L. B. Robinson, Baltimore, Maryland.
A complete system of tensors.

A. M. Whitney, Univ. de Pennsylvania.
A criterion for total positivity of matrices.

A. P. Calderón e *A. Zigmund*, Univ. de Chicago.
On singular integrals in the theory of the potential.

M. Aissen, *I. J. Schoenberg* e *A. Whitney*, Univ. de Pennsylvania.
Generating functions for totally positive sequences. Preliminary report.

V. F. Cowling, Univ. de Kentucky.
On the partial sums of a Taylor series.

J. L. Ullman, Univ. de Michigan.
Hankel determinants of sections of a Taylor's series.

S. Chowla, Univ. de Kansas.
The asymptotic behaviour of solutions of difference equations.

H. P. Thielman, Iowa State College.
Note on a functional equation.

M. O. González, Univ. de Havana.
An alternative approach to the theory of elliptic functions.

H. Helson, Univ. de Harvard.
Spectral synthesis of bounded functions.

Secção III — Geometria e Topologia

R. D. Anderson, Univ. de Pennsylvania
Continuous collections of continua.

R. Arens, Univ da Califórnia em Los Angeles.
Operations induced in conjugate spaces.

R. H. Bing, Univ. de Wisconsin
Higher dimensional hereditarily indecomposable continua.

R. L. Gomes, Porto, Portugal.
L'intégrale $\int_x f(x)\,dx$ comme transformation continue par rapport à X et $f(x)$.

O. H. Hamilton, Oklahoma Agriculture and Mechanical College.
Fixed point theorems for pseudo-arcs and certain other metric continua.

A. Heller, National Research Fellow.
On equivariant maps of spaces with operators.

V. L. Klee, Jr., Univ. de Virginia.
A proof that Hilbert spaces is homeomorphic with its solid sphere.

K. Menger, Illinois Institute of Technology.
Non-definite vector spaces, triangular topologies, generalized linearity.

M. J. Norris, College of St. Thomas.
Topological spaces having the same regular open sets.

R. Remage, Jr., Univ. de Delaware.
Invariance and periodicity properties of non-alternating in the large transformations.

A. D. Wallace, Univ. de Tulane.
Extension and reduction theorems.

C. W. Williams, Washington and Lee University.
Incompressibility and periodicity.

K. Zarankiewicz, Instituto de Tecnologia, Varsóvia.
A theorem of four regions.

Secção IV — Lógica e Filosofia

S. C. Kleene, Univ. de Wisconsin.
Recursive functions and intuitionistic mathematics.

W. Craig, Univ. de Princeton.
Incompletability, with respect to validity, in every finite non-empty domain, of first order functional calculus.

H. B. Curry, Colégio do Estado de Pennsylvania.
The inferential theory of negation.

M. Davis, Univ. de Illinois.
Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy.

J. K. Feibleman, Univ. de Tulane.
Ontological positivism.

F. Fiala, Univ. de Neuchatel.
Sur les bases philosophiques de la formalisation.

P. Lorenzen, Univ de Bonn.
Konstruktive Begründung der klassischen Mathematik

Z. Suetuna, Univ. de Tóquio.
On the mathematical existence.

G. C. Vedova, Colégio de Engenharia de Newark.
An inquiry into the nature of knowledge.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de Curso Complementar de Ciências (antigo regime) nos Liceus de Lisboa no ano de 1950 — 1.ª Chamada.

ÁLGEBRA

3056 — Determine os valores inteiros e positivos de a e de b que tornam impossível a equação

$$2a\,(2x-1)=40x-b\,(3x+1)\,.$$

R: *A equação proposta é equivalente a* $x=(2a-b):(4a+3b-40)$. *As condições a que devem satisfazer os coeficientes para que a equação seja impossível são então:* $2a-b\neq 0$ *e* $4a+3b-40=0$. *Esta última equação tem, como é facil ver, as soluções inteiras e* positivas *que são os pares:* $a_1=1\,,b_1=12$; $a_2=4\,,b_2=8$; $a_3=7\,,b_3=4$. *O par* $a_2\,,b_2$ *por não verificar a 1.ª condição* $2a-b\neq 0$, *não serve, e os outros constituem as soluções do problema.*

3057 — Determine m de forma que o trinómio

$$(2m^2+m-6)\,x^2-2mx+1$$

seja sempre positivo, qualquer que seja o valor real atribuído a x. R: *As condições a que devem satisfazer os coeficientes são:*

$(2m^2 + m - 6) > 0$ *e* $\Delta = 4m^2 - 4(2m^2 + m - 6) < 0$.

A primeira desigualdade é verificada para os valores de m *tais que ou* $m > 3/2$ *ou* $m < -2$; *a segunda para* $m > 2$ *ou* $m < -3$. *Daqui se conclui que os valores que satisfazem ao problema são os que verificam ou* $m > 2$ *ou* $m < -3$.

3058 — Calcule o termo independente de x do desenvolvimento de: $\left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x}\right)^{18}$. R: *O termo geral do desenvolvimento é da forma* ${}^{18}C_n \cdot (1/x^2)^{18-n} \cdot (-\sqrt[4]{x})^n$, *e nele o expoente de* x *é* $2n - 36 + n/4$, *que deve ser nulo para que o termo seja independente de* x; *para isso deve ser* $n = 16$. *Então o termo independente de* x *é* ${}^{18}C_{16} = {}^{18}C_2 = 153$.

ARITMÉTICA

3059 — Determine dois números a e b, sabendo que: m.d.c. $(a, b) = 4$ e m.m.c. $(a, b) = 360$. Apresente todas as soluções do problema. R: *Os números pedidos serão da forma:* $a = 4 \cdot p$ *e* $b = 4 \cdot q$, *sendo* p *e* q *primos entre si, e tais que* $ab = 4 \times 360$. *Daqui se conclui que* $p \cdot q = 90$. *Esta equação admite como soluções inteiras os números primos entre si* $p_1 = 1$, $q_1 = 90$; $p_2 = 2$, $q_2 = 45$; $p_3 = 5$, $q_3 = 18$ e $p_4 = 9$, $q_4 = 10$. *Então os pares de valores que servem ao problema são:* $a_1 = 4$, $b_1 = 360$; $a_2 = 8$, $b_2 = 180$; $a_3 = 20$, $b_3 = 72$ *e* $a_4 = 36$, $b_4 = 40$.

3060 — Demonstre que: «se dois números são primos entre si, a sua soma e o seu produto são também primos entre si». R: *Pela hipótese do teorema é m.d.c.* $(a, b) = 1$. *Seja* d *o m. d. c. de* $(a+b)$ *e* ab. *Como* d *divide* ab *e* a *e* b *são primos entre si então* d *ou divide* a *ou divide* b. *Se divide* a, *como divide* $a + b$ *tem de dividir* b. *Então pela hipótese do teorema* $d = 1$, *e o teorema fica demonstrado. Se* d *divide* b *conclui-se anàlogamente ser* $d = 1$.

Soluções dos n.os 3056 a 3060 de José da Silva Paulo.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1950 — Ponto n.º 1.

3061 — Demonstre que, se p não é um número primo, é verdadeira a igualdade $(p-1)! = \dot{p}$. R: *A proposição a demonstrar só é verdadeira para* $p > 4$, *circunstância esta que deveria ter sido assinalada no seu enunciado.*

Com efeito, sendo p *não primo, ter-se-à: ou* (I) $p = a^\alpha$ (a *primo e* $\alpha \geqslant 2$), *ou* (II) $p = a^\alpha \cdot b^\beta \cdots c^\gamma$ $(a, b, \cdots c$ *primos). Se* (I) $p = a^\alpha$ *tem-se* $p - 1 = a^\alpha - 1 > a^\alpha - a^{\alpha-1} = a^{\alpha-1}(a-1) > a^{\alpha-1}$ (*com* $a > 2$). *Portanto, na sucessão,* $1, 2, 3, \cdots p-1$ *encontram-se os divisores* $a, a^2, \cdots a^{\alpha-1}$ *e, consequentemente,* $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ *admite o divisor* a^m *com* $m \geqslant 1 + 2 + \cdots + (\alpha - 1) \geqslant \alpha$ (*se for* $\alpha > 2$). *Logo,* $(p-1)! = \dot{p}$, *c. q. d. com* $p = a^\alpha$ (*apenas quando* $\alpha > 2$ *e* $a > 2$). *Para* $a = \alpha = 2$, $p = 2^2 = 4$, *tem-se* $3! = 6 \neq \dot{4}$. *Se* (II) $p = a^\alpha \cdot b^\beta \cdots c^\gamma$ $(a, b, \cdots c$ *primos*), p *pode escrever-se sob qualquer das formas* $p = a^\alpha \cdot r$, $p = b^\beta \cdot s$, $\cdots p = c^\gamma \cdot t$. *A demonstração feita em* (I) *para* $p = a^\alpha$ *vale*, a fortiori, *quando* p *é da forma* $p = a^\alpha \cdot k$. *Portanto sendo* $(p-1)!$ *divisível por* $a^\alpha, b^\beta, \cdots c^\gamma$, *divisores primos entre si, será divisível pelo seu produto, c. q. d.* (*Vide* J. Fitz-Patrick: Exercices d'Arithmétique, 3ème ed. — Paris, 1914).

3062 — A soma de dois números inteiros é 224 e o número dos seus divisores comuns é 6. Calcular os números. R: *O m. d. c.* $(a, b) = D$ *deverá ser um divisor de* $224 = 2^5 \cdot 7$ *com* 6 *divisores e, portanto, da forma* $D = 2^\alpha \cdot 7^\beta$ *com* $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) = 6$ (α *e* β *inteiros não negativos*). *Das soluções desta equação apenas conduzem a números* D *divisores de* 224, *as soluções* $\alpha = 2$, $\beta = 1$ *e* $\alpha = 5$, $\beta = 0$ *às quais correspondem* $D = 28$ *e* $D = 32$. *Tendo em atenção que* $a/D = q$ e $b/D = q'$, *com* q *e* q' *primos entre si, tem-se* $224/D = q + q'$ *e, portanto:* a) *para* $D = 28$, $q + q' = 8$, *donde, respectivamente,* $q = 1, 3$; $q' = 7, 5$; $a = 28, 84$; $b = 196, 140$; b) *para* $D = 32$, $q + q' = 7$, *donde, respectivamente,* $q = 1, 2, 3$; $q' = 6, 5, 4$; $a = 32, 64, 96$; $b = 192, 160, 128$.

3063 — Utilizando a análise combinatória, deduza o número de diagonais dum polígono convexo de n lados. R: *Dados* n *pontos no plano, não colineares* 3 *a* 3, *o número máximo de segmentos distintos* ($\overline{AB}$ *e* $\overline{BA}$ *são considerados como um mesmo segmento*) *determinados por cada par de pontos é dado por* $\binom{n}{2}$. *Destes segmentos,* n *são lados do polígono convexo cujos vértices são os* n *pontos dados. Logo é* $\binom{n}{2} - n = n(n-3)/2$ *o numero das diagonais pedido.*

Não recorrendo à análise combinatória, poderia seguir-se este raciocínio: de cada um dos n *vértices partem* $n - 3$ *diagonais. Serão, portanto,* $n(n-3)$ *quando se contar* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BA}$. *Como porém, estes dois segmentos não são distintos, teremos que dividir* $n(n-3)$ *por* 2 *para obter o número pedido.*

3064 — Dada a equação

$$(2a - 1)x^2 - (2a + 1)x + a + 1 = 0$$

determine a de modo que as raízes x_1 e x_2 satisfaçam à igualdade $5x_1x_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$. R: *Por ser* $x_1 + x_2 = (2a+1)/(2a-1)$, $x_1 \cdot x_2 = (a+1)/(2a-1)$ *e* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$, *a igualdade proposta é equivalente a* $10a^2 + a - 11 = 0$, *donde*, $a = 1$ *e* $a = -11/10$.

3065 — Demonstre que

$$\text{arc sen} \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

qualquer que seja o ângulo x, do 1.º quadrante. R: *Fazendo* $\text{arc sen} \sqrt{x/(x+a)} = \alpha$, *tem-se*

$$sen^2 \alpha = x/(x+a), \; cos^2 \alpha = a/(x+a), \; tg\, \alpha = \sqrt{x/a}$$

e, portanto, $\alpha = \text{arc } tg \sqrt{x/a}$, *c. q. d., considerando as determinações no 1.º quadrante, o que, certamente, o enunciado do problema deveria pretender indicar em vez da afirmação incompreensível relativamente a* x, *que é uma variável real e não um ângulo. Note-se que a igualdade só tem sentido quando os radicandos forem positivos ou nulos, o que se dá quando* $ax \geqslant 0$.

3066 — Determine a expressão geral dos ângulos x que satisfazem a igualdade $\text{tg}\, x = -\text{cotg}\,(3x)$. R: *De* $tg\, x = -cotg\,(3x) = cotg\,(-3x) = tg\,(\pi/2 + 3x)$ *resulta* $x = k\pi + \pi/2 + 3x$ (k *inteiro*) *ou* $x = -(2k+1)\,\pi/4$.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico — Ano de 1949 — Ponto n.º 1.

3067 — Achar dois números primos entre si cuja média geométrica seja 660. Determinar o número de soluções. R: *Trata-se de determinar 2 números* A *e* B, *primos entre si, cujo produto seja* $660^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$. *Por ex.* $A = 1$, $B = 660^2 = 435.600$; $A = 2^4 = 16$, $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 27.225$.

O número de solução determina-se tendo em conta que, por serem A *e* B *primos entre si, os factores primos da decomposição de* 660^2 *que figurarem em* A *não figurarão em* B *e recìprocamente. Isto significa que* A *e* B *deverão ser da forma: 1.º)* $A = 1$, $B = 660^2$; *2.º)* $A = a^\alpha$, $B = b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta$ *sendo* a^α *cada um dos factores da decomposição de* 660^2 *(em número de* C_1^4*)* *e* $b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta$ *o produto dos restantes três. O número de pares* A, B *nestas condições será, portanto, de* C_1^4 *ou* C_3^4; *3.º)* $A = a^\alpha \cdot b^\beta$, $B = c^\gamma \cdot d^\delta$ *com* $a^\alpha \cdot b^\beta$ *todos os possíveis produtos distintos dos 4 factores da decomposição de* 660^2 *tomados dois a dois (logo, em número de* C_2^4*)* *e* $c^\gamma \cdot d^\delta$ *o produto dos restantes dois.*

(Note-se que os pares A, B *tendo* A *três factores da decomposição de* 660^2 *e* B *apenas um, não são distintos dos considerados no 2.º caso). O número total de soluções será pois de* $C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 = 11$.

3068 — Demonstrar que o produto de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo dos n primeiros números inteiros. R: *Pretende-se mostrar que é inteiro o cociente*

$$E = (m+1) \cdot (m+2) \cdots (m+n) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+n) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Para isso, bastará mostrar que um número primo k, *divisor do denominador e, portanto, também divisor do numerador, figura neste com um expoente, pelo menos igual àquele com que figura no denominador. Qual a maior potência dum número primo* k *que divide o produto dos* r *primeiros números? A determinação desta maior potência faz-se pela regra seguinte: divide-se* r *por* k *bem como os sucessivos cocientes da divisão por* k *até se obter um cociente menor que o divisor; a potência de base* k *cujo expoente seja a soma daqueles cocientes sucessivos obtidos é a potência procurada. Determinemos, portanto, as mais elevadas potências de* k *que dividem os produtos* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+n)$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$ *e* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. *Sejam respectivamente* $q_1, q_2, \cdots q_s$; $q'_1, q'_2, \cdots, q'_s$ *e* $q''_1, q''_2, \cdots q''_s$ *os cocientes sucessivos da divisão por* k *daqueles produtos. Como se sabe, a parte inteira do cociente de* $m+n$ *por* k *é, pelo menos igual à soma das partes inteiras dos cocientes, por* k, *de* m *e de* n; *logo,* $q_1 \geqslant q'_1 + q''_2$; $q_2 \geqslant q'_2 + q''_2$; $\cdots q_s \geqslant q'_s + q''_s$. *Adicionando, membro a membro, estas desigualdades, teremos:* $q_1 + q_2 + \cdots + q_s \geqslant q'_1 + q'_2 + \cdots + q'_s) + (q''_1 + q''_2 + \cdots + q''_s)$. *Ora, o 1.º membro desta última desigualdade representa o expoente da mais elevada potência de* k *figurando no numerador e o 2.º membro o expoente da mais elevada potência de* k *figurando no denominador. Tal desigualdade permite a prova que pretendíamos (vidé, tanto o problema proposto como a regra enunciada, em:* Exercices d'Arithmétique, *n.º 261, F. G. M., respectivamente, exerc. n.os 236 e 237 e* Gazeta de Matemática, n.º 28, págs. 20-21, Um teorema de Aritmética *por* J. da Silva Paulo).

3069 — Mostrar que, sendo $a > b$, é sempre

$$a^n - b^n > (a-b)^n$$

para qualquer valor inteiro de n superior à unidade. R: *Demonstremos por indução. Para* $n = 2$, *a desigualdade* $a^2 - b^2 > (a-b)^2$ *fica provada, por multiplicação ordenada das expressões* $a - b = a - b$ *e* $a + b > a - b$. *Admitindo que a desigualdade proposta se verifica para* $n = m$, *isto é, que* $a^m - b^m > (a-b)^m$ *mostremos que ela é verdadeira para* $n = m+1$. *Com efeito, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por* $a + b - 2b = a - b$ $(a > b)$ *obteremos:* $a^{m+1} - b^{m+1} + 2b^{m+1} - ab^m - a^m b > (a-b)^{m+1}$. *Para mostrar que* $a^{m+1} - b^{m+1} > (a-b)^{m+1}$ *bastará provar que* $E = 2b^{m+1} - ab^m - a^m b \leqslant 0$. *Vejamos que esta expressão é, efectivamente,* *negativa. Ora, sendo* $a > b > 0$ *tem-se* $a^m > b^m$ *e, substituindo em* E, a^m *por* b^m, *tem-se:* $E < 2b^{m+1} - ab^m - b^{m+1} = b^m(b-a) < 0$, *c. q. p.*

3070 — Dada a equação $x^2 - 2ax + b = 0$, determinar a e b de modo que uma das raízes seja dupla da outra e que a soma dos seus quadrados seja igual a 125. R: *Eliminando* x_1 *e* x_2 *em* $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1 \cdot x_2 = b$ *e* $x_1 = 2x_2$ *obtem-se* $8a^2 - 9b = 0$. *Por outro lado,* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 2b = 125$. *Resolvendo o sistema formado pelas duas equações em* a *e* b, *obtem-se* $a = 15/2$ *e* $b = 50$.

3071 — Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a duas rectas do mesmo plano estão numa razão constante, é uma recta. R: *Sejam* r_1 *e* r_2 *duas rectas concorrentes em* O. *O lugar geométrico dos pontos* P *pedido é a recta* r, *sobre a qual assentam as hipotenusas de todos os triângulos rectângulos cujos vértices são* P, O *e os pés* P_1 *e* P_2 *respectivamente sobre* r_1 *e* r_2, *das perpendiculares baixadas de* P *sobre estas duas rectas. Com efeito, os triângulos rectângulos* $[P' P_1' O], [P'' P_1'' O], \cdots$ *são semelhantes entre si e, portanto,* $\overline{P' O} / \overline{P' P_1'} = \overline{P'' O} / \overline{P'' P_1''} = \cdots = k_1$. *Para os triângulos* $[P' P_2' O], [P'' P_2'' O], \cdots$ *rectângulos e também semelhantes entre si, ter-se-á:* $\overline{P' O} / \overline{P' P_2'} = \overline{P'' O} / \overline{P'' P_2''} = \cdots = k_2$. *Logo, por divisão ordenada:* $\overline{P' P_2'} / \overline{P' P_1'} = \overline{P'' P_2''} / \overline{P'' P_1''} = \cdots = k_2/k_1 =$ *const., que prova estarem entre si numa razão constante as distâncias dos pontos* $P\,(P', P'', \cdots)$ *às rectas* r_1 *e* r_2.

Sendo $r_1 // r_2$, *a recta* r *é a paralela a* r_1 *e* r_2 *conduzida por um ponto* P *satisfazendo às condições do problema.*

3072 — Dados três pontos não colineares, sobre o plano, traçar uma recta que diste de um dos pontos um comprimento dado e que diste igualmente dos outros dois. R: *Sejam* A, B *e* C *três pontos, dum plano* π, *não colineares e* d *o comprimento dado. As rectas de* π *distando* d *dum daqueles três pontos,* A, *por exemplo, constituem a família de tangentes à circunferência de centro* A *e raio* d. *São soluções do problema proposto, os elementos desta família que equidistem de* B *e de* C*: as duas rectas* r_1 *e* r_2 *tangentes à circunferência, centrada em* A *e de raio* d, *paralelas a* $\overline{BC}$ *e as duas tangentes,* r_3 *e* r_4 *a esta mesma circunferência, concorrentes em* M, *ponto médio de* $\overline{BC}$, *quando existirem.* (*Note-se que as rectas* r_3 *e* r_4 *determinam em geral com* M, B *e* C *e os pés das perpendiculares baixadas sobre elas de* B *e* C, *dois triângulos rectângulos iguais*). *Designando por* d_1 *a distância do ponto* A *a* $\overline{BC}$ *concluiremos os seguintes resultados:*

1.º). *Sendo* $d < \overline{AM}$: a) *com* $d \neq d_1$, *existem as quatro soluções distintas,* r_1, r_2, r_3 *e* r_4; b) *com* $d = d_1$, *existem três soluções distintas, pois que uma das soluções* r_1 *ou* r_2 *coincide com* r_3 *ou* r_4;

2.º). *Sendo* $d = \overline{AM}$ (*o que exclue a possibilidade de ser* $d < d_1$)*:* a) *com* $d > d_1$, *existem três soluções distintas,* r_1, r_2 e $r_3 = r_4$; b) *com* $d = d_1$, *existem duas soluções distintas* r_1 (*ou* r_2) $= r_3 = r_4$ *e* r_2 (*ou* r_1)*;*

3.º). *Sendo* $d > \overline{AM}$ (*o que torna impossivel ser* $d_1 \geq d$) *existem apenas as duas soluções distintas* r_1 *e* r_2.

Soluções dos n.os 3061 a 3072 de Orlando Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — 1948-49**

3073 — Descreva e justifique a determinação da característica dum sistema de m equações lineares a n incógnitas.

3074 — Escreva a condição de ortogonalidade das arestas dos diedros $\triangle$ definido por

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

e ∇ definido por

$$\begin{cases} Hx + Ky + Lz + M = 0 \\ H'x + K'y + L'z + M' = 0 \end{cases}.$$

Relacione esta condição com a matriz

$$\begin{bmatrix} A & A' \\ B & B' \\ C & C' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H & K & L \\ H' & K' & L' \end{bmatrix}.$$

3075 — Sendo $r_1, r_2, \cdots r_n$ as raizes de $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$, quais são as de $F(x) = (-1)^n f(x) f(-x)$? Mostre que $F(x) = 0$ se reduz ao grau subduplo. Designando por $G(x) = 0$ a