ANO XI – N.º 43 GAZETA DE MATEMÁTICA ABRIL – 1950

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

# *Sur certaines équations* $f(x,y,z,p,q)=0$

par **Georges Bouligand (Paris)**

1. Il s'agira d'équations où $f$ est un polynôme du second degré en $p$, $q$. Ce type $(T)$ est souvent pris comme exemple, pour raison de simplicité, quand on s'occupe du *problème de Cauchy*. Il émerge aussi à propos de considérations sur les *systemes triples orthogonaux*. En prenant dans une région de l'espace deux tels systèmes, on obtient en chaque point deux trièdres de directions principales qui, étant trirectangles, sont sur un même cône du second degré. Une équation $f=0$ du type plus restreint obtenu de la sorte se trouve donc admettre pour solutions les surfaces des six familles constituantes; tandis que, dans le type $(T)$ général, une équation $f=0$ est déterminée par cinq familles à un paramètre de surfaces intégrales, sans que cela entraine de droit la connaissance d'autres familles de cette nature.

Ces rapprochements font pressentir le caractère un peu composite de la présente note, caractère renforcé par des soucis concernant *l'épistémologie des problèmes*, dans le sens de certaines de mes publications antérieures (1). Beaucoup de questions seront d'ailleurs posées, sans plus.

2. J'appellerai *probléme* $P$ la recherche d'un élément emprunté à une *catégorie* $K$ nettement délimitée et soumis à des *conditions* assignées. Je supposerai l'invariance de $K$ et des dites conditions par un groupe $G$ de transformations, dont chacune est un automorphisme de $K$ sur elle-même. L'ensemble des solutions de $P$ possède alors la même propriété d'invariance $I_G$ mais celle-ci peut ou non se produire pour une solution prise isolément. L'invariance a lieu par exemple si cette solution convient, cela *à titre unique*, à un problème $P_1$ déduit de $P$ par adjonction de conditions supplémentaires soumises à la même hypothèse d'invariance $I_G$ que ci-dessus. La conclusion peut encore subsister, même s'il n'y a pas unicité, lorsque certaines modalités topologiques sont remplies: telle, l'absence de solutions arbitrairement voisines de $S$, au cas où $G$ est un groupe de Lie. Mais, si l'on ne fait aucune hypothèse adéquate, la solution $S$ ne participe pas en général, au caractère d'invariance $I_G$. Un exemple banal est celui où, $K$ étant le plan euclidien, on donne un champ vectoriel invariant par les rotations autour d'un point fixe $O$: les courbes tangentes au champ en chaque point ne sont pas en général des cercles de centre $O$. C'est l'ensemble de ces courbes qui reste invariant par rotation.

Il y a pourtant des cas voisins où cette remarque simple a été méconnue: tels les premiers essais sur les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène on rotation uniforme autour d'un axe, sous influence de l'attraction newtonienne. Certains ont d'abord pensé que chaque figure d'équilibre est de révolution autour de l'axe (1).

3. A la suite de ces généralités, prenons le problème de Cauchy pour une équation

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

et pour une courbe donnée $C_0$ lorsque $f=0$ et $C_0$ possèdent l'invariance par rapport à un groupe continu $G$ à un paramètre. Tout cela répond bien aux suppositions du n.º 2.

(1) Cf. G. Bouligand — *Les principes de l'Analyse géométrique*, t. II, fasc. A, ch. I, p. 1 et 10; ch. VII, p. 108; ch. IX, p. 143, 169, 170, 181.

(1) Lagrange a été critiqué à cet égard en divers textes (Notice de Lejeune-Dirichlet, t. I, p. 19 des *Gesammelte Werke* de Jacobi; t. II du *Système du Monde*, 2.e éd.n par G. de Pontécoulant p. 438 et 567.) Mais ce n'est pas pour recours à des considérations de symétrie douteuses.

Ayant correctement fait la mise en équations pour le cas des ellipsoïdes, Lagrange oublie seulement la solution aux trois axes inégaux qu'il était réservé à Jacobi de découvrir.

J'ai déja signalé à cet égard (1) deux points importants.

$a$) D'une part, le problème $P$ actuel admet des solutions, engendrées par des courbes $C$, qui à l'exemple de $C_0$, sont des trajectoires du groupe $G$ et qu'on trouve en résolvant le problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire du premier ordre, à savoir $f\left(y, z, 0, \frac{dz}{dy}\right)=0$ si $C_0$ est $0x$ et $G$ est le groupe des translations parallèles à $0x$ (2). Il arrive même qu'on obtienne ainsi toutes les solutions de $P$: cela se produit quand, par adjontion à l'énoncé de $P$ d'une condition supplémentaire elle-même invariante par $G$, on assure l'unicité, pour la solution du nouveau problème $P_1$ qui se présente alors. En atteignant cette unicité, on assure l'invariance par $G$ de la surface intégrale demandée dans $P_1$, ou encore, le fait qu'elle se laisse engendrer par des trajectoires de $G$.

$b$) D'autre part, un tel mode de génération peut se trouver exclu, faute de pouvoir, dans les conditions indiquées, tabler sur le passage de $P$ à un certain $P_1$ à solution unique. J'ai déja signalé, sous forme analytique, le cas où $P$ est le problème de Cauchy pour $qy-z=0$ et l'axe $0x$. L'intégrale générale est alors constituée par les conoïdes d'axe $0x$ et de plan directeur $y0z$, lesquels conduisent bien à l'équation indiquée. Il est clair que l'un deux, pris au hasard, ne se réduit pas à un cylindre de génératrices parallèles à $0x$. Dans ce cas, l'invariance par les translations le long de $0x$ a lieu pour l'équation donnée et pour $C_0$; elle a lieu aussi pour l'ensemble des solutions, mais elle disparait pour une solution prise au hasard.

Voilà le type de singularité sur lequel j'insiste ici, et qui dans l'exemple cité provient de l'annulation des coefficients sur $0x$, jouant le rôle de ligne $C$. Cette annulation empêche de pouvoir réaliser les hypothèses qui entraineraient l'unicité de certaines solutions passant par $C$.

3.bis Tous les exemples qu'on peut tirer du précédent par le jeu d'une transformation ponctuelle s'attachent à des équations qui sont linéaires en $p, q$. Il n'est pas inutile de donner un exemple de la même nature pour une équation non linéaire. On prendra la suivante

$$\text{(E)} \quad pqz\,(x^2-y^2)+py\,(z^2+x^2)-qx\,(z^2+y^2)=0$$

laquelle admet le groupe $G$ des homothéties par rapport au point $O$ et ainsi, possède une famille d'intégrales qui sont réduites à des cônes de sommet $O$. Leurs traces sur le plan $z=1$ vérifient une équation différentielle ordinaire, obtenue en écrivant que le vecteur $(p, q, -1)$ normal à un de ces cônes est colinéaire au vecteur $(-y'z, z, xy'-y)$ représentant le produit vectoriel de $(1, y', 0)$ et $(x, y, z)$. D'où l'equation cherchée

$$\frac{y'^2}{1+y^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

On trouve des cônes du second degré

$$(\Gamma) \qquad x^2+y^2+z^2-2\,mxy-m^2z^2=0$$

Soit maintenant posé le problème de Cauchy pour l'équation (E) et pour une droite issue de $O$ (laquelle est bien invariante par $G$). Il est facile de voir que si cette droite $\Delta$ ne coïncide avec aucun des axes, chacun des deux cônes (toujours réels et distincts) de la famille $\Gamma$ passant par cette droite jouit de la proprieté d'unicité pour le problème $P_1$ de Cauchy concernant $E$, ainsi que $\Delta$, lorsqu'on choisit une des bandes formées, sur l'un de ces cônes, par les élements de contact ayant $\Delta$ pour support ponctuel.

Mais tout change quand $\Delta$ coïncide, soit avec $0x$, soit avec $0y$. Il suffit pour s'en convaincre de noter que (E) admet, pour toute valeur de la constante $\lambda$, la solution $z=\lambda xy$.

Cela donne pour intégrales des paraboloïdes hyperboliques passant par $0x$ et par $0y$. Le problème de Cauchy, posé pour (E) et pour l'une de ces droites, admet donc bien une infinité d'intégrales qui ne sont pas réduites à des cônes de sommet $O$. Il subsiste d'ailleurs la question de voir s'il n'en existerait pas d'autres encore.

4. Les considérations de l'exemple ci-dessus vont nous servir de transition vers un ensemble de sujets, qui semblent peu étudiés, et dont le thème essentiel est la mise en relations des systèmes triples orthogonaux avec certaines équations $f(x, y, z, p, q)=0$.

Prenons d'abord pour $f$ um polynôme du second dégré quelconque en $p, q$: ce qui conduit à une équation $f=0$ que déterminent 5 familles d'intégrales à un paramètre, pourvu qu'en un point courant $M$, les 5 normales aux surfaces de ces familles passant en $M$ définissent sans ambiguïté un cône du second ordre. Si 3 de ces familles

$$g_1(x, y, z)=\alpha_1, \quad g_2=\alpha_2, \quad g_3=\alpha_3$$

introduisent une transformation localement biunivoque, cela permettra de ramener $f=0$ à la forme canonique

$$\text{(K)} \qquad pq+A\,(x, y, z)\,q+B\,(x, y, z)\,p=0$$

(1) G. Bouligand — *Sur le problème de Cauchy* — Bull. Sc. Math, 2, LX, 1936, p. 206-209.

(2) Au moins localement, on établit que les autres cas de $P$ peuvent se ramener à celui-là par une transformation ponctuelle appropriée.

ou indifféremment

$$1+\frac{A}{p}+\frac{B}{q}=0$$

forme englobant l'équation (E) du n.º $3^{\text{bis}}$. Chaque plan parallèle à un plan de coordonnées est alors une intégrale et il suffit de 2 nouvelles familles $F'$ e $F''$ d'intégrales pour fixer l'équation. Le cône des normales en un point $M$ contient alors les parallèles aux axes issus de $M$, les normales à chacune des surfaces passant par $M$ dans $F'$ et $F''$: ce qui le détermine en général. Ainsi, dans le cas de (E), la détermination du cône des normales peut s'achever en recourant à la double famille $F'$, $F''$ constituée par les cônes $(\Gamma)$. Notons encore, qu'en posant

$$U=z^2+y^2\,,\quad u=z^2+x^2\,,$$

(E) a deux familles $F'_1$, $F''_1$ d'intégrales obtenues en prenant $U$ fonction de $u$ seul. En effet, cela conduit à prendre

$$pz=\frac{dU}{du}(x+pz)\qquad y+qz=\frac{dU}{du}qz$$

d'où, en portant dans (E) les valeurs de $p$ et de $q$, exprimées en $U'$ $(=dU/du)$ et simplifiant

$$\frac{(U-u)U'}{1-U'}+U'u+U=0$$

ou

$$U-uU'^2=0$$

d'où

$$\sqrt{U}\pm\sqrt{u}=\text{const.}$$

Les familles $F'_1$, $F''_1$ sont donc obtenues comme lieux de points dont la somme ou la différence des distances aux axes $0x$, $0y$ sont constantes. Dès lors les intersections des surfaces de ces familles forment, comme il est connu, les trajectoires orthogonales aux paraboloïdes $xy=\alpha z$, surfaces qui parachèvent avec celles de $F'_1$, $F''_1$ un système triple, composé de 3 familles d'intégrales de (E).

$4^{\text{bis}}$. Soient maintenant deux systèmes triples orthogonaux quelconques $STO_1$, $STO_2$. En chaque point $M$, interviennent deux trièdres trirectangles dont les arêtes sont les directions principales. Ces deux trièdres son sur un même cône du second degré $\gamma(M)$. L'équation aux dérivées partielles ayant $\gamma(M)$ pour cône des normales sera de la forme

$$(\mathrm{K}_1)\quad A_1(p^2-1)+B_1(q^2-1)+2\,Cpq+2\,Aq+2\,Bp=0$$

En particulier, si $STO_2$ se réduit aux trois familles de plans parallèles aux plans de coordonnées, familles qui constituent le système noté *sto*, cette équation par annulation de $A_1$ et de $B_1$, prendra la forme (K).

A supposer que ces équations puissent être de quelque utilité pratique pour la recherche de systèmes triples orthogonaux, il est indiqué d'étudier d'abord l'équation (K). Il s'agira donc de décider dans quelles conditions il existe pour (K) 3 familles d'intégrales à un paramètre, et qui conduisent à un $STO$ distinct de *sto*. Qu'il s'agisse de (K) ou de $(\mathrm{K}_1)$ cela se produit d'ailleurs, avec apparition d'une famille continue à un paramètre de $STO$, lorsque les fonctions de $x, y, z$ désignées par des grandes lettres et figurant comme coefficients se réduisent à des constantes. Toute génératrice du cône $\gamma(M)$ peut alors jouer le rôle de direction principale pour un de nos $STO$.

Mais pour une équation du type (K) choisie d'une manière quelconque, on pressent qu'elle ne fournit aucun $STO$ distinct de *sto*. A cet objet, prenons une fonction de point $h(M)$ dont les surfaces de niveau ne forment pas une famille de Lamé. En chaque point $M$, faisons passer le cône $\gamma(M)$ par les trois parallèles aux axes et par les deux tangentes principales à la surface de niveau de $h$ qui passe en ce point. Nous aurons une équation du type (K) dont le mode d'obtention, sans donner de certitude négative, laisse cependant peu d'espoir d'obtenir un $STO$.

En effet, à supposer qu'un tel $STO$ existe sa recherche pourrait s'amorcer à partir du principe suivant, applicable indifféremment à la forme (K) ou $(\mathrm{K}_1)$ de l'équation $f=0$. Envisageons une surface intégrale $s$. En un point $M$, le cône $\gamma(M)$, qui porte la normale à $s$, coupe le plan tangent suivant deux droites rectangulaires $Mu$, $Mv$. Pour que $s$ soit élement d'un $STO$ inclu dans l'ensemble des solutions de $f=0$, il faudrait qu'en chaque point de $s$ ces tangentes $Mu$, $Mv$ soient principales. Ce sont là des conditions nécessaires, mais en général non suffisantes. Ayant formé l'équation du second ordre à laquelle doit satisfaire $s$ pour que les tangentes rectangulaires $Mu$, $Mv$, soient aussi conjugaées, il faudra chercher s'il existe des solutions communes à cette équation du second ordre et à la proposée $f=0$. Si l'on a pu déterminer les surfaces $s$ pour lesquelles cette circonstance se produit, et même si l'on en a obtenu une famille à un paramètre, on devra encore s'assurer que, pour leurs lignes de courbure d'un des systèmes, il existe des trajectoires orthogonales, ce qui introduit une condition nouvelle. Or dans le cas envisagé à l'alinéa précédent, la famille d'intégrales à un paramètre dont on est parti pour déterminer l'équation présente bien la coïncidence en chaque point des directions $Mu$, $Mv$ avec les tangentes principales, et ne satisfait pas aux conditions supplémentaires dont nous venons de parler. Il est à craindre que la même impossibilité se présente pour d'autres familles d'intégrales qui auraient aussi la même propriété de coïncidence.

Les difficultés actuelles n'ont rien qui puissent surprendre en des problèmes où, au lieu de chercher des intégrales d'une équation aux dérivées partielles dont chacune se détermine isolément, nous cherchons par exemple 3 de ces intégrales $u$, $v$, $w$ pour l'équation suivante solidaire de (K)

$$\frac{1}{\omega_z} = \frac{A}{\omega_x} + \frac{B}{\omega_y}$$

en les soumettant à des relations mutuelles telles que dans le cas présent:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, v \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, w = \overrightarrow{\text{grad}}\, w \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u = \overrightarrow{\text{grad}}\, u \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, v = 0$$

Il s'agit ici en fait de la compatibilité d'un système de 6 équations du prémier ordre à 3 fonctions inconnues, ce qui ne peut manquer d'amener à des calculs assez complexes. Il y aura donc lieu de commencer, dans le champ défini par les considérations prècédentes, par l'examen de problèmes plus simples [1].

5. Tel sera le cas de la question suivante:

*On se donne deux équations aux dérivées partielles du premier ordre*

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad g(x, y, z, p, q) = 0$$

*qui définissent ou non le même ensemble d'éléments* $(x, y, z, p, q)$. *On demande s'il existe deux champs scalaires* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ *tels qu'il y ait orthogonalité entre chaque surface de niveau du premier et chaque surface de niveau du second, le long de leur intersection, tels en outre que les surfaces* $u = C.^{te}$ *soient des intégrales de* $f=0$, *et les surfaces* $v=$ const. *des intégrales de* $g=0$ ?

[1] En marge de notre exposé, il est bon d'observer qu'en partant d'un système triple orthogonal donné, on pourra toujours le définir comme le système des intégrales communes aux diverses équations $f(x, y, z, p, q) = 0$ telles que $f$ soit un polynôme du second degré en $p$, $q$, le cône $\gamma(M)$ des normales en chaque point $M$ devant passer par les trois arêtes du trièdre qui est principal pour le $STO$ donné en ce point. Cette classe d'équations pourra s'écrire, en appelant $U$, $V$, $W$ des polynômes du 1er degré en $p$, $q$, à coefficients fonctions de $x$, $y$, $z$, sous la forme

$$\frac{\alpha}{U} + \frac{\beta}{V} + \frac{\gamma}{W} = 0$$

en appelant $\alpha, \beta, \gamma$ des *fonctions arbitraires* de $x$, $y$, $z$. Il est entendu que chacune des équations telle que $U=0$ exprime l'orthogonalité du vecteur $p$, $q$, $-1$ à un vecteur $\vec{u}$ ou $(A_1, B_1, C_1)$ donnant la diréction d'une arête du trièdre principal en un point courant. En posant

$$U = A_1 p + B_1 q - C_1, \quad V = A_2 p + B_2 q - C_2, \quad W = A_3 p + B_3 q - C_3,$$

on aura donc entre les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les relations qui expriment l'orthogonalité de deux d'entre eux. Ces vecteurs sont d'ailleurs complétement déterminés par le fait qu'on part d'un $STO$ donné.

La question pourrait être étudiée en géométrie riemannienne, mais sera limitée ici *au cas euclidien*. Si l'on écrit sous la forme

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

les équations exprimant que le vecteur $(\xi, \eta, \zeta)$ est normal au point $x, y, z$ à une intégrale soit de $f=0$, soit de $g=0$, on devra prendre

$$f(x, y, z, p, q) = F(x, y, z, p, q, -1)$$
$$g(x, y, z, p, q) = G(x, y, z, p, q, -1)$$

Les champs scalaires $u$ et $v$ demandés seront définis par le système

$$(S) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, u_x, u_y, u_z) = 0 \\ G(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = 0 \\ u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \end{cases}$$

La recherche de solutions de (S) s'amorce en notant que les surfaces $v = c.^{te}$ satisfont à l'équation

$$dz = p dx + q dy$$

où $p, q$ sont des fonctions de $x, y, z$, définies par les équations simultanées

$$g(x, y, z, p, q) = 0$$
$$\omega(x, y, z, p, q) = Up + Vq - W = 0 \quad (\text{où } U = u_x, \ V = u_y, \ W = u_z)$$

Comme il est connu, la condition d'intégrabilité s'écrit alors

$$\omega_x g_p + \omega_y g_q + \omega_z (p g_p + q g_q) - \omega_p (g_x + p g_z) - \omega_q (g_y + q g_z) = 0$$

ce qui, pour un champ vectoriel $U$, $V$, $W$ et une $g$ quelconques donne la condition

$$(U_x p + V_x q - W_x) g_p + (U_y p + V_y q - W_y) g_q + (U_z p + V_z q - W_z)(p g_p + q g_q) - (U g_x + V g_y + W g_z) = 0$$

$p, q$ représentant l'un des couples de valeurs, fonctions de $x, y, z, U, V, W$, déterminés par $g=0$, $\omega=0$. Lorsqu'on choisit pour $(U, V, W)$ le gradient de $u$, on est ainsi conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes. En général la première équation $F=0$ du système (S) n'a en commun avec l'équation ainsi formée d'autre solution que $u =$ const. Sauf en des cas particuliers, il n'y a donc pas de système doublement orthogonal comprenant une famille à un paramètre d'intégrales de $f=0$ et une famille anologue pour $g=0$.

6. C'est ce résultat qu'il s'agit d'appliquer lorsque $f$ et $g$ coïncident avec une expression de la forme

$$f = g = 1 + \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$$

ce qui conduit à écrire simultanément

$$\frac{1}{u_z} = \frac{A}{u_x} + \frac{B}{u_y}$$

$$(u_{xx}\,p + u_{xy}\,q - u_{xz})\,\frac{A}{p^2} + (u_{xy}\,p + u_{yy}\,q - u_{yz})\,\frac{B}{q^2} +$$
$$+ (u_{zx}\,p + u_{zy}\,q - u_{zz})\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) + u_x\left(\frac{A_x}{p} + \frac{B_x}{q}\right) +$$
$$+ u_y\left(\frac{A_y}{p} + \frac{B_y}{q}\right) + u_z\left(\frac{A_z}{p} + \frac{B_z}{q}\right) = 0$$

où l'on prend pour $p, q$ l'un des couples déterminés par

$$f = 0 \qquad u_x\,p + u_y\,q - u_z = 0$$

L'équation $f = 0$ équivaut à

$$(p + A)\,(q + B) = AB$$

ce qui permet de poser

$$p = A\,(t-1) \qquad q = B\left(\frac{1}{t} - 1\right)$$

où $t$ est l'une des racines de l'équation

$$Au_x\,(t-1) + Bu_y\left(\frac{1}{t} - 1\right) - u_z = 0$$

On voit que, malgré les précautions prises, l'équation du second ordre qui conditionne la fonction $u$, cela concurremment à l'équation

$$u_x\,u_y = u_z\,(Bu_x + Au_y)\,,$$

est une équation assez peu maniable. En dehors de solutions communes évidentes $\alpha x + \alpha_1$, $\beta y + \beta_1$, $\gamma z + \gamma_1$, il est difficile de prévoir, dans une discussion systématique, ce que sera l'ensemble de toutes les solutions communes.

Il n'en est pas moins important d'avoir signalé cette voie assez incommode, car lorsque $A, B$ sont des fonctions de types particuliers, il n'est pas exclu qu'elle puisse se prêter à des simplifications.

Pour clore ces géneralités, notons qu'à partir du moment où, ce qui s'est présenté par exemple dans (4), deux familles d'un $STO$ sont des intégrales d'une équation du type (K), alors, il en est de même de la troisième. Mais ce cas suppose remplies des conditions vraiment trop favorables pour offfrir beaucoup d'intérêt.

7. Tout un champ de recherches apparait quand on introduit diverses hypothèses annexes : à savoir par exemple, que l'équation de type (K) admette l'invariance, ou bien par les translations parallèles à une direction fixe, ou bien par les homothéties faites d'un point fixe comme centre. Les problèmes concernant les systèmes triples orthogonaux détenant l'un de ces modes d'invariance ont d'ailleurs été sérieusement étudiés indépendamment des considérations actuelles [1].

Or ces dernières présentent parfois de l'intérêt. Reprenons par exemple, le système formé des quadriques homofocales définies par l'équation

$$(Q_\lambda) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

et des diverses quadriques homothétiques des $(Q_\lambda)$ par rapport à l'origine $O$ dans un rapport quelconque. Ce système fournit une intégrale complète d'une équation qui s'obtient en éliminant $\lambda$ entre les deux suivantes

$$\frac{x}{a^2+\lambda} + \frac{pz}{c^2+\lambda} = 0 \qquad \frac{y}{b^2+\lambda} + \frac{qz}{c^2+\lambda} = 0$$

ce qui donne

$$(b^2 - c^2)\,q\,(x + pz) - (a^2 - c^2)\,p\,(y + qz)\,.$$

L'équation obtennue est du type (K), et jouit de l'invariance $I_G$ par le groupe $(G)$ des homothéties de centre $O$. Rèciproquement, pour toute valeur constante du rapport $\alpha/\beta$, l'équation

$$(H) \qquad \alpha\left(1 + \frac{x}{pz}\right) + \beta\left(1 + \frac{y}{qz}\right) = 0$$

détermine à une homothétie près de centre $O$ un système de quadriques homofocales. L'équation (H) convient aux surfaces dont une normale quelconque $MN$, coupant en $N$ le plan $x0y$, donne lieu à la propriété suivante : entre la direction $ON$ et celle $Ou$ de la trace sur $x0y$ du plan parallèle à $MN$ mené par $0z$, existe une correspondance homographique de rayons doubles $0x, 0y$. En prenant une droite fixe $\Delta$ issue de $O$, les normales menées aux $(Q_\lambda)$ en leurs intersections avec $\Delta$ sont parallèles aux géneratrices d'un cône du second degré passant par $\Delta$ et par les axes de coordonnées. Grâce à quoi, intervient une équation du type (K), ce qui ne se produirait évidemment pas en partant d'un $STO$ quelconque et des ses homothétiques par rapport à $O$.

Nous venons de constater la présence d'une famille continue à un paramètre de $STO$ satisfaisant à l'équation (H), douée de l'invariance $I_G$. Cette invariance convient à la famille continue précédente, prise

[1] G. Darboux — *Leçons sur les systèmes triples orthogonaux et les coordonnées curvilignes* 2.e édition, 1910, livre III, ch. VIII.

en bloc, en restant étrangère à un quelconque de ses éléments, ce qui donne un nouvel exemple à l'appui des remarques du n.º 2.

8. Cela suggère d'essayer de caractériser, entre les divers $STO$, celui des quadriques homofocales centrées en $O$, par un propriété des normales à ces surfaces en leurs points situés sur quelque droite fixe $O\Delta$, propriété conduisant à une équation du type (K). Par exemple, ont peut songer à remplacer l'équation (H) par l'équation plus générale

$$(H_1) \qquad A\left(1+\frac{x}{pz}\right)+B\left(1+\frac{y}{qz}\right)=0$$

où le rapport $A/B$ ne dépend que de $x/z$, $y/z$, ce qui assure l'invariance $I_G$. Une telle équation se distingue d'autres plus générales et notamment de

$$C+A\frac{x}{pz}+B\frac{y}{qz}=0$$

par le fait d'avoir pour solutions les sphères $x^2+y^2+$ $+z^2=\rho^2$. Or l'adjonction d'une telle hypothèse est assez naturelle, vu la tendance d''ellipsoïdes homofocaux, dont le petit axe croit indéfiniment, à devenir homothétiques à des sphères: cela explique ce fait que le cône du second degré rencontré à la fin du n.º 7, passe par $O\Delta$. On pourrait choisir $(H_1)$ de manière à lui donner pour solutions les cônes d'une famille à un paramètre avec $O$ pour sommet commun, famille prise de manière que par chaque point, il passe un cône et un seul. Dans les solutions de $(H_1)$, serait alors inclu le $STO$ formé par les sphères de centre $O$, les cônes précédents et ceux qui les coupent orthogonalement. Mais l'interêt se porte ici vers les $(H_1)$ incluant d'autres $STO$, tous homothétiques par rapport à $O$ de l'un d'entre eux. Il s'agirait de savoir si les conditions assurant l'existence d'une telle famille de $STO$ peuvent être satisfaites en d'autres cas que celui où $A/B$ reste constant (¹).

D'après une idée signalée au n.º 4[bis], on aurait des conditions nécessaires en exprimant l'existence de solutions communes à $(H_1)$ et à l'équation du second ordre

$$Ax\,qr+[(A+B)\,z-Axp-Byq]\,s+By\,pt=0$$

formée en écrivant que pour chaque point d'une certaine intégrale de $(H_1)$, les tangentes orthogonales $Mu$, $Mv$ sont aussi conjuguées. Le calcul peut se faire en prenant $B=1$, mais reste assez pénible, sans toutefois exclure des possibilités de recherche.

9. Le cas des paraboloïdes homofocaux appelle aussi des remarques intéressantes. L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont, avec ces paraboloïdes, leurs translatés parallèlement à leur axe $Oz$ est de la forme

$$(h) \qquad \frac{x}{p}-\frac{y}{q}=c$$

où $c$ désigne une longueur constante. Or, tandis que dans l'équation (H) du n.º 7, relative à des quadriques homofocales concentriques, se trouvait inclu un $STO$ formé par les sphères de centre $O$ et les cônes asymptotes de ces quadriques, il ne subsiste ici aucun vestige d'une propriété analogue. Le rôle des sphères de centre $O$ passe aux plans $z=$ const. mais dans ces plans, on ne peut définir de courbes qui viendraient supplanter les sections sphériques de nos cônes. En effet, dans équation solidaire de (h), soit

$$u_z\,(xu_y-y\,u_x)+c\,u_x\,u_y=0$$

l'annulation de $u_z$ implique celle du produit $u_x\,u_y$, si bien que le seul système triple inclu dans (h) et pouvant apparaître de la sorte est le banal *sto* du n.º 4[bis]. La caractérisation éventuelle des paraboloïdes homofocaux au sein d'une classe d'équations du type (K), invariantes dans les translations parallèles à $Oz$, est donc à fonder, semble-t-il, sur des principes assez différents de ceux qui nous ont conduit par exemple à isoler le cas des équations $(H_1)$ (¹).

Dans ces recherches, où certains ternes de solutions empruntés à la solidaire d'une équation du type (K) doivent fournir un $STO$, il serait intéressant, en général, de délimiter les ensembles d'équations de cette nature, où par le jeu des conditions assurant l'existence de tels ternes, il n'émerge qu'un système très restreint d'éléments : sorte de *quantification géométrique*, analogue à celle qui se produit quand, pour chercher une fonction uniforme $z$ de $x$, $y$, on est conduit à écrire par exemple

$$dz=dU\,(x\,,y)+f\,(\lambda)\,(xdy-ydx)$$

où $U$ est une fonction uniforme donnée et où $\lambda$ est une constante indéterminée. En ce cas simple, il n'y a de solutions qu'en égalant le paramètre $\lambda$ à l'une des racines de $f=0$.

(¹) Ce cas est insigne à d'autres titres. Par exemple, il émerge par l'invariance que détient (H) relativement aux transformations menant d'une surface à une surface parallèle; ou encore par la propriété pour $(H_1)$ d'admettre une surface intégrale non développable et non sphérique, reduite à une quadrique symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées.

(¹) Noter cependant que (h), comme (H), est invariant par parallélisme.