O teorema dos resíduos e o cálculo da soma de uma série

por João Farinha

1. São conhecidos os inestimáveis serviços que a teoria das funções de variável complexa presta no domínio real. Um exemplo típico e elementar é o da determinação do intervalo de convergência da série de Taylor de uma função $f(x)$; como se sabe, só o recurso à variável complexa permite, em certos casos, determiná-lo.

Vamos nesta nota mostrar como o teorema dos resíduos permite calcular fàcilmente a soma de uma série $\sum f(n)$, quando a função $f(z)$ satisfaz a certas condições; seguiremos nas suas linhas gerais, a via indicada por E. Phillips em *Functions of complex variable*.

2. Seja $f(z)$ uma função tendo os polos simples $a_1, a_2, \cdots a_k$ como únicas singularidades e $\varphi(z)$ uma função uniforme com os polos simples $z=m$ (m inteiro) e com os resíduos respectivos iguais à unidade positiva ou negativa. Admita-se ainda que $f(z)$ e $\varphi(z)$ não têm mais do que um número finito de singularidades comuns.

Consideremos um contorno simples C que contenha no seu interior todas ou algumas das singularidades de $f(z)$ e $\varphi(z)$. Supondo $f(z)\cdot\varphi(z)$ contínua sobre C é, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = 2\pi i \sum R\,.$$

Ora se forem $c_1, c_2, \cdots, c_k$ os resíduos de $f(z)$ em $a_1, a_2, \cdots, a_k$, os de $f(z)\cdot\varphi(z)$ são

$$c_1\,\varphi(a_1)\,,\; c_2\,\varphi(a_2)\,,\; \cdots,\; c_k\,\varphi(a_k)\,;$$

em $z=m$ o resíduo é $f(m)$ e vem, portanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = \sum c_j\,\varphi(a_j) + \sum f(n)$$

igualdade que nos permite determinar $\sum f(n)$ uma vez conhecido o integral; a soma da série obter-se-à depois por uma passagem ao limite.

O problema simplifica-se extraordinàriamente se C é uma circunferência de centro na origem e

$$|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)| \to 0 \quad \text{quando} \quad |z| \to \infty\,;$$

nestas condições o primeiro membro tende para zero e a soma da série é $-\Sigma\, c_j\,\varphi(a_j)$.

Como função $\varphi(z)$ podemos tomar qualquer das seguintes:

$$\frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}\,,\quad \pi\cot\pi z\,,\quad \pi\,\mathrm{cosec}\,\pi z \quad \text{e} \quad \frac{2\pi i\cos\pi z}{e^{2\pi i z}-1}$$

permitindo estas duas últimas o cálculo da soma de séries alternadas.

3. Como primeiro exemplo, calculemos $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+a^2}$.

A função $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ é contínua sobre uma circunferência de centro na origem e raio $r=n+1/2$ (com $n>a$) e tem como polos simples $z=\pm ai$. Tomando $\varphi(z)=\dfrac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}$, cujos polos são os números inteiros positivos e negativos, tem-se para resíduos em ai e $-ai$ os valores

$$\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2\pi a}}{1-e^{2\pi a}} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{a}\,\frac{1}{1-e^{2\pi a}} \quad \text{e em} \quad z=m\,,\quad \frac{1}{m^2+a^2}\,.$$

Como $|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)| \to 0$ com $\dfrac{1}{|z|}$, ou quando $n\to\infty$, o integral tende para zero e vem:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{1}{m^2+a^2} = -\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2\pi a}+1}{1-e^{2\pi a}} = \frac{\pi}{a}\coth\pi a$$

e visto ser

$$\sum_{-n}^{n}\frac{1}{m^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_1^n\frac{1}{m^2+a^2}$$

tem-se finalmente

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth\pi a - \frac{1}{2a^2}\,.$$

Se tomassemos como contorno de integração o rectângulo de lados sobre as rectas $x=1/2$, $x=n+1/2$ e $y=\pm1$, obtinha-se, depois de calcular os integrais curvilíneos ao longo dos lados

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Consideremos agora a série alternada

$$\sum_1^\infty(-1)^n\,\frac{1}{(4n)^2-1}\,.$$

Ponha-se $f(z)=\dfrac{1}{16z^2-1}$ e $\varphi(z)=\pi \operatorname{cosec} \pi z$ e integre-se $f(z)\cdot\varphi(z)$ ao longo da circunferência $|z|=n+1/2$. Como $|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)|\to 0$ quando $|z|\to\infty$, vem no limite

$$\int_C f(z)\cdot\varphi(z)\,dz = 2\pi i \sum R = 0\,.$$

Os resíduos de $f(z)\cdot\varphi(z)$ em $z=\pm 1/4$ têm o valor $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$ e em $z=m$, $\dfrac{(-1)^m}{(4m)^2-1}$. Será portanto

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(4n)^2-1} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n)^2-1} = \frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,.$$

ANTOLOGIA

PEQUENA ANTOLOGIA CARTESIANA

... toutes les erreurs dans lesquelles peuvent tomber les hommes ne naissent jamais d'une mauvaise induction, mais de ce qu'on pose en principe certaines expériences peu comprises ...

(Règles pour la direction de l'esprit, II)

... ceux qui cherchent le droit chemin de la vérité ne doivent s'occuper d'aucun objet dont ils ne puissent avoir une certitude égale aux démonstrations de l'arithmétique et de la géométrie.

(ibid., II)

... j'entends par intuition... la conception ferme qui naît dans un esprit sain et attentif aux seules lumières de la raison, et qui, plus simple, est conséquemment plus sûre que la déduction ellemême, ...

(ibid., III)

D'où il résulte qu'on peut dire que les propositions qui sont la conséquence immédiate d'un premier principe peuvent être connues tantôt par la déduction, suivant la manière de les considérer, tandis que les principes le sont seulement par l'intuition, et que les conséquences éloignées ne peuvent l'être que par la déduction.

Voilá les deux voies les plus sûres pour arriver à la science; l'esprit ne doit pas en admettre davantage; toutes les autres, au contraire doivent être rejetées comme suspectes et sujettes à l'erreur; ...

(ibid., III)

Il vaut mieux ne jamais songer à chercher la vérité sur aucune chose que de le faire sans méthode; car il est très-certain que des études sans ordre et des méditations obscures troublent les lumières naturelles et aveuglent l'esprit, ...

(ibid., IV)

Or, tout le secret de la méthode consiste à chercher en tout avec soin ce qu'il y a de plus absolu; ...

(ibid., VI)

... et dès lors j'ai bien jugé qu'il me falloit entreprendre sérieusement une fois en ma vie de me défaire de toutes les opinions que j'avois reçues auparavant en ma créance, et commencer tout de nouveau dès les fondements, si je voulois établir quelque chose de ferme et de constant dans les sciences.

(Méditations métaphysiques, I)

... il me semble que déjà je puis établir pour règle générale que toutes les choses que nous concevons fort clairement et fort distinctement sont toutes vraies.

(ibid., III)

La seule résolution de se défaire de toutes les opinions qu'on a reçues auparavant en sa créance n'est pas un exemple que chacun doive suivre.

(Discours de la Méthode, II)

... la pluralité des voix n'est pas une preuve qui vaille rien pour les vérités un peu malaisées à découvrir, à cause qu'il est bien plns vraisemblable qu'un homme seul les ait rencontrées que tout un peuple ...

(ibid., II)

... considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est à dire quelques raisons certaines et évidentes, ...

(ibid., II)

... j'eusse pensé commettre une grande faute contre le bon sens, si pour ce que je j'aprouvois allors quel-