3045 — Considere o ponto $P_0(+\sqrt{2}, 0)$ situado sobre a curva $y+2=x^2$. Este ponto P_0 é a posição inicial dum ponto móvel P que descreve a curva atrás citada com uma aceleração de que apenas conhecemos a direcção e o sentido; a direcção é a definida pelo eixo dos XX e o sentido é o da parte positiva para a parte negativa do mesmo eixo. Calcular a grandeza do vector aceleração em função do tempo. O sentido do movimento é o sentido retrógrado. Condições iniciais: para $t=0$ é $v=1$.

3046 — Num movimento central existe a relação $v=a/r$ entre a grandeza da velocidade e a grandeza do raio polar r. Determinar a equação polar da trajectória e a expressão de r em função do tempo.

F. C. C. — Mecânica Racional — 1.º Exame de frequência — 1949-50 — Ponto n.º 8.

3047 — Um ponto P move-se sobre um plano de tal maneira que as grandezas das velocidades radial e transversa são constantes e iguais a 1. Determinar em coordenadas polares a trajectória do ponto móvel. O ponto ocupa no seu movimento a posição $\theta=\pi/6$, $r=3$.

3048 — Um ponto móvel descreve a curva $y^2+2=x$ com uma aceleração constante em direcção e sentido; a direcção é a definida pelo eixo dos XX e o sentido é o da parte positiva para a negativa do mesmo eixo. Calcular a grandeza da aceleração em função do tempo. O sentido do movimento é o sentido directo. Condições iniciais: para $t=0$ é $v=2$, $x=4$ e $y=+\sqrt{2}$.

3049 — Num movimento central existe a relação $v=2/r$ entre a grandeza da velocidade e a grandeza do raio polar r. Determinar a equação polar da trajectória e a expressão de r em função do tempo.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência extraordinario — 1950.

3050 — Averiguar se, em relação ao sistema diferencial:

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0\,; \quad \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0, \cdots, \quad \frac{dx_n}{dt} + x_n = 0,$$

a função $F = \int_V (x_1 x_2 \cdots x_n)\, dV$ é um invariante integral.

3051 — Conceitos de geodésica no cálculo variacional e no cálculo absoluto: sua identificação.

3052 — Conceito de função harmónica. Propriedades.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência ordinário — 1950.

3053 — Um ponto P move-se no plano Oxy com movimento uniformemente acelerado sobre uma paralela ao eixo Ox. O triedro de referência $Oxyz$ está animado duma rotação uniforme em torno de Oz. Determinar a aceleração de transporte do ponto e a sua trajectória.

3054 — Estacionaridade dos integrais duplos. Relações entre o problema da estacionaridade do integral $\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy$ e do problema de Dirichelet.

3055 — Conceito de medidas em geometria das massas. Medidas negativas e medidas vectoriais.

PROBLEMAS

SOLUÇÃO RECEBIDA

2542 (*Gaz. Mat.* n.º 34) — Mostre que

$$\sum_{p=0}^{m-1} \frac{p!}{(n+p)!} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{m!}{(m+n-1)!}\right)$$

R: *Raciocinemos por recorrência. Para* $m=1$, *tem-se*

$$\sum_{p=0}^{0} \frac{p!}{(n+p)} = \frac{0!}{(n+0)!} = \frac{1}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{(n-1)\,(n-1)!}{n!\,(n-1)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{n\,(n-1)! - (n-1)!\,1!}{n!\,(n-1)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{n! - (n-1)!\,1!}{(n-1)!\,n!}\right] = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1!}{n!}\right],$$

quer dizer, a igualdade é válida.

Suponhamos então que ela é ainda válida para $m=k$, *isto é*:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{p=0}^{k-1} \frac{p!}{(n+p)!} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{k!}{(k+n-1)!}\right]$$

e vamos provar que esta hipótese implica que o seja também para $m=k+1$. *Com efeito,*

$$\sum_{p=0}^{k}\frac{p!}{(n+p)!}=\sum_{p=0}^{k-1}\frac{p!}{(n+p)!}+\frac{k!}{(k+n)!}$$

e, em virtude de (I), *vem*

$$\sum_{p=0}^{k}\frac{p!}{(n+p)!}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{k!}{(k+n-1)!}\right]+$$

$$+\frac{k!}{(k+n)!}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{k!}{(k+n-1)!}+\frac{k!\,(n-1)}{(k+n)!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{(k+n)!-k!(k+n)(n-1)!+k!\,(n-1)\,(n-1)!}{(n-1)!\,(k+n)!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{(k+n)!-(n-1)!\,[k!\,(k+n)-k!\,(n-1)]}{(n-1)!\,(k+n)!}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{(k+n)!-(n-1)!\,(k+1)!}{(n-1)!\,(k+n)!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{(k+1)!}{(k+n)!}\right]$$

ficando, portanto, demonstrada a identidade.

Solução de Fernando de Jesus, aluno do I. S. C. E. F.

As resoluções de problemas propostos devem ser enviados para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

RECTIFICAÇÃO

Com data de 20 de Abril de 1949 recebemos do nosso prezado colaborador do Recife, Prof. Dr. Luiz Freire, o pedido da publicação no n.º 39 da nossa revista da rectificação que se segue relativa a um artigo da sua autoria incluído nos n.ºs 37-38 de *Gazeta de Matemática*. Lastimamos só a podermos agora publicar.

«A págs. 12 do artigo *Os potenciais escalar e vectorial e os espaços a conexão simples e múltipla* por um lamentável equívoco de cópia do original, saíu como teorema recíproco, em seu enunciado e demonstração, o próprio teorema directo.

O teorema recíproco é: Se em $\oint u\times d\lambda$, $u=\nabla\varphi$, o integral é nulo.

A demonstração é a que segue:

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u\times d\lambda=\int_{P_1(\lambda)}^{P_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)=$$

$$=\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} d\varphi=\varphi_2-\varphi_1.$$

Portanto

$$\oint u\times d\lambda=\int\nabla\varphi\times d\lambda=\varphi_2-\varphi_1=0,\ \text{pois}\ \varphi_2=\varphi_1».$$

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUÊSA