

PEDAGOGIA

O conceito de derivada de uma função
na Escola Secundária

por Maria Teodora Alves

Nos primeiros anos deste século acentuaram-se as críticas à Metodologia e programas de Matemática na escola secundária.

Klein, Borel, Tannery e Laisant contribuíram poderosamente com a autoridade incontestável da sua crítica para um movimento reformador dos métodos e programas de Matemática da escola secundária que teve reflexos em todos os países civilizados. Nesse movimento renovador era preconizada a introdução, no programa de Matemática da escola secundária, entre outros conceitos, do conceito de derivada de uma função e de função primitiva.

Vou transcrever de «Science et Philosophie» de J. Tannery alguns trechos elucidativos, da opinião deste ilustre matemático e pedagogo, sobre o assunto: «Sans doute les raisonnements qui permettent de passer du prisme droit au prisme oblique, puis d'établir le volume de la pyramide sont extrêmement ingénieux; il convient de les garder dans un musée historique afin de montrer combien nos ancêtres étaient intelligents; leur place n'est pas dans l'enseignement élémentaire...»

Je connais deux moyens de les remplacer: ... L'un est médiocre, l'autre est excellent... Le second procédé, celui qui est excellent, mais qui demande un effort notable, consiste à apprendre d'abord le calcul intégral, avant d'étudier la mesure des volumes dont je parle. — Le calcul intégral! Y pensez-vous? À l'École primaire! À l'école primaire supérieure ou à l'école normale, oui: je ne ris pas du tout, je suis le plus sérieux du monde. L'effort qu'il faut pour apprendre ce que c'est qu'une dérivée, qu'une fonction primitive, et comment l'on s'y prend, à l'aide de ces admirables outils, pour évaluer une surface et un volume est certainement moindre que l'effort qu'on demande à un enfant pour apprendre à établir la mesure du prisme oblique après celle du prisme droit, l'équivalence de deux pyramides (vous savez bien, la figure à escaliers, qui est ennuyeuse à faire), — puis les insupportables volumes tournants».

Como acabamos de ver o conceito de função derivada, e mesmo de função primitiva, no programa da

escola secundária tem o apoio de alguns dos nomes mais notáveis na investigação matemática e na pedagogia, mas está condicionada à sua utilização pelos alunos como instrumento para a resolução de questões e problemas determinados.

A derivação de funções, na opinião desses ilustres professores, não deve ser ensinada na escola secundária somente para que os alunos calculem derivadas de funções e resolvam os numerosos exercícios que figuram habitualmente nos cadernos de exercícios. É um instrumento de trabalho que deverá ser usado pelos alunos e cuja utilidade deverá ser por eles reconhecida.

Em todos os programas da escola secundária que conheço e em que foi introduzido o conceito de derivada de uma função (França, Inglaterra, Bélgica, Estados Unidos da América) há consequentemente, como uma das suas aplicações, pelo menos, o estudo da variação de certas funções.

O programa actual dos nossos liceus, introduzindo o conceito de derivada de uma função, mas suprimindo as suas aplicações, apresenta, a meu ver, uma deficiência. O conceito de derivada, assim introduzido no programa, equivale, por exemplo, ao estudo das equações do 1.º e 2.º graus sem as aplicar à resolução de problemas que possam ser traduzidos por elas. Mais comezinhamente, equivale à aquisição de um microscópio ou de uma máquina fotográfica sem que se saiba utilizar esses instrumentos nem para que servem.

Mas os programas de Matemática de 6.º e 7.º anos estão sobrecarregados — eu assim o considero — e deverão ainda ser mais sobrecarregados com algumas questões em que se aplique o conceito de derivada? Em face da sobrecarga do programa, a meu ver, só uma de duas atitudes seria razoável: ou se podiam suprimir outras rubricas que nele figuram e substituí-las pelo conceito de derivada e sua aplicação ao estudo de alguns problemas, ou não havia essa possibilidade, e então... não seria introduzido no programa esse conceito.

A afirmação de que os alunos que se dirigem para

as escolas superiores precisam de adquirir na escola secundária, o conceito de derivada de uma função, considero de valor reduzido.

A este respeito estou a lembrar-me da resposta que o ilustre matemático H. Lebesgue deu no inquérito promovido por «L'enseignement scientifique» acerca dos conhecimentos especiais que um aluno devia ter para ingressar nos cursos superiores: «Nenhum conhecimento especial precisa de ter o aluno que deseja ingressar numa Faculdade de Ciências ou Escola de Engenharia. Basta que saiba pensar». Foi esta a resposta do ilustre Lebesgue.

Com efeito, ensinar a pensar claro, deve ser uma das finalidades da escola secundária e a única finalidade dos programas do seu curriculum.

Quanto à localização do conceito de derivada de uma função, no programa vigente, também não me parece que tenha sido muito feliz.

Aquele conceito aparece no 7.º ano entre as seguintes rubricas do programa: «Problemas do 2.º grau, discussão» e Trigonometria: Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos.»

Por outro lado, no programa do 6.º ano, a seguir às rubricas «Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função.» aparece esta rubrica «Propriedades dos polinómios inteiros.»

Estava naturalmente indicado, como sequência das primeiras rubricas transcritas, o conceito de derivada de uma função.

Houve ali uma amputação desse conceito para surgir desgarrado no programa de 7.º ano.

Vou agora considerar, relativamente ao estudo da derivação no programa vigente, um aspecto muito restrito.

Trata-se da derivação da função do seno de um ângulo.

Como fazê-lo?

A derivada da função seno de um ângulo é uma rubrica do programa anterior à da transformação da diferença de senos de dois ângulos em produto, e esta última rubrica, deve ser aplicada no cálculo do limite da razão incremental para estabelecer a derivada do seno.

Mas a ordem das rubricas do programa não pode ser alterada pelo professor. É uma determinação do Estatuto. Como conciliar pois as determinações do Estatuto com a ordenação encadeada das ideias dos alunos?

Consultei algumas dezenas de tratados sobre o assunto, quer nacionais quer estrangeiros, e à excepção

de um, todos os outros determinam o limite da razão incremental depois de transformar em produto a diferença dos senos de dois ângulos.

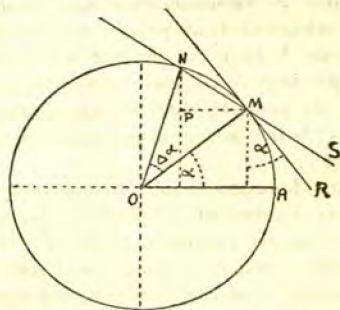
Sómente em «Notions Élémentaires de Mathématiques pour les Sciences Expérimentales» pour Léon Brillouin, encontrei a demonstração da derivada da função seno de um ângulo sem o recurso à transformação da diferença de senos em produto. Brillouin determina a derivada do seno de um ângulo projectando sobre o eixo das abscissas o acréscimo dado ao arco que mede o ângulo.

A leitura do livro de Brillouin sugeriu-me as duas demonstrações que a seguir apresento relativas à derivada da função seno e da função tangente de um ângulo.

Eu ousou agora pedir, ao autor ou autores do programa, a amabilidade de me informarem, por intermédio da «Gazeta de Matemática», ou particularmente, quais os tratadistas que conhecem que estabelecem elementarmente a derivada do seno ou tangente de um ângulo independentemente da transformação em produto da diferença de senos de dois ângulos e conforme a orientação que eu a seguir indico.

Derivada do seno:

Seja $y = \sin \alpha$



$$\text{med } \widehat{AOM} \equiv \text{med } \widehat{AM} \equiv \alpha,$$

$$\text{med } \widehat{MON} \equiv \text{med } \widehat{MN} \equiv \Delta \alpha,$$

MR tangente á circunferência a no ponto M ; \overline{MP} paralela a \overline{OA} e $\Delta y \equiv \overline{PN}$.

De $[NMP]$ deduz-se:

$$(1) \quad \overline{PN} = \overline{MN} \cos \widehat{PNM}$$

Quando $\Delta \alpha$ tende para zero, o ângulo \widehat{PNM} tende para α e a corda \overline{MN} tende para o arco \widehat{MN} ⁽¹⁾.

(1) Esta afirmação é dada intuitivamente aos alunos, mas podia ser facilmente demonstrada recorrendo aos conhecimentos que eles já possuem.

Dividindo (1) por $\Delta \alpha$

$$\frac{\overline{PN}}{\Delta \alpha} = \frac{\overline{MN}}{\Delta \alpha} \cdot \cos \widehat{PNM}$$

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\overline{PN}}{\Delta \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\overline{MN}}{\Delta \alpha} \cdot \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \cos \widehat{PNM};$$

mas $\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\overline{MN}}{\Delta \alpha} = 1^{(1)}$ e portanto: $y' = \cos \alpha$

Derivada da tangente:

Seja $y = \operatorname{tg} \alpha$.

Do triângulo $[OBC]$ vem:

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \Delta \alpha} = \frac{\overline{OB}}{\operatorname{sen} \beta}$$

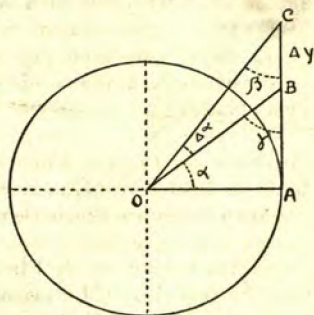
então:

$$\overline{BC} = \overline{OB} \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta \alpha}{\operatorname{sen} \beta}, \text{ ou } \Delta y = \sec \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta \alpha}{\operatorname{sen} \beta};$$

(1) Como se poderia demonstrar com os conhecimentos que os alunos já possuem.

mas, quando $\Delta \alpha$ tende para zero, $\operatorname{sen} \beta$ tende para $\operatorname{sen} \gamma$. De:

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta \alpha} = \sec \alpha \cdot \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta \alpha}{\Delta \alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}$$



vem: $y' = \sec \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma}$ e por ser $\operatorname{sen} \gamma = \cos \alpha$ é

$$y' = \sec \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ ou } y' = \sec^2 \alpha.$$

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS

Esta reunião internacional, que deve ser um dos maiores acontecimentos no mundo matemático no presente ano, continua despertando em todos os países um enorme interesse inteiramente justificado. Terão então a ocasião de encontrar-se, expor as suas descobertas, discutir os problemas em estudo e os diversos pontos de vista os matemáticos de vários continentes. A actividade dos centros de estudos, que se nota no após guerra na grande maioria dos países ainda ontem envolvidos no conflito, os numerosos congressos nacionais e os colóquios internacionais de matemática constituem, em nossa opinião, um indício do exito científico do próximo congresso de Cambridge. Mass., que uma cuidada preparação garante também,

O Presidente e o Secretário Geral da Comissão Organizadora do Congresso honraram a Sociedade Portuguesa de Matemática e a Junta de Investigação Matemática com o convite formal de participação.

Temos o prazer de noticiar que a nossa representação se encontra já assegurada. Com efeito alguns matemáticos portugueses enviaram já comunicações que foram aceites. De momento temos conhecimento das seguintes: «On lattices of abelian groups with a finite base» de Hugo B. Ribeiro; «On the origin of positive and negative electricity» de António Gião e uma outra de Ruy Luís Gomes.

M. Z.

CENTROS MATEMÁTICOS E COLÓQUIOS

Centros Matemáticos Italianos

A Itália é um país de fortes tradições matemáticas. É porém de admirar como, pouco tempo passado sobre uma guerra que tão duramente fez sofrer este povo,

se assista a um ressurgimento notável de actividade matemática em tão variadas manifestações: publicações especializadas ou de carácter didático, revistas da especialidade, reuniões frequentes de vários tipos nas cidades italianas, participação em congressos estran-