Jubileu do Prof. W. Sierpinski

Em 1948 em Varsóvia teve lugar a cerimónia comemorativa do 40.º aniversário da actividade científica e universitária do Prof. W. Sierpinski, grande matemático, um dos fundadores e eminente representante da Escola Polaca de Matemática. A comissão encarregada de organizar a celebração e presidida pelo Prof. K. Kuratowski, actual presidente da Sociedade Polaca de Matemática, resolveu efectuar a cerimónia do jubileu científico durante a reunião do 6.º Congresso dos Matemáticos Polacos que teve lugar em Varsóvia de 20 a 23 de Setembro de 1948.

A vasta e importante obra do grande matemático polaco compreende mais de 500 notas e memórias, publicadas em numerosos periódicos matemáticos polacos e estrangeiros. São notáveis sobretudo as suas contribuições na teoria dos conjuntos, topologia geral, hipótese do contínuo, etc. Um dos seus méritos é o de ter sido o fundador e director de *Fundamenta Mathematicae*, um dos mais importantes jornais matemáticos do mundo.

Além dos matemáticos polacos associaram-se à homenagem e enviaram saudações numerosos cientistas estrangeiros, academias e sociedades científicas de muitas das quais é membro.

A revista *Portugaliae Mathematica* tem a honra de contar entre os seus colaboradores o distinto matemático que publicou no vol. 5 um trabalho. M. Z.

Matemáticos portugueses no estrangeiro

No actual ano lectivo encontram-se no estrangeiro exercendo funções docentes e fazendo investigação os matemáticos portugueses: em Berkeley, U. S. A., na Universidade da Califórnia, o Doutor Hugo B. Ribeiro encarregado de cursos e participando na actividade de alguns seminários; na Argentina, o Prof. Doutor António A. Monteiro, convidado para professor da Universidade de S. Juan onde rege a cadeira de Análise; e na França, em Nancy, continuando os seus trabalhos de investigação o Doutor Alfredo Pereira Gomes, bolseiro do C. N. R. S., que faz parte dum grupo de jovens matemáticos sob a direcção dos Profs. Dieudonné e Schwartz. M. Z.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de frequência — 1949-50.**

1.º Ponto

2983 — Mostrar que a sucessão:

$$\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3+\sqrt{3}}\ ,\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\ ,\ \cdots$$

é convergente e calcular o seu limite.

2984 — Calcular a primitiva da função

$$\frac{2x-1}{\sqrt{5x^2-4x+1}}\ .$$

2985 — Dada a função $f(x)=\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+1}$ *a*) calcular $f(0)$, os pontos que anulam a função e o seu limite quando $x\to\pm\infty$; *b*) calcular os extremos e os intervalos de monotonia; *c*) calcular os pontos de inflexão; *d*) representá-la gràficamente.

2.º Ponto

2986 — Mostrar que a sucessão de termo geral

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

é convergente e calcular o seu limite.

2987 — Dada a função $f(x)=\dfrac{3x-2}{+\sqrt{-2x^2-x+1}}$, calcular: *a*) o seu domínio de existência no campo real; *b*) a sua primitiva.

2988 — Considere a função $f(x)=x+I(x)$. *a*) representá-la gràficamente; *b*) indicar, justificando, se admite no intervalo $0\leqslant x<1$ limites superior e inferior, e máximo e mínimo; *c*) calcular analìticamente as derivadas laterais no ponto $x=n$.

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º exame de frequência, 1948-1949.**

2989 — Determine o centro, os eixos e as assíntotas da hipérbole $(2x+1)^2-(4y-1)^2=1$. Indique os pontos em que a tangente é paralela à recta $y=2x$.

2990 — Mostre que a curva

$$y=mx+p+\varphi(x)\qquad [\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0]$$

admite uma e uma só assíntota não paralela a OX e prove que a convexidade, quando de sentido invariável, está voltada para essa recta.

2991 — Mostre que a sucessão de Fourier nunca ganha variações quando x cresce. Passando ao caso de $f(x)$ ser polinómio inteiro, enuncie e justifique a regra dos sinais de Descartes (raizes positivas e raizes negativas). Examine a hipótese de se anular um coeficiente com antecedente e consequente do mesmo sinal. Considerando o polinómio $f(x)$ ordenado segundo as potências de $x-a$ generalize a regra dos sinais.

2992 — Supondo $\varphi(u)$ e $\psi(u)$ diferenciáveis em u_0 e $f(x,y)$ diferenciável em $P(a=\varphi(u_0), b=\psi(u_0))$, mostre que $f[\varphi(u), \psi(u)]$ é diferenciável em u_0.

2993 — Escreva as relações que caracterizam $p(x,y)$ e $q(x,y)$ como funções diferenciáveis em $P(a,b)$ e considere a hipótese de $p(x,y)$ e $q(x,y)$ serem as derivadas parciais de $z=f(x,y)$.

F. C. L. — Complementos de Algebra — **Questões propostas em exames de frequência.**

2994 — Defina o conceito de grupo cociente. Pondo $\sigma=(1\,2\,3\,4\,5\,6)$ e representando por G, H respectivamente o grupo gerado por σ e o grupo gerado por σ^3, construa uma função pertencente a H em G, e determine o grupo cociente G/H. R: *Por exemplo,* $u_1=z_1+z_4$, *como função de* z_1, z_2, z_3, z_4, *pertence ao grupo* H *em* G, *pois que as substituições de* G *que a deixam invariante são* I *e* $\sigma^3=(14)(25)(36)$. *Pondo agora* $u_2=z_2+z_5$, $u_3=z_3+z_6$, *as substituições de* G *efectuadas sobre os* zz *traduzem-se nas substituições* I, (123), (132) *sobre os* uu. *Tem-se pois*

$$G/H = \{ I, (123), (132) \}$$

(é claro que H *é invariante em* G*).*

2995 — Sejam R, H, T respectivamente as famílias das rotações, das homotetias e das translações no espaço. Mostre que: *a)* $H\cup T=HT$; *b)* T é um subgrupo invariante de HT; *c)* HT é um subgrupo invariante de RHT; *d)* o único elemento de T permutável com todos os elementos de RT é a identidade. R: a) *Toda a homoletia* h *e toda a translação* **t** *figuram em* HT, *sob as formas* $h\cdot I$ *e* $I\cdot t$; *recìprocamente, o produto duma homotetia* h *por uma translação* t *é uma homotetia ou uma translação conforme* $h\neq I$ *ou* $h=I$; *portanto,* HT *contém* $H\cup T$ e $H\cup T$ *contém* HT *ou seja* $H\cup T=HT$; b) *Se for* τ *uma translação definida por um dado vector* **v**, *a transformada de* τ *por meio de uma qualquer homotetia* φ *é a translação definida pelo vector* $\varphi(\mathbf{v})$; *então, quaisquer que sejam* $h \in H$, $t\in T$, $t'\in T$, *tem-se* $(ht)\,t'\,(ht)^{-1}=h\,(t\,t'\,t^{-1})\,h^{-1}\in T$ (*pois que* $t\,t'\,t^{-1}\in T$); c) *A transformada duma translação* τ (*definida pelo vector* **v**), *mediante uma rotação* ρ, *é a translação definida pelo vector* $\rho(\mathbf{v})$; *então, quaisquer que sejam* $r\in R$, $h\in H$, $t\in T$, $t'\in T$, *tem-se*

$$(rht)\,t'\,(rht)^{-1}=r\,[\,h\,(t\,t'\,t^{-1})\,h^{-1}\,]\,r^{-1}\in T;$$

anàlogamente para as homotetias. d) *Seja ainda* τ *a translação definida por* **v**; *se* ρ *é uma rotação* $\neq I$, *tem-se* $\rho(\mathbf{v})\neq\mathbf{v}$ *(e portanto* $\rho\tau\rho^{-1}\neq\tau$*), a não ser que* $\tau=I$ *(ou seja* $\mathbf{v}=0$*).*

2996 — Considere a proposição: «Dada uma equação algébrica $f(z)=0$ de coeficientes racionais e uma função racional $\varphi(z)$ de coeficientes também racionais, existe necessàriamente uma outra função racional $\psi(z)$ de coeficientes racionais tal que $\alpha=\psi(\varphi(\alpha))$, sendo α uma raiz qualquer de $f(z)$». Mostre que esta proposição é falsa. Restrinja a hipótese de modo a tornar a proposição verdadeira e faça a respectiva demonstração. R: *Seja* $f(z)\equiv z^2-3$ *e* $\varphi(z)\equiv z^2$; *como* $\varphi(\sqrt{3})=3$, *é claro que não existe nenhuma função racional* ψ, *de coeficientes racionais, tal que*

$$\sqrt{3}=\psi(\varphi(\sqrt{3}))=\psi(3),$$

pois que $\psi(3)$ (*e portanto* $\sqrt{3}$) *teria então de ser racional. A restrição a impor é esta: «representando por* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ *as raizes de* $f(z)$, *os números* $\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)$ *devem ser todos distintos». Com efeito,* $\varphi(\alpha_1)$ *e* α_1, *como funções de* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, *pertencem ambas a um mesmo grupo; portanto, desde que* $\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)$, *conjugadas da função* $\varphi(\alpha_1)$, *sejam numèricamente distintas, o teorema de Lagrange assegura a existência duma função racional* ψ, de coeficientes racionais, *tal que* $\alpha_i=\psi(\varphi(\alpha_i))$, *para* $i=1, 2, \cdots, n$.

2997 — Defina os conceitos de homomorfismo e de isomorfismo entre grupos. Prove que o grupo das rotações em torno dum dado eixo não é isomorfo ao grupo das homotetias com um mesmo centro. R: *Suponhamos que existe um tal isomorfismo*, Γ, *e seja* ρ *a rotação de* 120° *em torno do eixo dado; como o período de* ρ *é* 3, *também o da homotetia* $\theta=\Gamma(\rho)$ *deverá ser* 3; *então, designando por* r *a razão de* θ, *será* r^3 *a razão de* θ^3, *e portanto* $r^3=1$; *mas daqui vem* $r=1$ *ou seja* $\theta=I$, *e assim o período de* θ *será* 1, *e não* 3, *o que é contraditório.*

2998 — Equivalência a respeito dum grupo. Diga em quais das seguintes geometrias um triângulo rectângulo e um triângulo equilátero são figuras equivalentes: *a)* geometria euclideana; *b)* geometria afim; *c)* geometria projectiva; *d)* geometria analagmática; *e)* topologia. Em quais destas geometrias uma circunferência é equivalente a uma recta? Justifique as respostas. R: *Basta observar que:* a) *Um triângulo equilátero nunca é semelhante a um triângulo rectângulo;* b) *dados dois triângulos, existe sempre uma* *afinidade que transforma um no outro;* c) *toda a afinidade é uma projectividade;* d) *as transformações circulares respeitam os ângulos;* e) *as afinidades são transformações bicontínuas. Uma recta é equivalente a uma circunferência em geometria analagmática, pois é sempre possível passar duma para outra mediante um deslocamento seguido duma inversão (transformações circulares).*

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ALGEBRA — **Exame final, 1948-1949.**

2999 — Conceito de grupo de Galois. Determine o grupo de Galois da equação $z^3-5=0$ a respeito de Ra e indique um corpo a respeito do qual o grupo da mesma equação seja A_3. R: *Representando por* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *as raizes da equação, a função*

$$V=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)$$

será igual à raiz quadrada do descriminante, ou seja $V=\sqrt{-27\cdot 5^2}=15\sqrt{-3}\notin Ra$; *por outro lado, as raizes de* $z^3-5=0$ *são irracionais; portanto, nem a função* V *das raizes (pertencente em sentido restrito a* A_3*) nem as funções* $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3$ *(pertencentes aos restantes subgrupos máximos de* S_3*) têm o valor numérico em* Ra; *logo, o grupo de Galois da equação a respeito de* Ra *é* S_3. *A respeito de* $Ra(\sqrt{3}\cdot i)$, *o grupo de Galois é* A_3 [*é fácil ver que nenhuma das raizes de* $z^3-5=0$ *pertence a* $Ra(\sqrt{3}\cdot i)$].

3000 — Demonstre que toda a equação cíclica a respeito de Δ é resolúvel por meio de radicais a respeito de Δ. Considere em particular o caso da cúbica cíclica.

3001 — Estudo da redutibilidade duma equação através do seu grupo de Galois.

3002 — Conceito de raiz duma equação de coeficientes variáveis.

3003 — Isomorfismos entre grupos abstractos. Prove que o grupo aditivo dos números pares é isomorfo ao grupo gerado por uma translação $(\neq I)$, mas não é isomorfo ao grupo aditivo dos números racionais. R: *Seja* τ *uma translação* $\neq I$; *se a cada número par* $2n$ *fizermos corresponder a translação* τ^n, *a transformação* Φ *assim definida será um isomorfismo. Tem-se, com efeito:* $\Phi(2m+2n)=\Phi(2(m+n))=\tau^{m+n}=\tau^m\cdot\tau^n=\Phi(2m)\cdot\Phi(2n)$; *além disso,* Φ *é biunívoca, tendo-se* $\Phi^{-1}(\tau^k)=2k$. *Suponhamos agora que existe um isomorfismo* Θ *do grupo aditivo dos números racionais sobre o grupo aditivo dos números pares, e ponhamos* $r=\Theta^{-1}(2)$; *virá* $2=\Theta(r)=\Theta(r/2+r/2)=\Theta(r/2)+\Theta(r/2)$, *ou seja* $2=2\Theta(r/2)$, *e portanto* $\Theta(r/2)=1$; *ora* $\Theta(r/2)$ *só pode ser um número par.*

Enunciados e soluções dos n.os 2994 a 3003 de J. Sebastião e Silva.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — GEOMETRIA DESCRITIVA — **1.º exame de frequência — 1949-50.**

3004 — Transformação de semelhança em R_3; definição e propriedades.

3005 — Determinar a intersecção dum plano α definido por duas rectas paralelas com um plano β definido por duas concorrentes. (Sem escolher posições especiais que facilitem a resolução).

3006 — Dado um paralelogramo $[ABCD]$ com nenhum dos lados de nível nem de frente, determinar o simétrico de $[ABCD]$ a respeito da recta AB.

3007 — Considere um tronco de pirâmide quadrangular de bases paralelas, do qual se conheçam apenas as projecções horizontais das bases. Supondo dadas as projecções horizontais de três pontos, dois deles situados sobre lados não paralelos das bases e o terceiro sobre uma aresta lateral, determine a projecção horizontal da secção feita no tronco de pirâmide pelo plano definido pelos três pontos (aplicando o conceito de homologia). R: *Sejam* M, N, P *os pontos considerados,* V *o vértice da pirâmide e* $[ABCD]$ *uma das bases do tronco. Da base* $[ABCD]$ *passa-se para a referida secção mediante uma homologia* Θ, *cuja projecção horizontal é uma homologia plana,* Θ', *de centro* V'. *Sobre a linha poligonal* $[A'B'C'D']$ *e sobre os raios* $V'M', V'N', V'P'$, *encontram-se os pontos* $\overline{M'}, \overline{N'}, \overline{P'}$, *que são transformados por* Θ' *respectivamente em* M', N', P'. *Assim, a homologia* Θ' *ficará definida pelos dois ternos homólogos* $(\overline{M'}, \overline{N'}, \overline{P'}), (M', N', P')$, *o que permite achar os transformados de* A', B', C', D' *por meio de* Θ' *e portanto a projecção horizontal da secção.*

3008 — Mostre que o produto de duas homologias planas afins com uma mesma direcção d é ainda uma homologia afim de direcção d. R: *Sejam* Φ_1, Φ_2 *duas homologias planas afins de direcção* d *(num mesmo plano). Sendo* Φ_1, Φ_2 *colineações, o produto* $\Phi_1\Phi_2$ *será também uma colineação. Por outro lado, como as rectas* *de direcção* d *são invariantes em* Φ_1 *e em* Φ_2, *também serão invariantes no produto* $\Phi_1 \Phi_2$. *A transformação* $\Phi_1 \Phi_2$ *é pois uma colineação em que as rectas que unem pontos homólogos passam todas pelo ponto* ∞_d, *o que quer dizer que* $\Phi_1 \Phi_2$ *é uma homologia de centro* ∞_d, *q. e. d.*

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de frequência — 1949-50.**

3009 — Defina colineação e homologia entre dois planos. Mostre que uma homologia plana de eixo impróprio é uma homotetia ou uma translação.

3010 — Determine a intersecção duma recta r oblíqua, com um plano α não projectante, definido por uma recta $t//LT$ e por um ponto $P^\cdot/r$.

3011 — Dados A, B, com cotas e afastamentos distintos, situados fora de ν_0 e de φ_0, determine a distância de A ao plano definido por LT e por B.

3012 — Dado um triângulo $[ABC]$, com nenhum dos lados de nível nem de frente, determine os eixos da projecção vertical da circunferência $[c]$ circunscrita a $[ABC]$. Como se chama a colineação Φ que faz passar de $[c'']$ para $[c']$? Em que são transformados por Φ os eixos de $[c'']$?

3013 — Mostre que dois trapézios situados num mesmo plano α são sempre projectivos entre si. R: *Sejam* $[ABCD]$, $[A^* B^* C^* D^*]$ *os dois trapézios, com* $AB//CD$, $A^* B^*//C^* D^*$. *Existirá pelo menos uma transformação de semelhança* Φ *(de* α *sobre* α*) que transforma o segmento* $\overline{CD}$ *no segmento* $\overline{C^* D^*}$. *Designando por* A_1, B_1, C_1, D_1 *os transformados de* A, B, C, D *por meio de* Φ, *e supondo* $A_1 \neq A$, $B_1 \neq B$ *(o que é sempre lícito), é fácil ver que a homologia* Θ *de eixo* $C^* D^*$ *e de centro* $A_1 A^* \cdot B_1 B^*$, *que transforma* A_1 *em* A^*, *faz passar de* $[A_1 B_1 C_1 D_1]$ *para* $[A^* B^* C^* D^*]$. *Portanto* $\Theta\Phi$ *será uma transformação projectiva que transforma* $[ABCD]$ em $[A^* B^* C^* D^*]$, *o que prova a afirmação.*

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 1948-49.**

3014 — Descreva as diferentes espécies de helicóides regrados que conhece. Em que caso é que as geratrizes dum helicóide são todas cónicas? Que particularidade apresenta a linha de estricção nestas superfícies, sendo o eixo vertical? Justifique a resposta.

3015 — Dado um hiperbolóide duma folha definido por três directrizes, $d_1 \perp \nu_0, d_2 // LT, d_3 \perp \varphi_0$, pede-se a determinação duma geratriz genérica da superfície e do plano central desta geratriz. Como determinaria o ponto central?

3016 — Sejam n_1, n_2 duas rectas de nível não complanares e designe $[\sigma]$ a superfície regrada gerada por uma recta que se apoia sobre n_1, n_2 e forma com ν_0 um ângulo dado. Determine uma geratriz genérica de $[\sigma]$ e o respectivo plano assintótico. É $[\sigma]$ uma parabolóide? Justifique a resposta. R: *Seja* P *um ponto qualquer de* n_1; *o lugar geométrico das rectas que passam por* P *e formam com* ν_0 *o ângulo dado é um cone de revolução* $[\gamma]$, *que se pode assumir como cone director de* $[\sigma]$. *As eventuais geratrizes de* $[\sigma]$ *que passam por* P, *obtêm-se achando a intersecção de* n_2 *com* $[\gamma]$ *e unindo com* P *os pontos de intersecção* (2, 1 *ou* 0 *soluções*). *Supondo que* g *é uma geratriz assim obtida, o plano assintótico de* g *será o plano tangente a* $[\gamma]$ *ao longo de* g. *A superfície* $[\sigma]$ *não será um parabolóide, porque:* a) *no caso de o ângulo dado ser maior que* 0, *as geratrizes que se apoiam sobre* n_1, n_2 *não são todas paralelas a um mesmo plano;* b) *sendo o ângulo dado igual a zero,* $[\tau]$ *degenera em dois planos paralelos.*

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 1948-49.**

3017 — Enuncie e demonstre o teorema de Chasles relativo a superfícies regradas.

3018 — Sejam a, b rectas de perfil não complanas e designe $[\pi]$ a superfície regrada que admite a, b como directrizes e φ_0 como plano director. Dado um plano α oblíquo, determinar as direcções assintóticas da secção feita por α em $[\pi]$. R: *Mediante uma mudança de plano horizontal, é possível tornar as rectas* a, b *de nível; então o parabolóide passará a ter um plano director de nível e outro de frente, e por conseguinte uma geratriz* t *de topo e uma outra* v, *vertical: as projecções verticais de todas as geratrizes da frente passam então por* (t'') *e as projecções horizontais das geratrizes de nível, por* (v'''). *Se for* f *a geratriz de frente tal que* $f''//v_\alpha$ *e* n *a geratriz de nível tal que* $n'''//h_\alpha$, *é claro* $n//\alpha, f//\alpha$ *e portanto tais geratrizes fornecem as direcções assintóticas pedidas.*

3019 — Defina conóide e mostre como se aplica a teoria da concordância à determinação de planos tangentes a uma tal superfície.

Enunciados e soluções dos n.os 3004 a 3019 de J. Sebastião e Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência — 1949-50.

1.º Ponto

3020 — Primitivar as funções:

$$\frac{x^2+1}{x(3x^2-x-2)} \qquad \frac{1}{3+\cos x} \qquad \frac{x \log x}{(x-4)^5}.$$

2.º Ponto

3021 — Primitivar as funções:

$$\frac{x}{(x^2-2x+2)(x-1)} \qquad \sqrt{x^4+3x^7} \qquad \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}.$$

F. C. P. — Cálculo — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 3 de Fevereiro de 1950.

1.º Ponto

3022 — Calcular o verdadeiro valor de

$$y=(\sec x)^{\operatorname{cotg}^2 x} \quad \text{para } x=O.$$

3023 — Determinar os máximos e mínimos de

$$y^3+y^2+y-8x^3+12x^2-4=0.$$

3024 — Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \cdot \operatorname{sen} 2x}$.

3025 — Calcular $\displaystyle\int_0^{5/2} \frac{50}{(4x^2+25)^2}\,dx$.

3026 — Dada a equação $q^2 r-2pqs+p^2 t=0$ fazer a mudança de variáveis: $x=v$, $y=w$, $z=u$, sendo w a nova variável dependente.

2.º Ponto

3027 — Determinar os máximos e mínimos de $y=\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\cos 2x$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

3028 — Sendo $x^3+xy^3+x^2-y^2=0$, calcular y'' no ponto $(0,0)$.

3029 — Calcular $\int \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} 2x\, dx$.

3030 — Calcular $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

3031 — Dada a equação $r-t=0$ mudar as variáveis independentes sendo $x=\rho \operatorname{ch}\theta$, $y=\rho \operatorname{sh}\theta$.

Nota — O aluno deve resolver um problema do cálculo diferencial e outro de cálculo integral.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º Exame de frequência extraordinário — Fevereiro de 1949.

3032 — Demonstrar a igualdade:

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx=(b-a)^{m+n+1}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

R: *Faça-se* $x-a=y$ *e integre-se por partes. Vem*

$$\int_0^{b-a} y^m (b-a-y)^n\,dy=\left|\frac{y^{m+1}}{m+1}(b-a-y)^n\right|_0^{b-a}+$$

$$+\frac{n}{m+1}\int_0^{b-a} y^{m+1}(b-a-y)^{n-1}\,dy,$$

ou

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}.$$

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}\times\frac{n-1}{m+2}\times\frac{n-2}{m+3}\times\cdots I_{m+n,0}=$$

$$=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}=\frac{n!\,m!}{(m+n+1)!}.$$

3033 — Estudar o integral

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

e calculá-lo na hipótese de ser convergente.

R: *Se* $b>-a$ $\displaystyle\lim_{x\to b+0}(x-b)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}=\frac{1}{a+b}>0$ *e o integral é convergente.*

Fazendo $x-b=t^2$

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}=2\int_0^\infty \frac{dt}{a+b+t^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[\mathit{arc\ tg}\frac{t}{\sqrt{a+b}}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{a+b}}.$$

3034 — Demonstrar que os planos $x+y+z=2$, $x+2y+3z=4$, e $2x+3y+4z=7$ formam uma superfície prismática. Determinar as direcções das arestas e os ângulos formados pelos planos dois a dois.

R: a) *A característica da matriz dos coeficientes é dois. O sistema é indeterminado de grau* 1 *e incompatível visto os característicos serem diferentes de zero. Os três planos formam pois uma superfície prismática.*

b) *As arestas são as rectas de equações:*

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+4z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+4z=7. \end{cases}$$

A sua direcção comum pode ser definida por:

$$(I + J + K) \wedge (I + 2J + 3K) = I + 2J + K ;$$
$$(I + J + K) \wedge (2I + 3J + 4K) = I + 2J + K ;$$

ou

$$(I + 2J + 3K) \wedge (2I + 3J + 4K) = I + 2J + K .$$

c) *Angulos dos planos, dados pelos cosenos:*

$$\cos \Phi_1 = \frac{1+2+3}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{7} ; \qquad \cos \Phi_2 = \frac{3\sqrt{87}}{29} ;$$

e

$$\cos \Phi_3 = \frac{10\sqrt{406}}{203} .$$

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 2.º exame de frequência 1949, Junho 17.

3035 — Calcular o integral

$$I = \iint \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

estendido ao círculo de centro na origem e raio 1. R: *Fazendo* $x = \rho \cos \alpha$ *e* $y = \rho \operatorname{sen} \alpha$ *vem*

$$I = \iint_D \rho \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, d\alpha\, d\rho = 2\int_0^{\pi} d\alpha \int_0^1 \rho \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, d\rho =$$
$$= \frac{\pi^2 - 2\pi}{2} \text{ visto que } \int_0^1 \rho \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, d\rho =$$
$$= \left[\frac{1+\rho^2}{2} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \right]_0^1 = \frac{\pi - 2}{4} ,$$

valor que pode obter-se fazendo, por exemplo,

$$\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} = t^2 .$$

3036 — Achar as curvas tais que o comprimento do arco contado a partir da origem é função da ordenada. Analise os casos 1) $s = y^2/2$, e 2) $s = \operatorname{senh} y$.

R: $s = f(y)$. *Logo* $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = f'(y)\, dy$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{[f'(y)]^2 - 1}} \text{ e } dx = \pm\sqrt{[f'(y)]^2 - 1}\, dy ,$$
$$x + c = \pm \int \sqrt{[f'(y)]^2 - 1}\, dy \text{ donde } x + c = \pm \varphi(y) .$$

1) *Se* $s = f(y) = y^2/2$, $x + c = \pm \int \sqrt{y^2 - 1}\, dy =$

$$= \pm \frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-1} - \operatorname{arcsenh} y\right)$$

2) *Se* $s = f(y) = \operatorname{senh} y$, $x + c = \pm \int \sqrt{\cosh^2 y - 1}\, dy =$

$$= \pm \cosh y \text{ ou } y = \operatorname{arccosh}(x + c) .$$

3037 — Determinar sôbre o plano $x+y+z=1$ um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias deste ponto aos pontos $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$ seja mínima. R: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + (x-1)^2 + (z-1)^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial(f, f_1)}{\partial(x,y)} = 0 \\ \dfrac{\partial(f, f_1)}{\partial(x,z)} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{array} \right. \quad \text{ou } P(1/3, 1/3, 1/3)$$

Soluções dos n.os 3032 a 3037 de M. A. Soares Madureira

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame extraordinário de 1949-50.

3038 — Dadas as matrizes A e B verificar que as matrizes AB e BA têm valores próprios comuns.

3039 — *a*) Números derivados. *b*) Maior e menor função. *c*) Integrais de Denjoy e Perron. *d*) Sob o ponto de vista da primitivação em que termos o integral de Denjoy generaliza o integral de Lebesgue.

3040 — Dada a função

$$f(x, y, z) = \left(\log \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+z^2}$$

a) verificar que é homogénea e aplicar o teorema de Euler. *b*) Verificar que as suas derivadas parciais são homogéneas.

I. S. T. — Cálculo — 1. Exame ordinário de 1949-50.

3041 — Com que amplitude os integrais de Riemann, Lebesgue, Denjoy e Perron resolvem o problema da primitivação?

3042 — *a*) Independência linear. *b*) Independência funcional. *c*) Teorema de Peano.

3043 — Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Verificar que elas têm um valor próprio comum *b*) Calcular a de modo a que tenham mais valores próprios comuns.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. C. — Mecânica Racional — 1.º Exame de frequência — 1949-50 — Ponto n.º 6.

3044 — Determinar em coordenadas polares a trajectória dum ponto P que se move sobre um plano. A grandeza da velocidade radial é constante e igual a 2 e a grandeza da velocidade transversa é também constante mas igual a $1/2$. Uma das posições ocupadas pelo ponto tem as coordenadas $\theta = \pi/2$, $r = 2$.

3045 — Considere o ponto $P_0(+\sqrt{2}, 0)$ situado sobre a curva $y+2=x^2$. Este ponto P_0 é a posição inicial dum ponto móvel P que descreve a curva atrás citada com uma aceleração de que apenas conhecemos a direcção e o sentido; a direcção é a definida pelo eixo dos XX e o sentido é o da parte positiva para a parte negativa do mesmo eixo. Calcular a grandeza do vector aceleração em função do tempo. O sentido do movimento é o sentido retrógrado. Condições iniciais: para $t=0$ é $v=1$.

3046 — Num movimento central existe a relação $v=a/r$ entre a grandeza da velocidade e a grandeza do raio polar r. Determinar a equação polar da trajectória e a expressão de r em função do tempo.

F. C. C. — Mecânica Racional — 1.º Exame de frequência — 1949-50 — Ponto n.º 8.

3047 — Um ponto P move-se sobre um plano de tal maneira que as grandezas das velocidades radial e transversa são constantes e iguais a 1. Determinar em coordenadas polares a trajectória do ponto móvel. O ponto ocupa no seu movimento a posição $\theta=\pi/6$, $r=3$.

3048 — Um ponto móvel descreve a curva $y^2+2=x$ com uma aceleração constante em direcção e sentido; a direcção é a definida pelo eixo dos XX e o sentido é o da parte positiva para a negativa do mesmo eixo. Calcular a grandeza da aceleração em função do tempo. O sentido do movimento é o sentido directo. Condições iniciais: para $t=0$ é $v=2$, $x=4$ e $y=+\sqrt{2}$.

3049 — Num movimento central existe a relação $v=2/r$ entre a grandeza da velocidade e a grandeza do raio polar r. Determinar a equação polar da trajectória e a expressão de r em função do tempo.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência extraordinario — 1950.

3050 — Averiguar se, em relação ao sistema diferencial:

$$\frac{dx_1}{dt}+x_1=0\,;\quad \frac{dx_2}{dt}+x_2=0\,,\cdots,\quad \frac{dx_n}{dt}+x_n=0\,,$$

a função $F=\int_V (x_1 x_2\cdots x_n)\,dV$ é um invariante integral.

3051 — Conceitos de geodésica no cálculo variacional e no cálculo absoluto: sua identificação.

3052 — Conceito de função harmónica. Propriedades.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência ordinário — 1950.

3053 — Um ponto P move-se no plano Oxy com movimento uniformemente acelerado sobre uma paralela ao eixo Ox. O triedro de referência $Oxyz$ está animado duma rotação uniforme em torno de Oz. Determinar a aceleração de transporte do ponto e a sua trajectória.

3054 — Estacionaridade dos integrais duplos. Relações entre o problema da estacionaridade do integral $\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy$ e do problema de Dirichelet.

3055 — Conceito de medidas em geometria das massas. Medidas negativas e medidas vectoriais.

PROBLEMAS

SOLUÇÃO RECEBIDA

2542 (*Gaz. Mat.* n.º 34) — Mostre que

$$\sum_{p=0}^{m-1}\frac{p!}{(n+p)!}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{m!}{(m+n-1)!}\right)$$

R: *Raciocinemos por recorrência. Para* $m=1$, *tem-se*

$$\sum_{p=0}^{0}\frac{p!}{(n+p)}=\frac{0!}{(n+0)!}=\frac{1}{n!}=\frac{(n-1)!}{n!\,(n-1)!}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{(n-1)\,(n-1)!}{n!\,(n-1)!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{n\,(n-1)!-(n-1)!\,1!}{n!\,(n-1)!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{n!-(n-1)!\,1!}{(n-1)!\,n!}\right]=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1!}{n!}\right],$$

quer dizer, a igualdade é válida.

Suponhamos então que ela é ainda válida para $m=k$, *isto é*:

$$\text{(I)}\qquad \sum_{p=0}^{k-1}\frac{p!}{(n+p)!}=\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{k!}{(k+n-1)!}\right]$$