negativa. Ora, sendo $a>b>0$ *tem-se* $a^m>b^m$ *e, substituindo em* E, a^m *por* b^m, *tem-se:* $E<2b^{m+1}-ab^m-b^{m+1}=b^m(b-a)<0$, *c. q. p.*

3070 — Dada a equação $x^2-2ax+b=0$, determinar a e b de modo que uma das raízes seja dupla da outra e que a soma dos seus quadrados seja igual a 125. R: *Eliminando* x_1 *e* x_2 *em* $x_1+x_2=2a$, $x_1\cdot x_2=b$ *e* $x_1=2x_2$ *obtem-se* $8a^2-9b=0$. *Por outro lado,* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=4a^2-2b=125$. *Resolvendo o sistema formado pelas duas equações em* a *e* b, *obtem-se* $a=15/2$ *e* $b=50$.

3071 — Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a duas rectas do mesmo plano estão numa razão constante, é uma recta. R: *Sejam* r_1 *e* r_2 *duas rectas concorrentes em* O. *O lugar geométrico dos pontos* P *pedido é a recta* r, *sobre a qual assentam as hipotenusas de todos os triângulos rectângulos cujos vértices são* P, O *e os pés* P_1 *e* P_2 *respectivamente sobre* r_1 *e* r_2, *das perpendiculares baixadas de* P *sobre estas duas rectas. Com efeito, os triângulos rectângulos* $[P'P_1'O]$, $[P''P_1''O]$, $\cdots$ *são semelhantes entre si e, portanto,* $\overline{P'O}/\overline{P'P_1'}=\overline{P''O}/\overline{P''P_1''}=\cdots=k_1$. *Para os triângulos* $[P'P_2'O]$, $[P''P_2''O]$, $\cdots$ *rectângulos e também semelhantes entre si, ter-se-á:* $\overline{P'O}/\overline{P'P_2'}=\overline{P''O}/\overline{P''P_2''}=\cdots=k_2$. *Logo, por divisão ordenada:* $\overline{P'P_2'}/\overline{P'P_1'}=\overline{P''P_2''}/\overline{P''P_1''}=\cdots=k_2/k_1=$ *const., que prova estarem entre si numa razão constante as distâncias dos pontos* $P\,(P', P'', \cdots)$ *às rectas* r_1 e r_2.

Sendo $r_1//r_2$, *a recta* r *é a paralela a* r_1 e r_2 *conduzida por um ponto* P *satisfazendo às condições do problema.*

3072 — Dados três pontos não colineares, sobre o plano, traçar uma recta que diste de um dos pontos um comprimento dado e que diste igualmente dos outros dois. R: *Sejam* A, B *e* C *três pontos, dum plano* π, *não colineares e* d *o comprimento dado. As rectas de* π *distando* d *dum daqueles três pontos,* A, *por exemplo, constituem a família de tangentes à circunferência de centro* A *e raio* d. *São soluções do problema proposto, os elementos desta família que equidistem de* B *e de* C*: as duas rectas* r_1 *e* r_2 *tangentes à circunferência, centrada em* A *e de raio* d, *paralelas a* $\overline{BC}$ *e as duas tangentes,* r_3 *e* r_4 *a esta mesma circunferência, concorrentes em* M, *ponto médio de* $\overline{BC}$, *quando existirem. (Note-se que as rectas* r_3 *e* r_4 *determinam em geral com* M, B *e* C *e os pés das perpendiculares baixadas sobre elas de* B *e* C, *dois triângulos rectângulos iguais). Designando por* d_1 *a distância do ponto* A *a* $\overline{BC}$ *concluiremos os seguintes resultados:*

1.°). *Sendo* $d<\overline{AM}$: a) *com* $d\neq d_1$, *existem as quatro soluções distintas,* r_1, r_2, r_3 *e* r_4; b) *com* $d=d_1$, *existem três soluções distintas, pois que uma das soluções* r_1 *ou* r_2 *coincide com* r_3 *ou* r_4;

2.°). *Sendo* $d=\overline{AM}$ *(o que exclue a possibilidade de ser* $d<d_1$*):* a) *com* $d>d_1$, *existem três soluções distintas,* r_1, r_2 e $r_3=r_4$; b) *com* $d=d_1$, *existem duas soluções distintas* r_1 *(ou* r_2*)* $=r_3=r_4$ *e* r_2 *(ou* r_1*)*;

3.°). *Sendo* $d>\overline{AM}$ *(o que torna impossível ser* $d_1\geq d$*) existem apenas as duas soluções distintas* r_1 *e* r_2.

Soluções dos n.os 3061 a 3072 de Orlando Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — 1948-49**

3073 — Descreva e justifique a determinação da característica dum sistema de m equações lineares a n incógnitas.

3074 — Escreva a condição de ortogonalidade das arestas dos diedros $\triangle$ definido por

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

e ∇ definido por

$$\begin{cases} Hx+Ky+Lz+M=0 \\ H'x+K'y+L'z+M'=0 \end{cases}.$$

Relacione esta condição com a matriz

$$\begin{bmatrix} A & A' \\ B & B' \\ C & C' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H & K & L \\ H' & K' & L' \end{bmatrix}.$$

3075 — Sendo $r_1, r_2, \cdots r_n$ as raizes de $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$, quais são as de $F(x)=(-1)^n f(x)f(-x)$? Mostre que $F(x)=0$ se reduz ao grau subduplo. Designando por $G(x)=0$ a equação reduzida, determine os coeficientes de $g(x) = (-1)^n G(x)$. Na hipótese de $f(x)$ ser real e $g(x)$ apresentar v variações, quantas raízes reais pode ter $f(x)$?

3076 — Por ordem crescente de valores, sejam $x_1, x_2, \cdots, x_m$ as raízes reais do polinómio real $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ os respectivos graus de multiplicidade $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \mu \leqslant n)$. Qual o número mínimo de raízes de $f'(x)$ não inferiores a x_1 nem superiores a x_m? Prove que $f(x)$ admite raízes imaginárias $(\mu < n)$ sempre que $f'(x)$ se anule: α) antes de x_1 ou depois de x_m; β) mais de uma vez entre x_i e x_{i+1}. Prove ainda que $f(x) = 0$ admite (pelo menos) um par de raízes imaginárias por cada mínimo positivo ou máximo negativo da função $f(x)$.

3077 — Deduza um limite excedente para os módulos das raízes do polinómio $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$.

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º exame de frequência, 25 de Abril de 1950, 1.ª chamada.**

3078 — Mostre que $f(x, y)$ diferenciável é função contínua. Indique (e justifique) alguma condição de diferenciabilidade de $f(x, y)$ em $P(a, b)$.

3079 — Prove que não se anulando $f(x)$ em (a, b) é par (possivelmente zero) o número de variações perdidas pela sucessão de Fourier de $f(x)$ à passagem de $x = a$ a $x = b$. Quantas variações pode perder a sucessão de Fourier de $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)^3 (x^2 + 1)$ de $x = a$ a $x = b$, $a < x_1$, $x_2 < b$. Estabeleça alguma das condições de Fourier e dê a sua interpretação geométrica.

3080 — Estude a marcha da função $f(x)$ no ponto $x = a$ na hipótese em que $f(x) - f(a)$ tem aí um zero duplo. Figure a imagem de uma função $f(x)$ nas condições referidas, dê a equação da tangente no ponto $M(a, f(a))$ e descreva o comportamento da função $f(x) - f(a)$. Extremos e assíntotas da imagem de $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$. Mostre (por um pequeno esboço) a situação da curva a respeito das suas assíntotas, e justifique convenientemente o traçado.

3081 — Em que condições se garante para a equação $f(x, y) = 0$ uma raiz $y = \varphi(x)$, tomando no ponto $x = a$ o valor de função contínua nesse ponto? São tais condições suficientes para que $\varphi(x)$ saia diferenciável no ponto a? Em caso negativo que mais se há-de exigir da função $f(x, y)$ para tal efeito. Verifique se a equação:

$$f(x, y) \equiv (x+1) y^3 + 9y^2 + [(x+2)^2 + 3)] y - 23x = 0$$

define implicitamente alguma função $y = \varphi(x)$ uma imagem corrente pelo ponto $P(1, 1)$. Em que direcção? Concavidade dessa imagem nas vizinhanças desse ponto. Enuncie algum conjunto de condições suficientes para que exista $\varphi''(a)$, valor finito.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência, 1950.**

3082 — a) Escrever uma equação cartesiana com um só parâmetro que represente todas as rectas que passam por $(1, 0)$ excepto $x = 1$. b) Para cada recta r deste feixe considerar a recta r' do mesmo feixe que faz com ela um ângulo de 45° contado de r para r' no sentido directo e o ponto P de intersecção de r' com $0y$. Escrever uma equação cartesiana a que satisfaçam os pontos das rectas r (se os houver) que distem 1 dos correspondentes pontos P. c) Para que valores do parâmetro se obtêm realmente pontos do lugar geométrico.

3083 — a) Que pontos de $x - y + 1 = 0$ distam 2,8 de $3x + 4y + 3 = 0$? b) Que figura é representada pela equação $xy + 2x = 0$?

3084 — Calcular sob a forma $x + iy$ o número $[\sqrt[6]{2}(\cos \pi/12 + i \operatorname{sen} \pi/12)]^{45}$.

I. S. A — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência, 1950.**

3085 — Para que valores de x é convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$?

3086 — Sabendo que $e^x = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, calcular $1/\sqrt[10]{e}$ sob a forma decimal com um erro inferior a 0,00001.

3087 — Calcular a área S do triângulo de vértices $(0,0)$, $(x, 0)$ e $\left(x, \sqrt{2} - \sqrt{2 - x^2}\right)$ e a parte principal do infinitésimo S em relação a x.

3088 — Seja $y = f(x)$ uma função de variável real definida no intervalo $[-1, 1]$. Sabendo que: a) O conjunto dos valores de $f(x)$ neste intervalo é a união do intervalo definido por $2 \leqslant y \leqslant 3$ com o conjunto constituído pelo único ponto $y = 5$; b) $f(x)$ é contínua em $]-1, 1[$; c) $f(1) = 3 = \lim_{h \to +0} f(1 - h)$, calcular o valor de $f(-1)$.

3089 — Estudar a derivabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se existe algum número natural } n \text{ tal que} \\ \qquad \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n-1} \\ x^3 \text{ para os restantes valores de } x. \end{cases}$$

3090 — Derivar

$$\cos\frac{x}{2}\log.\,(1+x^{-1,7})+\frac{2^x}{\operatorname{tg} x}-[\operatorname{arc\,cosec}\,(3x-1)]^{\frac{1}{x}}.$$

3091 — Escrever a equação geral das tangentes à curva definida por $y=\frac{1}{x}$ e as das tangentes comuns a esta curva e à parábola $y=x^2$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.° Exame de frequência — 1950, Março, 27.**

3092 — Quando se diz que certo conjunto (x) é limitado à direita? Como se define o respectivo limite L de Weierstrass? Caracterize esse limite pelas suas relações com os elementos do conjunto. Prove a existência de L na hipótese considerada.

Indique os pontos de acumulação e limites de Weierstrass L e l de (u_n) onde $u_n=1+2(-1)^{n-1}-(-1)^{\frac{n}{2}}/n$. Tem a sucessão u_n limite? Justifique. R: *O conjunto* (u_n) *é a soma de dois conjuntos* (u_{2k}) *e* (u_{2k+1}) *cada um com seu ponto de acumulação; estes são* -1 *e* 3. *Os limites de Weierstrass são rtsp.:* $L=4$, $l=-3/2$. *A sucessão não tem evidentemente limite, pois é decomponivel em* u_{2k} *com limite* -1, *e* u_{2k+1} *com limite* 3.

3093 — Quando é que a série de termo geral u_n se diz convergente? Enuncie e demonstre o primeiro teorema de Cauchy para as séries de termos positivos. Enuncie seus corolários. Defina intervalo de convergência da série $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ e descreva as suas propriedades. Relacione os intervalos de convergência das séries $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ e $\varphi(x)=\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$. R: *Calculem-se os intervalos de convergência das séries com o segundo critério de Cauchy:*

$$lim\,\frac{(n+1)\,|\,a_{n+1}\,|}{n\,|\,a_n\,|}\cdot|\,x\,|<1\quad e\quad lim\,\frac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|}\cdot|\,x\,|<1.$$

Portanto intervalos iguais

$$\left(-1/lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\,1/lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

3094 — Caracterize por meio de desigualdades que a função $f(x)$ é contínua no ponto a. Mostre que $f(x)$ se anula em (a,b), pelo menos uma vez, se for contínua nêsse intervalo e se $f(a+0)\cdot f(b-0)<0$. Estude a continuidade e derivabilidade da função $f(x)$ assim definida:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{para } x \text{ não inteiro} \\ x+1 & \text{para } x \text{ inteiro}\end{cases}$$

R: *Seja* a *real não inteiro ou quando inteiro igual* a -1 *ou* $+2$; *para* $x=a$ *a função* $f(x)$ *é contínua visto que* $\lim\limits_{x=a} f(x)=a^2-1=f(a)$ *e nestes mesmos pontos* $f'(a)=2a$. *Para* x *inteiro diferente de* -1 *e* $+2$ *a função tem descontinuidade de primeira espécie com saltos medidos por* $|\,x^2-x-2\,|$.

3095 — Defina função crescente num ponto. Figure uma função $g(x)$ crescente em a (pròpriamente crescente) mas com derivada nula nesse ponto e exprima por um cociente que ela é crescente em a. Prove que se $g(x)$ tem derivada em a e é crescente nesse ponto, $g'(a)$ é positiva ou nula. Se $f'(x)$ está nas condições da função $g(x)$ anteriormente figurada qual o sentido da concavidade de $f(x)$ na vizinhança de a? Prove a afirmação que fizer. Determine a tangente à curva $y=x/(x-1)^2$ no ponto de de abcissa $x=2$ e diga se na vizinhança desse ponto a curva fica para cima ou para baixo da tangente. R: *A equação da tangente é* $y-2=-3(x-2)$; *nas vizinhanças do ponto de contacto* $(2,2)$ *a derivada é negativa, curva decrescendo, e* $f''(x)$ *positiva, concavidade para cima. Curva acima da tangente.*

3096 — $f'(x)$ admite a como zero de multiplicidade α. Qual a expressão de $f(x)-f(a)$ em torno desse ponto? Exprima que $f'(x)$ admite a como zero de multiplicidade α, aplique a $f(x)-f(a)$ o teorema dos acréscimos finitos e deduza daí uma nova expressão de $f(x)$ em torno de a. Designando por $a+\theta(x-a)$ o ponto intermédio introduzido pelo teorema dos acréscimos finitos prove que θ tende para certo limite significativo quando x tende para a. Calcule esse limite na hipótese de $\alpha=2$. R: *Por ser* $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{\alpha}(a)=0$ *e* $f^{\alpha+1}(a)\neq 0$ *a fórmula de Taylor dá* $f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}\cdot f^{\alpha+1}(x_1)$ *e derivando esta expressão vem* $f'(x)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha!}f^{\alpha+1}(x_1)$ *de modo que o teorema de Lagrange dá*

$$f(x)-f(a)=(x-a)\frac{\theta^{\alpha}(x-a)^{\alpha}}{\alpha!}f^{\alpha+1}(x_1)\cdot$$

As duas expressões arrastam a igualdade

$$\frac{\theta^{\alpha}}{\alpha!}=\frac{1}{(\alpha+1)!}\quad ou\quad \theta=\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha+1}}.\ \textit{Se}\ \alpha=2,\ \theta=\sqrt{3}/2.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **2.° Exame de frequência, 1950, Junho, 29.**

3097 — Calcule a primitiva da função

$$f(x)=x\,\operatorname{arc\,sen} x^2-\frac{1}{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}.$$

Descreva e justifique o método de primitivação por partes. R: Px arc sen $x^2 - P \dfrac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x} =$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arc sen } x^2 - P \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{1}{2} P\, 2 \text{ sen } x \cos x =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arc sen } x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

3098 — Indique sob que condições a equação $f(x,y)=k$ (k constante) define implìcitamente uma função unívoca $y=\varphi(x)$ na vizinhança do ponto $P(a,b)$. Pode a equação definir mais do que uma função unívoca? Justifique. Supondo $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ prove que $y=\varphi(x)$ é diferenciável no mesmo ponto. Deduza daí a expressão de $\dfrac{dy}{dx}$.

3099—Dado o sistema de n equações a n incógnitas $a_i^h x_h = b_i$ (h índice mudo, $i=1,2,\cdots,n$) escreva a sua equação matricial indicando os elementos das respectiva matrizes. Supondo $|A| = |a_i^h| \neq 0$, deduza da equação anterior a regra de Cramer.

3100—Seja $P(x)$ um polinómio inteiro em x de grau n e de coeficientes racionais Mostre que se $P(x)=0$ admite a raiz racional $\alpha+\sqrt{\beta}$ admite também a raiz $\alpha-\sqrt{\beta}$. Como se acham as raizes duplas dum polinómio? Determine a condição para que a equação $x^3+px+q=0$ tenha uma raiz dupla. Ache por meio da sucessão de Sturm a condição para que o polinómio $P(x)=x^3+px+q$ tenha três raízes reais e distintas. R: *Para que exista raiz dupla* P (x) *e sua derivada não podem ser primos entre si. Achando o m. d. c. pelas divisões sucessivas obtemos*

$$\begin{array}{ll} \underline{1 \quad 0 \quad p \quad q} & f_0 = x^3 + px + q \\ \underline{3 \quad 0 \quad p} & f_1 = 3x^2 + p \\ 0 \; \underline{-2p \; -3q} & f_2 = -2px - 3q \\ \quad -9q + 2p^2 & \\ \quad \underline{-4p^3 - 27q^2} & f_3 = -4p^3 - 27q^2 \end{array}$$

A sucessão de Sturm será:

$$f_0 = x^3 + px + q, \quad f_1 = 3x^2 + p, \quad f_2 = -2px - 3q,$$
$$f_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Para f_0 *ter raizes múltiplas deverá ser* $f_3=0$, *porque então o m. d. c.* (f_0, f_1) f_2 *e o zero duplo é o zero de* f_2.

Para que f_0 *tenha as três raizes reais deverá ser (e é suficiente)* $f_3 > 0$ *porque então é necessàriamente* $p<0$ *e para* $-\infty$ *a sucessão de Sturm dá* 3 *variações e para* $+\infty$ *dá* 0 *variações. Se* $p \geqslant 0$ *já* $f_3 \geqslant 0$ *e sendo* $f_1 > 0$ *vem* f_0 *crescente e portanto com uma única raiz real.*

Soluções dos n.^{os} 3092 a 3100 de J. Ribeiro de Albuquerque.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência extraordinário — 16 de Março de 1950.**

3101 — *a*) Verificar a seguinte identidade:

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = \cos\frac{n\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{n\pi}{2}.$$

b) Interpretar geomètricamente a identidade para $n=2$ e justificar todas as operações, analíticas e geométricas, efectuadas nas alíneas *a*) e *b*). R: *Os complexos conjugados* $1+i$ *e* $1-i$ *têm o mesmo módulo e argumentos, por ex.* $\pi/4$ *e* $-\pi/4$ *respectivamente. Logo, o seu cociente terá por módulo* 1 *e argumento* $\pi/2$. *A fórmula de Moivre para o expoente* n *inteiro permite concluir a identidade proposta.*

3102 — *a*) Calcular o verdadeiro valor da expressão: $\left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x$ para $x=\infty$. *b*) Enunciar e justificar as regras seguidas no cálculo da alínea anterior.

3103 — *a*) Dada a equação $f(x,y)=0$, onde o primeiro membro é uma função homogénea, calcular as duas primeiras derivadas da função $y(x)$ definida implìcitamente. Explicitar a função, partindo do conhecimento das suas derivadas. *b*) Justificar as regras de derivação utilizadas, assim como uma propriedade importante das funções homogéneas a que necessàriamente recorreu. R: *Supondo* f (x, y) *uma função homogénea diferenciável, de grau de homogeneidade* α *tem-se* $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y = \alpha \cdot f(x,y)$ (*identidade de Euler*). *Como é* $f(x,y)=0$ *tem-se* $f'_x = -(y/x)\cdot f'_y$. *Substituindo este valor em* $y'(x) = -f'_x/f'_y$ *obtem-se* $y'=y/x$ *donde* $y''=(y'\cdot x - y)/x^2 = 0$. *De* $y''=0$ *resulta* $y'=c$ *e* $y-cx=d$ (c e d *constantes arbitrárias*). *Porém, a homogeneidade de* f (x,y) *implica que seja* $d=0$ *e, portanto* $f(x,y) = y - cx$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **2.º Exame de frequência ordinário — 1 de Julho de 1950.**

1.ª Parte

3104 — Dada a curva de equação $y=e^{-x^2}$, calcular as ordenadas dos pontos de inflexão com um erro inferior a 10^{-2}. Utilizar para esse fim o desenvolvimento em série inteira da função exponencial neperiana. R: *As abcissas dos pontos de inflexão da curva de equação* $y=e^{-x^2}$ *são as raizes de* $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$ *ou sejam* $x=\pm\sqrt{1/2}$ *por ser* $y'''(\pm\sqrt{1/2}) \neq 0$. *As ordenadas pedidas obtêm-se calculando, a menos de* 10^{-2}, *a soma da série numérica que se obtem, fazendo* $x=\pm\sqrt{1/2}$ *no desenvolvimento de* Mac-Laurin

$$y = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots \ .$$

Tomando apenas os 4 primeiros termos da série, o que garante um êrro sistemático inferior, em valor absoluto, a $1/384 < 1/200$, *tem-se*, $y \simeq 1 - 1/2 + 1/8 - 1/48 = 29/48 \simeq 0{,}60$ *com um êrro de cálculo, também inferior, em valor absoluto, a* $1/200$. *Desta forma*, $y = 0{,}60$ *é o valor comum, com a aproximação pedida, das ordenadas dos dois pontos de inflexão da curva dada.*

3105 — Resolver a equação $3x^3 + 11x^2 + 17x + 24 = 0$. R: $-8/3$ *e* $(-1 \pm \sqrt{11}\, i)/2$.

3106 — Dada a recta $\begin{cases} x + 2y + a = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$, determinar o valor de a de modo que por ela passe um plano perpendicular a $r \equiv \begin{cases} 3x - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$. Escrever a equação desse plano. R: *A família de rectas dada permite determinar uma família de feixes de planos de equação* $x + 2y + \alpha z + a + \alpha = 0$ (α *e* a *reais*). *Em cada feixe desta família é possível determinar um plano perpendicular a* r *pois, com efeito, terão que ser paralelos, o vector normal do plano* $\vec{n}\,(1, 2, \alpha)$ *e o vector* $\vec{u}\,(1, 2, 3)$ *da recta* r *para o que basta ser* $\alpha = 3$. *O problema admite, portanto, uma infinidade de soluções; todos os planos da família, a uma só parâmetro, de equação* $x + 2y + 3z + a + 3 = 0$.

2.ª Parte

3107 — Estabeleça o desenvolvimento da função exponencial neperiana, em série inteira, pela aplicação, depois de demonstrar, do teorema respeitante à série de Mac-Laurin. Em relação ainda com o problema n.º 3104, enuncie as propriedades das séries numéricas utilizadas na resolução daquele.

3108 — Justifique os métodos empregados na resolução da equação do problema n.º 3105, de acordo com a natureza das raizes encontradas.

3109 — Feixe de planos: deduza a sua equação. Perpendicularidade entre rectas e planos: enuncie as condições, provando-as. Estude o caso particular dum dos planos bissectores do ângulo formado pelos planos dos xz e dos xy, estabelecendo as condições para que uma recta no espaço lhe seja perpendicular.

Soluções dos n.os 3101 a 3106 de Orlando Morbey Rodrigues

CÁLCULO INFINITESIMAL

I. S. A. — CÁLCULO INFINITESIMAL E DAS PROBABILIDADES — **Alguns problemas dos 1.os exames de frequência — 1949-50.**

3110 — Calcular $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$ R: $a\,(\pi/2 + 1)$.

3111 — Calcular $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2 + x + 1)}$

R: $$I = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3} \log \frac{(x^2+x+1)^{1/2}}{x-1} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

3112 — Sendo $f(x, y)$ uma função homogénea de grau α, contínuamente derivável até à 2.ª ordem, provar que é:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1) f(x, y)\,.$$

R: *Aplicando o teorema de Euler às derivadas parciais* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *que são funções homogéneas de grau* $\alpha - 1$, *vem:*

$$\begin{cases} x \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (\alpha - 1) \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2mm] x \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} + y \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha - 1) \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

Multiplicando por x *a primeira destas igualdades, por* y *a segunda e somando-as vem, notando que, por hipótese, é* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha - 1)\left[x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right] = (\alpha - 1)\, \alpha f(x, y)\,.$$

3113 — Sendo $z = v^2 + u^w - \frac{v}{w}$; $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ e $w = y + 1$, determinar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ no ponto $(x, 0)$.

R: *Tem-se*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = w u^{w-1} 2x + \left(2v - \frac{1}{w}\right) y$$

donde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(2x+\frac{1}{w^2}\right)y+\left(2v-\frac{1}{w}\right)+$$
$$+\,2xu^{w-2}\,[u+wu\log u-2yw\,(w-1)]$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{(x\,,\,0)}=2x\,(1+\log x^2)-1\,.$$

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — Alguns problemas dos 2.os exames de frequência – 1949-50.

3114 — Calcular $F'(y)$ sendo

$$F(y)=\int_0^1 \log\,(x^2+y^2)\,dx\,.$$

R: $2\,arc\,tg\,\dfrac{1}{y}$.

3115 — Resolver o sistema

$$\begin{cases} x-2y+z-t-2=0\\ 2x+t+1=0\\ 2y-z+3=0\end{cases}$$

R: *Sistema compatível e indeterminado*

$$\begin{cases} x=-2/3\\ y=(\lambda-3)/2\\ z=\lambda\\ t=1/3\end{cases}.$$

3116 — Sem resolver o seguinte sistema, determinar θ de modo que ele seja compatível:

$$\begin{cases} 2x+\theta y-z+3=0\\ 2x+z=0\\ x-y+3z-5=0\\ y+2z-1=0\end{cases}$$

R: *Formada a matriz dos coeficientes das incógnitas* $\left\|\begin{matrix}2&\theta-1\\2&0&1\\1&-1&3\\0&1&2\end{matrix}\right\|$ *verifica-se que é possível extrair dela um determinante de 3.ª ordem não nulo* $\Delta=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-1&3\\0&1&2\end{vmatrix}=-9$, *que poderemos tomar para determinante principal. Havendo apenas uma equação não principal existe um único determinante característico que terá de ser nulo para que o sistema seja compatível, isto é:*

$$\begin{vmatrix}2&0&1&0\\1&-1&3&-5\\0&1&2&-1\\2&\theta&-1&3\end{vmatrix}=0,\quad donde\quad \theta=1/5\,.$$

3117 — O sistema

$$\begin{cases} y_1=x_1-2x_2-x_3\\ y_2=x_1+5x_3\\ y_3=x_2+3x_3\end{cases}$$

define ou não uma transformação linear? Porquê? R: *Não, porque o módulo da substituição,*

$$M=\begin{vmatrix}1&-2&-1\\1&0&5\\0&1&3\end{vmatrix}\quad \textit{é nulo.}$$

3118 — Sendo

$$\begin{cases} y_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4\\ y_2=x_1^2-2x_2^2+5x_2x_3+x_4\\ y_3=x_1^2+x_2\,(3x_1+6x_3-2x_2)+3x_1x_3+2x_4\\ y_4=3x_1x_2+3x_1x_3+x_4+x_2x_3\end{cases}$$

quantos yy há funcionalmente independentes? R: *A matriz das derivadas parciais tem característica* 3, *pois* $\dfrac{\partial\,(y_1,y_2,y_3,y_4)}{\partial\,(x_1,x_2,x_3,x_4)}=0$ *e existem jacobianos de 3.ª ordem, por exemplo* $\dfrac{\partial\,(y_1,y_2,y_4)}{\partial\,(x_1,x_3,x_4)}$ *não identicamente nulos. Logo há* 3 *funções independentes.*

3119 — Sabendo que a função característica da distribuição binomial é $f(t)=(pe^t+q)^N$ achar a função característica da distribuição de Poisson. R: *A função característica da distribuição binomial*, f(t), *pode tomar a forma:*

$$f(t)=(pe^t+q)^N=(pe^t+1-p)^N=[1+p\,(e^t-1)]^N.$$

Quando uma distribuição tende para outra o mesmo sucede às funções características; ora a distribuição binomial tende para a de Poisson quando $\begin{cases}p\to 0\\ N\to\infty\end{cases}$, *sendo* $\lim\limits_{\substack{p\to 0\\ N\to\infty}} pN=m$. *Próximo do limite pode-se substituir* p *por* m/N *e assim a função característica da distribuição de Poisson será:*

$$F(t)=\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{m}{N}\,(e^t-1)\right]^N=e^{m\,(e^t-1)}\,.$$

3120 — Sejam $y_j\,(j=1,2,\cdots,N)$ N variáveis casuais estocàsticamente independentes e todas elas com a seguinte distribuição:

y_j	$p\,(y_j)$
0	q
1	p

Notar que $x=\sum\limits_{j=1}^{N} y_j$ tem parâmetros p e N.

A partir deste facto:

1). Sendo x uma variável casual com a distribuição de Bernoulli, obter $E(x)$ e $V(x)$ mediante as suas relações com $E(y_j)$ e $V(y_j)$;

2). Achar a função característica da distribuição binomial e deduzir dela $E(x)$ e $V(x)$. R:

$$E(y_j) = E(y_j^2) = p\,; \quad V(y_j) = E(y_j^2) - E^2(y_j) = pq$$

então

1). $$E(x) = E\left(\sum_{j=1}^{N} y_j\right) = \sum_{j=1}^{N} E(y_j) = pN$$

$$V(x) = V\left(\sum_{j=1}^{N} y_j\right) = \sum_{j=1}^{N} V(y_j) = Npq.$$

2). *A função característica da distribuição de* y_j *é:*

$$f_j(t) = E(e^{ty_j}) = pe^t + q.$$

A função característica da distribuição de x *é:*

$$F(t) = \prod_{j=1}^{N} f_j(t) = (pe^t + q)^N.$$

Donde:

$$E(x) = F'(0) = pN$$

$$V(x) = F''(0) - [F'(0)]^2 = pqN.$$

Soluções dos n.os 3110 a 3120 de Zózimo Pimenta de Castro do Rego.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — **Exame final — Outubro de 1949.**

3121 — Escrever até aos termos do 2.º grau inclusivé o desenvolvimente tayloriano da função

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

segundo as potências de $(x-1)$, $(y-1)$ e $(z-1)$. R:

$$f(x, y, z) = f(1, 1, 1) + \sum_{i=1}^{i=2} \frac{1}{i!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{1,1,1}(x-1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{1,1,1}(y-1) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{1,1,1}(z-1)\right]^{(i)} + R_3 =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}[(x-1) + (y-1) + (z-1)] + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + R_3.$$

3122 — Sendo A e B dois pontos fixos e P um ponto variável e sendo θ um ângulo $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$, mostrar que a direcção do vector *grad* θ é normal em P à circunferência que passa por A, B e P.

3123 — Dada a equação

$$(x^2 y + y^3 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$$

determinar um factor integrante da forma $\varphi(z)/x^3$, sendo $z = y/x$. R: *De* $y = xz$ *vem* $dy = x\,dz + z\,dx$ *e a equação toma a forma* $(x^3 z + x^3 z^3)\,dx + x^3\,dz = 0$. *Multiplicando por* $\varphi(z)/x^3$ *tem-se* $\varphi(z)\cdot(z + z^3)\,dx + \varphi(z)\,dz = 0$, *e como o 1.º membro é diferencial exacta:*

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z)(z + z^3) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(z) = 0 \quad ou \quad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -\frac{3z^2+1}{z^3+z}$$

donde $\varphi(z) = \dfrac{1}{c(z^3+z)} = \dfrac{x^3}{c(x^2y + y^3)}$, *e, finalmente*

$$\frac{\varphi(z)}{x^3} = \frac{1}{c(x^2 y + y^3)}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — **Exame final, época milicianos — Dezembro, 1949.**

3124 — Seja $A(x, 0)$ o pé da ordenada dum ponto P da curva C. A distância do ponto A à tangente em P é $\overline{AM} = a$. Supondo a constante achar a equação da curva.

R: $$y = a\sqrt{1+p^2} \quad \text{com} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dp} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$x + C_1 = \textit{arc senh}\, p \rightarrow p = \textit{senh}\,(x + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \textit{senh}\,(x + C_1) \rightarrow y = \cosh(x + C_1) + C_2.$$

3125 — A curva $a^2 x^2 = y^2 (x - \alpha)$ tem um ponto de inflexão. Achar a área limitada pela curva, pela ordenada desse ponto de inflexão, e pela ordenada do ponto $x = 2\alpha$. R:

$$y'' = -a(x-\alpha)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}ax(x-\alpha)^{-\frac{5}{2}}, \quad y'' = 0 \rightarrow x = 4\alpha$$

e $$A = 2a\int_{2\alpha}^{4\alpha}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-\alpha}} = 2I.$$

Fazendo $x - \alpha = t^2$, *tem-se:*

$$I = \int_{2\alpha}^{4\alpha}\frac{ax\,dx}{\sqrt{x-\alpha}} = 2\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{3\alpha}}(a\alpha + at^2)\,dt = \frac{12\sqrt{3}-8}{3}\cdot a\alpha\sqrt{\alpha}$$

e portanto: $A = 2(12\sqrt{3}-8)\,a\alpha\sqrt{\alpha}/3$.

3126 — Achar os máximos e mínimos da função:

$$z = (x+2)(y+3)\,xy.$$

R:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2xy + 2y)(y+3) = 0 \rightarrow y = 0 \quad x = -1 \quad y = -3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(x+2)(2y+3) = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = -2 \quad y = -\frac{3}{2}$$

Os pontos a analisar são:

$$(-1, -3/2), (0, 0), (-1, 0), (0, -3) \ e \ (-2, -3).$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(y+3), \ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x+2)(2y+3),$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x(x+2).$$

r *e* t *devem ser de sinais contrários para haver máximos e mínimos. A única solução que serve é* $(-1, -3/2)$ *pois que neste ponto* r, t *e* s *tomam respectivamente os valores* $-9/2$, -1 *e* 0 *e* $s^2 - rt$ *o valor* $-9/2 < 0$. *Logo há um mínimo para* $x = -1$ e $y = -3/2$ *que é* $z = 9/4$.

Soluções dos n.os 3121 a 3126 de Mário S. Madureira

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **1.º exame de frequência — 1949-50.**

3127 — Sendo x, y, z as coordenadas de P em relação ao triedro $0\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$, provar que é plano o campo vectorial definido pela função:

$$\mathbf{v}(P) = z\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + (3y - x)\mathbf{k}.$$

R: *Sejam* $\mathbf{v}(A)$ *e* $\mathbf{v}(B)$ *dois quaisquer vectores do campo. Por exemplo se*

$$\begin{cases} A(1, 0, 0) \\ B(0, 0, 1) \end{cases} \text{teremos} \begin{cases} \mathbf{v}(A) = -\mathbf{k} \\ \mathbf{v}(B) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \end{cases}.$$

Se considerarmos o plano $P = 0 + \lambda(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - \mu\mathbf{k}$ *(λ, μ — parametros) verifica-se que todos os vectores do campo lhe são paralelos pois, quaisquer que sejam* x, y *e* z, *é sempre possível encontrar valores de* λ *e* μ *tais que* $\frac{\lambda}{z} = \frac{\mu}{x - 3y}$. *Sendo os vectores normais a este plano da forma* $\mathbf{a} = k(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$, *com* k *qualquer, é fácil de ver que a derivada dos vectores do campo segundo esta direcção é nula. Logo, o campo é plano.*

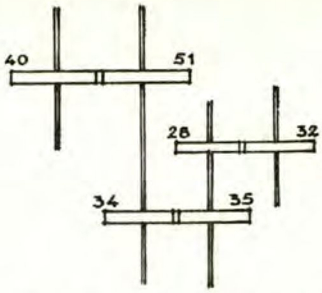
3128 — Em relação ao triedro $0\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$ com $P(x, y, z)$ o campo vectorial $(\mathbf{v})$ é definido pela função

$$\mathbf{v}(P) = x\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - y\mathbf{k}.$$

Calcular o fluxo divergente de uma esfera de raio r, imersa no campo. R: *Aplicando o teorema de Ostogradski e notando que* $\operatorname{div}\mathbf{v}(P) = 1$, *resulta imediatamente que o fluxo divergente pedido vale* $4\pi r^3/3$.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **2.º exame de frequência — 1950-49.**

3129 — A figura representa um trem de engrenagens, cuja roda condutora é a primeira da esquerda. Junto de cada roda está indicado o seu número de dentes. Poderá sem alteração da razão de transmissão, substituir-se este trem por uma única engrenagem



com a mesma roda condutora? Sendo a resposta afirmativa quantos dentes deverá ter a roda conduzida? R: *Sim. 60 dentes.*

3130 — O ponto material P está animado de movimento circular uniforme em relação ao triedro $0\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$; o vector deslizante velocidade angular é:

$$C\vec{\Omega} = (2, 0, 0)\,(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}).$$

A partir do instante $t = 5\,s$ no qual ocupa a posição $A(2, 0, -3)$, P fica submetido apenas à acção de uma força $\mathbf{F}$, com a direcção e o sentido de $\vec{\Omega}$ e de intensidade igual a 20 kg. Sabendo que a velocidade de P no instante $t = 10\,s$ vale $\mathbf{v}(10) = 7\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$, calcular a sua energia cinética neste instante. R: *A velocidade no instante* $t = 5\,s$ *é*

$$\mathbf{v}(5) = \vec{\Omega} \wedge (A - C) = -9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Aplicando o teorema da impulsão temos:

$$m(7\mathbf{i} + 24\mathbf{j}) - m(-9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = \int_5^{10} 20 \operatorname{vers}\vec{\Omega}\,dt$$

donde, supondo o metro a unidade de comprimento, $m = 5$ *u. m. m. Então a energia cinética pedida será:*

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (49 + 576) = 1562{,}5\ \text{kgm}.$$

3131 — Sabendo que o momento de inércia em relação a um plano de simetria da esfera homogénea de raio R e densidade ρ vale $I = 4\pi\rho R^5/15$, calcular os comprimentos dos eixos do elipsoide de inércia relativo a um ponto da superfície limitante. R: *As faces dum triedro triortogonal de vértice* P — *ponto qualquer da superfície da esfera — e em que um dos eixos coincide com o eixo diametral que passa por* P *são planos principais de inércia. Referida a este triedro a equação do elipsoide de inércia em relação a* P *será:*

$$\frac{x^2}{\dfrac{15}{8\pi\rho R^5}} + \frac{y^2}{\dfrac{15}{28\pi\rho R^5}} + \frac{z^2}{\dfrac{15}{28\pi\rho R^5}} = 1.$$

Donde vem para comprimentos dos eixos do elipsoide:

$$a = \frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{15}{2\pi\rho R}}, \quad b = c = \frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{15}{7\pi\rho R}}.$$

Soluções dos n.os 3127 e 3131 de Zózimo Pimenta de Castro do Rego.