$N_{(a,b)[A>B]}$ le nombre de ces déppouillements dans lesquels, à tout moment le nombre des bulletins dépouillés au nom de $A$ est supérieur à celui des bulletins dépouillés au nom de $B$.

$P_{(a,b)[A>B]}$ la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins sortis portant le nom du candidat $A$ soit supérieur à celui des bulletins sortis portant le nom du candidat $B$.

$$P_{(a,b)[A>B]} = \frac{N_{(a,b)[A>B]}}{N_{(a,b)}}$$

Lemme. *Si* $a+b>1$ *et* $a>b$

$$N_{(a,b)[A>B]} = N_{(a-1,b)[A>B]} + N_{(a,b-1)[A>B]}$$

J'appelle dépouillements favorables ceux dans lesquels $A$ a constamment la majorité sur $B$. Je désigne par groupe I l'ensemble de tous les dépouillements favorables dans le cas où $A$ a obtenu un nombre $a$ de suffrages et $B$ un nombre $b$.

Je désigne par groupe II l'ensemble de tous les dépouillements favorables dans l'un ou l'autre des deux cas suivants:

1.°) $A$ a obtenu un nombre $(a-1)$ de suffrages et $B$ un nombre $b$.

2.°) $A$ a obtenu un nombre $a$ de suffrages et $B$ un nombre $(b-1)$.

Si je supprime de tous les dépouillements du groupe I le dernier bulletin sorti j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe II. Les dépouillements du groupe II sont donc au moins aussi nombreux que ceux du groupe I.

D'autre part si j'ajoute à la fin de tous les dépouillements du groupe II soit un bulletin $A$ si le nombre des bulletins $A$ était $(a-1)$ soit un bulletin $B$ si le nombre des bulletins $B$ était $(b-1)$ j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe I. Les dépouillements du groupe I sont donc au moins aussi nombreux que ceux du groupe II.

D'où il résulte que les nombres de dépouillements des deux groupes sont égaux.

Théorème. *Si* $a \geqslant b$

$$N_{(a,b)[A>B]} = \frac{a-b}{a+b}\,\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

Si $a<b$ il est clair que $N_{(a,b)[A>B]}=0$; la formule donnerait un résultat négatif donc absurde.

Si $a=b$ il est encore immédiat que

$$N_{(a,b)[A>B]}=0$$

la formule donne bien un résultat nul et s'applique à ce cas particulier.

Je suppose $a>b$.

La formule est exacte pour $\theta=1$ c'est à dire en tenant compte de la condition $a>b$ pour $a=1$ et $b=0$.

Je démontrerai que si la formule est exacte pour $\theta=\theta_1-1$ et pour les couples de valeurs de $a$ et de $b$ répondant à la condition $a \geqslant b$, elle est encore exacte lorsque $\theta=\theta_1$ et pour n'importe quelles valeurs de $a$ et de $b$ telles que $a>b$.

En vertu du lemme j'ai le droit d'écrire

$$N_{(a,b)[A>B]} = N_{(a-1,b)[A>B]} + N_{(a,b-1)[A>B]}$$

et en supposant la formule exacte pour $\theta=\theta_1-1$ et $a \geqslant b$

$$N_{(a-1,b)[A>B]} = \frac{a-b-1}{a+b-1}\,\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}$$

$$N_{(a,b-1)[A>B]} = \frac{a-b+1}{a+b-1}\,\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}$$

mais

$$\frac{a-b-1}{a+b-1} = \frac{a-b}{a+b}\left(1-\frac{2b}{(a+b-1)(a-b)}\right)$$

et

$$\frac{a-b+1}{a+b-1} = \frac{a-b}{a+b}\left(1+\frac{2a}{(a+b-1)(a-b)}\right)$$

donc

$$N_{(a,b)[A>B]} = \left[\left(a-\frac{2ab}{(a+b-1)(a-b)}\right)\right] + $$

$$+\left[b+\frac{2ab}{(a+b-1)(a-b)}\right]\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{(a+b-1)!}{a!\,b!} =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\,\frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

Théorème. *Si* $a \geqslant b$

$$P_{(a,b)[A>B]} = \frac{a-b}{a+b}$$

En effet

$$P_{(a,b)[A>B]} = \frac{N_{(a,b)[A>B]}}{N_{(a,b)}} = \frac{\dfrac{a-b}{a+b}\,\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}}{\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}} = \frac{a-b}{a+b}$$

On peut imaginer bien d'autres problèmes de scrutin que celui qui vient d'être traité, par exemple celui ci: *calculer la probabilité pour que le candidat* A *acquière dès le début du dépouillement — c'est à dire avant qu'aucun bulletin au nom de* B *n'ait été sorti — une avance de* $(m+1)$ *suffrages sur le candidat* B *et qu'il conserve cette avance jusqu'à la fin du dépouillement.*

Nous garderons les mêmes notations $a, b, \theta, N_{(a,b)}$ que précédement. Nous designerons en outre par: $N_{(a,b)[A>B+m]}$ le nombre des dépouillements dans lesquels la condition posée est realisée et par $P_{(a,b)[A>B+m]}$ la probabilité pour que cette condition soit realiséé.

$$P_{(a,b)[A>B+m]} = \frac{N_{(a,b)[A>B+m]}}{N_{(a,b)}}.$$

Théorème. *Si* $a \geqslant b+m$ *et* $m \geqslant 0$

$$P_{(a,b)[A>B+m]} = \frac{a-b-m}{a+b-m}\,\frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!}\,\frac{a!\,b!}{(a+b)!}.$$

Si $a < b + m$ la formule est inapplicable puisqu'elle conduit à des résultats négatifs donc absurdes; ou $b$ n'est pas nul et il est clair qu'il ne peut y avoir de dépouillement favorable, ou $b$ est nul et le seul dépouillement possible n'est composé que de bulletins $A$ en nombre insuffisant d'ailleurs pour permettre à $A$ même à la fin du dépouillement de devancer $B$ de plus de $m$ suffrages.

Nous supposerons $a \geqslant b+m$ et nous imaginerons que le dépouillement se passe en deux temps: premier temps: dépouillement de $m$ bulletins; deuxième temps: dépouillement des bulletins restants.

La probabilité cherchée est égale au produit:

— de la probabilité $P_1$ pour que durant le premier temps du dépouillement ce soient toujours des bulletins $A$ qui soient sortis;

— par la probablilité $P_2$ pour que durant le second temps du dépouillement en supposant la condition précédente réalisée et en ne considerant que les bulletins sortis lors de ce second temps, $A$ ait constamment la majorité sur $B$.

Or

$$P_1 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdots \frac{a+1-m}{a+b+1-m} =$$

$$= \frac{a!}{(a-m)!} \, \frac{(a+b-m)!}{(a+b)!} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{a-m-b}{a-m+b}$$

donc

$$P_{(a,b)[A>B+m]} = \frac{a-m-b}{a-m+b} \cdot \frac{a!}{(a-m)!} \cdot \frac{(a+b-m)!}{(a+b)!} =$$

$$= \frac{a-m-b}{a-m+b} \cdot \frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!} \cdot \frac{a!\,b!}{(a+b)!} .$$

Théorème. *Si* $\mathrm{a} \geqslant \mathrm{b+m}$ *et* $\mathrm{m} \geqslant 0$

$$\mathrm{N}_{(\mathrm{a},\mathrm{b})[\mathrm{A}>\mathrm{B}+\mathrm{m}]} = \frac{\mathrm{a-m-b}}{\mathrm{a-m+b}} \, \frac{(\mathrm{a+b-m})!}{(\mathrm{a-m})!\,\mathrm{b}!} .$$

$$N_{(a,b)[A>B+m]} = P_{(a,b)[A>B+m]} \cdot N_{(a,b)} =$$

$$= \frac{a-m-b}{a-m+b} \, \frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!} .$$

Et maintenant nous chercherons la solution du problème que nous appellerons improprement d'ailleurs le problème réciproque du précédent: *calculer la probabilité pour que le candidat* A *ne soit jamais devancé de plus de* (m−1) *suffrages par le candidat* B.

Nous conserverons les mêmes notations $a, b, \theta$, $N_{(a,b)}$ qui conserveront le même sens que précédement.

Je désignerai par $N_{(a,b)[A>B-m]}$ le nombre des dépouillements dans lesquels le candidat $A$ n'est jamais distancé de plus de $(m-1)$ suffrages par le candidat $B$, et par $P_{(a,b)[A>B-m]}$ la probabilité pour que durant tout le dépouillment le candidat $A$ ne soit jamais distancé de plus de $(m-1)$ suffrages par le candidat $B$.

Conséquence immédiate des définitions

$$P_{(a,b)[A>B-m]} = \frac{N_{(a,b)[A>B-m]}}{N_{(a,b)}}$$

Lemme. *Si* $\mathrm{a+b} > 1$ et $\mathrm{a} > \mathrm{b-m}$

$$\mathrm{N}_{(\mathrm{a},\mathrm{b})[\mathrm{A}>\mathrm{B-m}]} = \mathrm{N}_{(\mathrm{a-1},\mathrm{b})[\mathrm{A}>\mathrm{B-m}]} + \\ + \mathrm{N}_{(\mathrm{a},\mathrm{b-1})[\mathrm{A}>\mathrm{B-m}]} .$$

Démonstration identique à celle du lemme précédent (page 9).

Théorème. *Si* $\mathrm{b} \geqslant \mathrm{m} \geqslant 1$ *et* $\mathrm{a} \geqslant \mathrm{b-m}$

$$\mathrm{N}_{(\mathrm{a},\mathrm{b})[\mathrm{A}>\mathrm{B-m}]} = \frac{(\mathrm{a+b})!}{\mathrm{a}!\,\mathrm{b}!} - \frac{(\mathrm{a+b})!}{(\mathrm{a+m})!\,(\mathrm{b-m})!} .$$

Si $m=0$, la formule donnerait $N_{(a,b)[A>B]} = 0$ ce qui est en contradiction avec ce qui a été établi précédemment (problème du scrutin).

Si $m > b$ la formule est inapplicable car elle contiendrait la factorielle d'un nombre négatif. Il est clair que dans le cas considéré tous les dépouillements sont favorables.

Si $a < b-m$ la formule conduirait à un résultat généralement négatif et en tout cas absurde. Il ne peut y avoir de dépouillements favorables.

Au contraire le théorème s'applique bien:

Si $m=b$ (et quelle que soit la valeur de $a$); en effet la formule donne

$$N_{(a,b)[A>B-m]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - 1$$

et l'on vérifie immédiatement que tous les dépouillements sont favorables sauf celui où tous les bulletins $B$ sortent d'abord et tous les bulletins $A$ sortent ensuite.

Si $a=b-m$ (en supposant $b \geqslant m$) en effet la formule donne

$$N_{(b-m,b)[A>B-m]} = 0$$

ce qui est exact car aucun dépouillement ne peut satisfaire la condition exigée.

Je supposerai désormais $a > b-m$ et $1 \leqslant m \leqslant b$.

La formule est exacte pour $\theta = m+1$, c'est-à-dire pour $a=1$ et $b=m$. En effet en appliquant la formule on trouve $m$ dépouillements favorables sur $m+1$ dépouillements possibles. On vérifie sans peine que le seul dépouillement qui n'est pas favorable est celui qui se termine par un bulletin $A$.

Utilisant le mode de raisonnement par récurrence je démontrerai que, si la formule est exacte pour $\theta = \theta_1 - 1$ et pour tous les couples de valeurs de $a$ et de $b$ vérifiant les conditions $b > m$ et $a \geqslant b-m$ elle est encore exacte pour $\theta=\theta_1$ et pour tous les couples de valeurs répondant aux conditions $b>m$ et $a>b-m$.

Soient $a_1$ et $b_1$ un couple de valeurs de $a$ et de $b$ satisfaisant aux conditions $b_1>m\geqslant 1$, $a_1>b_1-m$; je pose $a_1+b_1=\theta$.

En vertu du lemme je puis écrire:

$$N_{(a_1,b_1)[A>B-m]}=N_{(a_1-1,b_1)[A>B-m]}+ + N_{(a_1,b_1-1)[A>B-m]}$$

et en supposant le théorème exact pour $\theta=\theta_1-1$

$$N_{(a_1-1,b_1)[A>B-m]}=\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}-\frac{(a+b-1)!}{(a+m-1)!(b-m)!}$$

et $$N_{(a,b-1)[A>B-m]}=\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}-$$
$$-\frac{(a+b-1)!}{(a+m)!\,(b-m-1)!}.$$

Donc

$$N_{a,b)[A>B-m]}=\left[\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}+\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}\right]-$$
$$-\left[\frac{(a+b-1)!}{(a+m-1)!\,(b-m)!}+\frac{(a+b-1)!}{(a+m)!\,(b-m-1)!}\right]=$$
$$=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}.$$

Théorème. *Si* $b\geqslant m\geqslant 1$ *et* $a>b-m$

$$P_{(a,b)[A>B-m]}=1-\frac{a!\,b!}{(a+m)!\,(b-m)!}.$$

$$P_{(a,b)[A>B-m]}=\frac{N_{(a,b)[A>B-m]}}{N_{(a,b)}}=$$
$$=\frac{\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}-\dfrac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}}{\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}}=1-\frac{a!\,b!}{(a+m)!\,(b-m)!}.$$

Nous allons passer à un autre problème plus délicat: il s'agira de *calculer la probabilité pour que le candidat* A *ne soit jamais distancé de plus de* $(m-1)$ *suffrages par le candidat* B, *le candidat* B *n'étant jamais lui même distancé de plus de* $(r-1)$ *suffrages par le candidat* A.

Nous garderons les notations précédentes $a, b$, $N_{(a,b)}$ qui conserveront les mêmes significations que précédement.

Je désignerai par $N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.$ le nombre des dépouillements dans lesquels la double condition ci-dessus énoncée sera réalisée, et par $P_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.$ la probabilité pour qu'au cours du dépouillement la double condition soit réalisée.

$$P_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.}{N_{(a,b)}}.$$

Lemme. *Si* $a>b-m$, $b>a-r$ et $a+b>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.=N_{a-1,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.+$$
$$+N_{(a,b-1)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right..$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme de la page 9.

Théorème. *Si* $a\geqslant b-m, b\geqslant a-r, m\geqslant 1$ *et* $r\geqslant 1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\ B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-S_{(a,b)}+$$
$$+T_{(a,b)}-U_{(a,b)}+V_{(a,b)}$$

*avec:*

$$S_{(a,b)}=\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}+\frac{(a+b)!}{(a+2m+r)!\,(b-2m-r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a+km+[k-1]\,r)!\,(b-km-[k-1]\,r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a+sm+[s-1]\,r)!\,(b-sm-[s-1]\,r)!}.$$

$s$ étant le plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $b-sm-[s-1]\,r$.

$$T_{(a,b)}=\frac{(a+b)!}{(a+m+r)!\,(b-m-r)!}+$$
$$+\frac{(a+b)!}{(a+2m+2r)!\,(b-2m-2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a+km+kr)!\,(b-km-kr)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a+tm+tr)!\,(b-tm-tr)!}$$

$t$ étant le plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $b-tm-tr$.

$$U_{(a,b)}=\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}+\frac{(a+b)!}{(a-2r-m)!\,(b+2r+m)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a-kr-[k-1]\,m)!\,(b+kr+[k-1]\,m)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a-ur-[u-1]\,m)!\,(b+ur+[u-1]\,m)!}$$

$u$ étant les plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $a-ur-[u-1]\,m$.

$$V_{(a,b)}=\frac{(a+b)!}{(a-r-m)!\,(b+r+m)!}+$$

$$+\frac{(a+b)!}{(a-2r-2m)!\,(b+2r+2m)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a-kr-km)!\,(b+kr+km)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a-vr-vm)!\,(b+vr+vm)!}$$

$v$ étant le plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $a-vr-vm$.

Si $a<b-m$ ou si $b<a-r$ la formule donnerait des résultats pouvant être négatifs et en tout cas absurdes. En fait il ne peut y avoir de dépouillement favorable. Si $m=0$ ou si $r=0$ la formule ainsi qu'on peut le vérifier facilement donnerait comme résultat: $N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=0$ alors qu'il peut exister des dépouillements favorables.

Nous supposerons désormais $a\geqslant b-m\,,\,b\geqslant a-r$, $m\geqslant 1$ et $r\geqslant 1$. Si à la fois $b<m$ et $a<r$ la formule se réduit à

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

et en effet tous les dépouillements, dans ce cas particulier, sont favorables.

Si à la fois $b\geqslant m$ et $a<r$ (comme $a\geqslant b-m$ et $a<r$ il en résulte $b<m+r$) la formule se réduit à:

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}$$

le résultat est exact: $B$ ne pouvant être distancé par $A$ de $r$ suffrages puisque $A$ en a obtenu un nombre inférieur à $r$, les seuls dépouillements qui ne sont pas favorables sont ceux où $A$ est distancé par $B$ de plus de $(m-1)$ bulletins.

Si à la fois $a\geqslant r$ et $b<m$

$$N_{(a\,,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}.$$

Si à la fois $m+r>b\geqslant m$ et $m+r>a\geqslant r$ la formule se réduit à:

$$N_{(a\,.\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-$$
$$-\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}-\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}.$$

En fait nous savons que le nombre des dépouillements dans lesquels $A$ se trouve distancé par $B$ d'au moins $m$ suffrages est $\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}$ et que le nombre de ceux dans lesquels $B$ se trouve distancé par $A$ d'au moins $r$ suffrages est $\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}$. Il ne peut y avoir de dépouillement dans lequel à un moment donné $A$ distance $B$ d'au moins $m$ suffrages et à un autre moment $B$ distance $A$ d'au moins $r$ suffrages car, pour passer d'une situation à l'autre il faudrait dépouiller, dans un cas, au moins $(m+r)$ bulletins $B$, dans l'autre cas au moins $(m+r)$ bulletins $A$ et que nous avons supposé que les bulletins $B$ et que les bulletins $A$ étaient les uns et les autres en nombre inférieur à $(m+r)$. Le résultat trouvé est donc exact.

Si $a=b-m$

$$S_{(b-m\,,\,b)}=\frac{(2b-m)!}{b!\,(b-m)!}+\frac{(2b-m)!}{(b+m+r)!\,(b-2m-r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b+[k-1]\,m+[k-1]\,r)!\,(b-[k-1]\,r-km)!}+\cdots$$

$$T_{(b-m\,,\,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b+r)!\,(b-m-r)!}+$$
$$+\frac{(2b-m)!}{(b+m+2r)!\,(b-2m-2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b+[k-1]\,m+kr)!\,(b-km-kr)!}+\cdots$$

$$U_{(b-m\,,\,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b-m-r)!\,(b+r)!}+$$
$$+\frac{(2b-m)!}{(b-2m-2r)!\,(b+m+2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b-km-kr)!\,(b+kr+[k-1]\,m)!}+\cdots$$

$$V_{(b-m\,,\,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b+m+r)!\,(b-2m-r)!}+$$
$$+\frac{(2b-m)!}{(b+2m+2r)!\,(b-3m-2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b+km+kr)!\,(a-kr-[k+1]\,m)!}+\cdots$$

$$T_{(b-m\,,\,b)}=U_{(b-m\,,\,b)}$$

$$S_{(b-m\,,\,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b-m)!\,b!}+V_{(b-m\,,\,b)}.$$

La formule donnerait donc

$$N_{(b-m\,,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=0.$$

Ce résultat est exact car effectivement il ne peut y avoir de dépouillement favorable.

Si $b=a-r$ la formule donnerait de même

$$N_{(a\,,\,a-r)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=0.$$

Résultat encore exact car il ne peut y avoir de dépouillement favorable.

Ces cas particuliers étant examinés nous passons à la démonstration générale. Cette démonstration est faite pour des valeurs quelconques de $m$ et de $r$ satisfaisant les conditions imposées $(m \geqslant 1$ et $r \geqslant 1)$.

Nous emploierons la méthode de récurrence; nous constatons d'abord que la formule est exacte pour $\theta = m + r$ et pour tous les couples de valeurs possibles de $a$ et de $b$ satisfaisant aux conditions imposées (voir cas particuliers). Je démontrerai que si la formule est exacte pour une valeur quelconque de $\theta$ soit $\theta = \theta_1 - 1$ et pour tous les couples de valeurs satisfaisant aux conditions imposées $(a \geqslant b - m,\ b \geqslant a - r)$ elle est encore exacte pour $\theta = \theta_1$ et pour tous les couples de valeurs de $a$ et de $b$ satisfaisant les inégalités $a > b - m$ et $b > a - r$.

Soit donc à calculer $N_{(a,b)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right.$, $a$ et $b$ formant un couple de valeurs satisfaisant les inégalités $a > b - m$ et $b > a - r$.

En vertu du lemme j'ai le droit d'écrire:

$$N_{(a,b)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right. = N_{(a-1,b)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right. + N_{(a,b-1)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right.$$

et en supposant la formule exacte pour $\theta = \theta_1 - 1$

$$N_{(a-1,b)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right. = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} - S_{(a-1,b)} + T_{(a-1,b)} - U_{(a-1,b)} + V_{(a-1,b)}.$$

(Les conditions $a - 1 \geqslant b - m$ et $b \geqslant a - r$ sont satisfaites puisque nous avons supposé $a > b - m$ et $b > a - r$).

$$N_{(a,b-1)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right. = \frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} - S_{(a,b-1)} + T_{(a,b-1)} - U_{(a,b-1)} + V_{(a,b-1)}.$$

(Les conditions $a \geqslant b - m$ et $b - 1 \geqslant a - r$ sont satisfaites puisque nous avons supposé $a > b - m$ et $b > a - r$).

Remarquons tout d'abord que:

$$\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} + \frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

Constatons par ailleurs qu'un terme de rang quelconque de la suite $S_{(a,b)}$ est égal à la somme des deux termes de même rang appartenant respectivement aux suites $S_{(a-1,b)}$ et $S_{(a,b-1)}$. En effet

$k^{me}$ terme de

$$S_{(a-1,b)} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1+km+[k-1]\,r)!\,(b-km-[k-1]\,r)!}$$

$k^{me}$ terme de

$$S_{(a,b-1)} = \frac{(a+b-1)!}{(a+km+[k-1]\,r)!\,(b-1-km-[k-1]\,r)!}$$

Somme de ces deux termes

$$= \frac{(a+b)!}{(a+km+[k-1]\,r)!\,(b-km-[k-1]\,r)!}$$

les suites $S_{(a,b)}$, $S_{(a-1,b)}$ et $S_{(a,b-1)}$ ont toujours exactement le même nombre de termes sauf si: $b = sm + (s-1)\,r$ auquel cas la suite $S_{(a,b-1)}$ compte un terme de moins. Mais alors le dernier terme de la suite $S_{(a-1,b)}$: $\dfrac{(a-1+sm+[s-1]\,r)!}{(a-1+sm+[s-1]\,r)!}$ est égal à l'unité, et le dernier terme de la suite $S_{(a,b)}$: $\dfrac{(a+sm+[s-1]\,r)!}{(a+sm+[s-1]\,r)!}$ est aussi égal à l'unité.

Donc $S_{(a-1,b)} + S_{(b-1,a)} = S_{(a,b)}$. On démontrerait de même que

$$T_{(a-1,b)} + T_{(b-1,a)} = T_{(a,b)}$$
$$U_{(a-1,b)} + U_{(b-1,a)} = U_{(a,b)}$$
$$V_{(a-1,b)} + V_{(b-1,a)} = V_{(a,b)}$$

D'où

$$N_{(a,b)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right. = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - S_{(a,b)} + T_{(a,b)} - U_{(a,b)} + V_{(a,b)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Calcul approché de* $\mathrm{N}_{(a,b)} \left| \begin{matrix} \mathrm{A} > \mathrm{B} - \mathrm{m} \\ \mathrm{B} > \mathrm{A} - \mathrm{r} \end{matrix} \right.$.

On peut considérer $N_{(a,b)} \left| \begin{matrix} A > B - m \\ B > A - r \end{matrix} \right.$ comme étant la somme de $\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}$, de la suite $-S_{(a,b)} + T_{(a,b)}$ et de la suite $-U_{(a,b)} + V_{(a,b)}$.

Or nous pouvons exprimer ces deux suites de la manière suivante:

$$-S_{(a,b)} + T_{(a,b)} = -\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!} + \frac{(a+b)!}{(a+m+r)!\,(b-m-r)!} - \frac{(a+b)!}{(a+2m+r)!\,(b-2m-r)!} + \frac{(a+b)!}{(a+2m+2r)!\,(b-2m-2r)!} -$$

$$-\frac{(a+b)!}{(a+3m+2r)!\,(b-3m-2r)!}+$$
$$+\frac{(a+b)!}{(a+3m+3r)!\,(b-3m-3r)!}-\cdots$$
$$-U_{(a,b)}+V_{(a,b)}=-\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}+$$
$$+\frac{(a+b)!}{(a-m-r)!(b+r+m)!}-\frac{(a+b)!}{(a-2r-m)!\,(b+2r+m)!}+$$
$$+\frac{(a+b)!}{(a-2r-2m)!\,(b+2r+2m)!}-$$
$$-\frac{(a+b)!}{(a-3r-2m)!\,(b+3r+2m)!}+$$
$$+\frac{(a+b)!}{(a-3r-3m)!\,(b+3r+3m)!}-\cdots$$

Les deux suites $(-S_{(a,b)}+T_{(a,b)})$ et $(-U_{(a,b)}+ + V_{(a,b)})$ sont composées de termes alternativement positifs et négatifs. Dès qu'un terme d'une de ces suites est inférieur en valeur absolue à celui qui le précède tous les termes suivants sont, en valeur absolue, de plus en plus faibles. Il en résulte qui, si en faisant le calcul de la valeur d'une de ces suites, on néglige la totalité des termes à partir d'un terme «décroissant» on commet une erreur dont le signe est le même que celui du premier terme négligé et dont la valeur absolue est inférieure à la valeur absolue de ce terme.

*Calcul de la probabilité, pour que, durant tout un dépouillement le candidat* A *devance constamment d'au moins* (m+1) *suffrages un autre candidat* B *sans que cet autre candidat* B *ne soit jamais distancé de plus de* (r—1) *suffrages par le candidat.* $A$.

Il est bien évident que le candidat $A$ ne peut devancer le candidat $B$ de $(m+1)$ suffrages tant que $(m+1)$ bulletins n'ont pas été dépouillés. La condition «le candidat $A$ devance constamment d'au moins $(m+1)$ suffrages un autre candidat $B$» doit s'entendre de la manière suivante: le candidat $A$ acquière au début du dépouillement une avance de $(m+1)$ suffrages avant qu'aucun bulletin au nom de $B$ n'ait été compté et il conserve ensuite cette avance jusqu'à la fin du dépouillement.

Nous conserverons les mêmes notations $a, b, \theta$, $N_{(a,b)}$ que précédemment. Nous désignerons en outre par

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B+m\\B>A-r\end{matrix}\right.$$

le nombre des dépouilements différents possibles dans lesquels la double condition posée est réalisée et par

$$P_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B+m\\B>A-r\end{matrix}\right.$$

la probablilté pour que cette double condition soit réalisée

$$P_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B+m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B+m\\B>A-r\end{matrix}\right.}{N_{(a,b)}}$$

Théorème.

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B+m\\B>A-r\end{matrix}\right.=N_{(a-[m+1],b)}\left|\begin{matrix}A>B-1\\B>A-(r-[m+1])\end{matrix}\right.$$

Je désigne par groupe I l'ensemble de tous les dépouillements possibles de $a+b$ bulletins dont $a$ au nom de $A$ et $b$ au nom de $B$ dans lesquels le candidat $A$ devance constamment d'au moins $(m+1)$ suffrages le candidat $B$ sans que cet autre candidat $B$ ne soit jamais distancé de plus de $(r-1)$ suffrages par le candidat $A$. Par définition ce nombre de dépouillements est

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B+m\\B>A-r\end{matrix}\right..$$

Je désigne par groupe II l'ensemble de tous les dépouillements différents possibles de $\theta-(m+1)$ bulletins dont $a-(m+1)$ au nom de $A$ et $b$ au nom de $B$ dans lesquels le nombre des bulletins $A$ sortis est toujours au moins égal à celui des bulletins $B$ sortis sans que ce candidat $B$ ne soit jamais distancé de plus de $r-(m+2)$ bulletins par le candidat $A$. Par définition ce nombre des dépouillements est

$$N_{(a-[m+1],b)}\left|\begin{matrix}A>B-1\\B>A-[r-(m+1)]\end{matrix}\right..$$

Si je supprime de tous les dépouillements du groupe I les $(m+1)$ premiers bulletins sortis qui sont obligatoirement des bulletins $A$ j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe II. Les dépouillements du groupe II sont donc, au moins aussi nombreux que ceux du groupe I.

D'autre part si j'ajoute au commencement de tous les dépouillements du groupe II $(m+1)$ bulletins $A$, j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe I. Les dépouillements du groupe I sont donc au moins aussi nombreux que ceux du groupe II.

D'où il résulte que les nombres de dépouillements des deux groupes sont égaux.

On demontrerait de même que:

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B\\B>A-r\end{matrix}\right.=N_{(a-1,b)}\left|\begin{matrix}A>B-1\\B>A-(r-1)\end{matrix}\right.$$

et

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B\\B>A-r\end{matrix}\right.=N_{(a-2,b)}\left|\begin{matrix}A>B-2\\B>A-(r-2).\end{matrix}\right.$$