ANO X – N.os 41-42 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO – 1949

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Una métrica universal para las ciencias experimentales

por *J. Gallego Diaz*

1. Introduccion. — Por una explicable fuerza de inercia se utiliza, desde hace siglos, la métrica euclidea en las ciencias experimentales. La rutina, enemiga acérrima del progreso cientifico actúa sobre nosotros con fuerzas insospechadas y operando en las zonas abismales del subconsciente se atrinchera, blindada de tradicion, en cómodas zanjas de indiferencia peyorativa. Pretendemos con éste nuestro trabajo, introducir una nueva métrica en las ciencias de la naturaleza es decir en todos aquellas que se basan en la observación y experimentacion y que dependen, por tanto, de medidas, estando asi sometidas al control numérico siempre, lo cual permite sechazar o admitir una hipótesis contrastándola con la realidad. La Termodinámica, la Economia, la Biologia, la Psicofisica, la Cibernética e otras muchas ciencias entran de lleno en nuestro domínio.

Queremos advertir que nuestro objeto no es dar una respuesta causal o intrinseca de la gran masa de fenómenos cuya sede es el espacio-tiempo. Ni el de interferir, por ende, con la teoria de la relatividad. Nuestra métrica aspira a *describrir* tan sólo los múltiples fenomenos de la realidad en cuanto son susceptibles de representacion en el plano o en el espacio euclideo ordinario de tres o de n dimensiones. Pero, precisamente, su interés y su originalidad — si es que la tienen — radica en ello. Nuestra posicion es de tendencia extremista en un sólo sentido: negamos la validez o vigencia de la métrica euclidea para la explicacion de los fenomenos experimentales y ello en atencion a que, como veremos em seguida, sus intrinsecas caracteristicas son totalmente inadecuadas al fin perseguido. He aqui los dos principales motivos *a*) el método de comparacion obligadamente seguido en ello es impróprio para lo que se intenta medir: la superposicion parece que debe convenir únicamente objetos espaciales: la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ está expresada en geometria euclidea, como se sabe, por la fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ó lo que es equivalente: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ — La propriedad que *caracteriza* a esta distancia es que resulta invariable respecto a cualquier rotacion de ejes coordenados. Y en general que permanece invariable respecto al grupo de los movimientos. Pero: ¿ que significado puede tener dicha rotacion de ejes en la representacion de los fenómenos naturales? Piénsese, por ejemplo, para no citar más que dos casos, en los transformaciones adiabáticos de la termodinámica o en los fenómenos de crecimiento en biologia. En cambio, parece evidente que la métrica *natural* de los fenómenos naturales debe darnos *distancias* que resulten invariantes cuando efectuemos un cambio de escalas; esto es, un cambio de unidades de medida. Por ejemplo: si estudiamos el crecimiento en peso de un organismo en funcion del tiempo, la *distancia* entre dos puntos cualesquiera de la curva de crecimiento no deberá variar cuando expresemos el peso en kilogramas en lugar de en gramos y el tiempo en minutos en lugar de en segundos. Esto nos lleva a admitir el postulado de que que la distancia entre dos puntos representativos de un fenómeno natural debe ser invariable respecto al grupo de transformaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 \\ y = \beta y_1 \end{cases}$$ en donde α y β son parámetros que expresan el cambio de unidades de medida.

Naturalmente la generalización al caso de una magnitud funcion de n variables independientes es obvia.

b) La eleccion de una determinada unidad de medida parece tan inconveniente como innecesaria. Ningun objeto natural posee propriedades de *arquetipo*. Es decir, que carece de propriedades fisicas que puedan caracterizar e asi creemos sinceramente que no existe magnitud alguna que goce del privilegio de ser ella — y no otra — *metro.*

Intentamos, pues, realizar un nuevo análisis del concepto de medida ya que como justamente dice Bauer[1] «c'est evidemment sur la mesure que sont fondées toutes nos sciences exactes de la nature, depuis la géométrie jusqu'à la biologie».

2. Determinacion axiomática de la métrica. Para construir la métrica partiremos de tres axiomas: el primero ha sido justificado en el apartado anterior. Si nos limitamos por comodidad al espacio de dos dimensiones podemos formular lo asi:

Axioma I — *La distancia entre dos puntos* $A\,(x_1\,,y_1)$ $B\,(x_2\,,y_2)$, $[z=d\,(A\,,B)=F\,(x_1\,,x_2\,,y_1\,,y_2)]$ *ha de ser una funcion homogenea, de grado cero en* x, y. Es decir que:

$$d\,(A\,,B) = F\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}\right). \tag{1}$$

El segundo y el tercero, de acuerdo con la teoria de los espacios abstractos semimétricos, son los siguientes:

(2) Axioma II: $d\,(A\,,B) = d\,(B\,,A)$

(3) y Axioma III: $d\,(A\,,A) = 0$

3. Resolucion de las ecuaciones funcionales que permiten determinar la forma cuadrática fundamental.

Si hacemos: $\dfrac{x_1}{x_2} = m$; $\dfrac{y_1}{y_2} = n$, en virtud de (1) y (2) se verifica:

$$F\,(m\,,n) = F\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

A pesar de que la literatura relativa a ecuaciones funcionales de varias variables independientes no es muy rica, hemos resuelto la ecuacion funcional (4) de la seguiente sencilla manera:

Efectuando el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = Lm \\ v = Ln \end{cases}$$

o lo que es lo mismo: $\begin{cases} m = e^u \\ n = e^v \end{cases}$

La ecuacion (4) se convierte en:

$$F\,(e^u\,,e^v) = F\,(e^{-u}\,,e^{-v})$$

Es decir: $F\,(u\,,v) = F\,(-u\,,-v)\,.$

Esta ecuacion la satisfacen todas las superficies $z=F(u\,,v)$ que sean simetricas respecto al aje z. Pero como la distancia debe ser tal que la forma diferencial: $d\,s^2 = g_{11}\,d\,x^2 + g_{22}\,d\,y^2 + 2\,g_{12}\,d\,x\,d\,y$ sea cuadrática, elegimos, de los dos posibles, la mas sencilla, esto es:

$$z^2 = u\,v\,.$$

Asi pues la distancia buscada será

$$z = d\,(A\,,B) = \sqrt{L\,\frac{X_1}{X_2}\cdot L\,\frac{Y_1}{Y_2}} \tag{5}$$

Esta distancia como es fácil comprobar satisface a nuestros tres axiomas.

Es inmediato obtener

$$ds^2 = \frac{dx}{x}\cdot\frac{dy}{y}$$

Es decir:

$$d\,s = \frac{\sqrt{dx\,dy}}{\sqrt{xy}} \tag{6}$$

4. Geodésicas. Para encontrar las geodésicas del espacio de Riemann definido por (6) hemos de hallar las curvas que hagan estacionaria la

$$\int ds \quad \text{es decir} \quad \int \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{xy}}\,dx$$

La ecuacion de Euler, del Cálculo de Variaciones es como se sabe:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y'}\,y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\,y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

que aplicada a nuestro caso nos dá:

$$y'' - \frac{y'^2}{y} + \frac{y'}{x} = 0$$

ó

$$xyy'' - xy'^2 + yy' = 0 \tag{7}$$

cuja integracion es imediata y nos dá:

$$y = Ax^m \tag{8}$$

Las diversas significaciones de la formula (8) son conocidas en las ciencias experimentales. Asi, por exemplo: en biologia matemática representa la ley del crecimiento relativo o allométrico[1]; en termodinámica la ley de los transformaciones adiabáticas[2]; en economia la curva de la demanda de Marshall[3], etc.

[1] E. Bauer: La mesure des grandeurs: Dimensions et unités. *Actualités scientifiques Hermann* (n.º 796).

[1] Huxley: *Problems of relative growth.* Londres, pg. 4.

[2] Bruhat: *Thermodynamique.* Paris, 1947, pg. 90.

[3] Gallego-Diaz: Un principe de la moindre action en Economie Politique. *Rev. Scientifique.* Paris, 1947, pgs. 597 a 600.

5. El principio de minimo en las ciencias experimentales. Análogamente al principio de HAMILTON en mecanica, debe admitirse que gran número de fenómenos en las ciencias experimentales deben obedecer a una ley de variacion estacionaria del tipo:

$$\int \Phi \, ds = \text{máximo o minimo}$$

Si suponermos, por análogas razones a las expuestas en la introduccion, que la funcion Φ es homogénea, debemos hallar los extremos de la integral:

$$\int x^m y^n \sqrt{dx\, dy}$$

Para aplicar la correspondiente ecuacion de EULER efectuemos el cambio de variables

$$\begin{cases} v = 2y \\ u = 2x \end{cases}$$

con lo cual la expresion a extremos se convierte en:

$$\int e^{\alpha_1 u + \beta_1 v} \sqrt{\frac{dv}{du}}\, du$$

y la ecuacion de EULER:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v' \partial v'} v'' + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial v'} v' + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial v'} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

se transforma em

$$v'' + 2\beta_1 (v')^2 - 2\alpha_1 v' = 0$$

que, puesta en la forma:

$$v''/v' + 2\beta_1 v' - 2\alpha_1 = 0$$

dá por integracion immediata:

$$v' = k_1 x^{2\alpha_1} / y^{2\beta_1}$$

y teniendo en cuenta el cambio de variables antes realizado, resulta, finalmente:

$$y^{2\beta_1} = C_1 x^{2\alpha_1} + C_2 \tag{9}$$

que comprenden, como caso particular ($C_2=0$) a las geodesicas antes determinadas.

Es interesante observar que recordando la definicion de la elasticidad de una funcion $y=f(x)$ (vease, por ejemplo: GALLEGO DIAZ: Sobre la permutacion de los operadores d/dx y Ex. *Gazeta de Matemática*, n.º 26) las curvas definidas por (9) pueden asi mismo caracterizarse por:

$$E_2(y) = aE_1(y) + b\,. \tag{10}$$

(a e b constantes: $E_2(y)$ es la elasticidad segunda de la funcion y $E_1(y)$ la elasticidad primera).

Y en el caso particular $a=0$ se obtiene la *curva normal de error*.

6. Braquistocronas. Si se supone ahora que estudiamos la variacion de un fenómeno en funcion del tiempo fisico x y admitimos una ley del tipo $y=f(x)$ y reconocemos la existencia de un segundo «tiempo» (*tiempo biológico* de CENEL o *tiempo fisiológico* de LECONTE DE NOUY, por ejemplo) que representamos por τ podemos escribir

$$\frac{ds}{d\tau} = v(x, y) \tag{11}$$

siendo v la velocidad de crecimiento en funcion del tiempo fisico.

Para hallar la braquistocrona hemos de extremar la integral

$$\tau = \int \frac{ds}{v(x, y)}$$

Pueden hacerse varias hipótesis sobre la naturaleza de la funcion $v(x, y)$.

Si suponermos que es homogénea, de grado cero, por ejemplo:

$$v = k \sqrt{\frac{a-y}{x}}$$

se obtiene:

$$\tau = \int \frac{\sqrt{x}\, dy}{k \sqrt{y(a-y)}}$$

y resuelta la correspondiente ecuacion de EULER, resulta

$$y = \frac{a}{1 + b \,.\, c^x} \tag{12}$$

que es la ecuacion de la conocida curva *logistica*, encontrada empiricamente por milhares de observadores y que nosotros hemos obtenido como *braquistócrona* de nuestro espacio, resultando asi una sorprendente analogia entre biologia y óptica, que seria interesante profundizar más.

7. Aplicaciones a la biologia y a la psicofisica. Nueva curva de crecimiento. Finalmente, si además de exigir que la *distancia* sea independiente de las unidades de medida, admitimos que la velocidad de crecimiento v es funcion de la elasticidad E y por tanto, independiente del cambio de unidades y adoptamos la forma mas sencilla $v=E$, resulta, despues de integrada la correspondiente ecuacion de EULER:

$$y = \frac{ax^k}{1 + bx^k} \tag{13}$$

cujo gráfico es en determinados casos muy parecido al de la curva logistica.

La ecuacion (13) que proponemos como curva de crecimiento no figura en la lista exhaustiva de curvas de crecimiento dada por L. G. M. BAAS BECKING («On the analysis of sigmoid curves», *Acta Biotheoretica,* vol. VIII. Parts I/II).

Podemos generalizar ahora las conocidas curvas del crecimiento heterogenico o allométrico de Huxley y Teissier.

Pues si suponemos que ademas de (13) tenemos otra ecuacion del mesmo tipo

$$z = \frac{a_1 x^{k_1}}{1 + b_1 x^{k_1}} \tag{14}$$

— en donde x representa el tiempo fisico — y eliminamos entre (13) y (14) el tiempo x, nos resulta

$$y = \frac{az^m}{(a_1 - b_1 z)^m + bz^m} \tag{15}$$

que llamamos *curva generalizada* del *crecimiento allométrico* ó heterogónico y que permite explicar los diversos fenómenos del crecimiento enantrométrico hasta ahora inexplicables.

Para subrayar su interés, recuerdense las palabras del sabio biólogo francés G. Teissier:

«Il n'existe donc pas de loi d'allométrie généralisée, la seule généralisation actuellement possible consistant à representer les croissances complexes par plusieurs arcs de courbes puissances que separent des points anguleux plus ou moins nettement marqués» (1).

Para terminar, observemos que si calculamos la distancia geodésica entre dos puntos $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ teniendo en cuenta las fórmulas (5) y (8) resulta

$$d\,(A\,,B) = \sqrt{m}\, L\, \frac{X_2}{X_1} \tag{16}$$

Lo que nos dice, recordando la conocida ley psicofisica de Weber-Fechner, que la distancia entre los dos puntos significa, en este caso, la intensidad de la sensacion.

(1) G. Teissier : Les lois quantitatives de la croissance. Paris. *Actualités Scientifiques Hermann,* 1937, n.º 455, pg. 31.

Inégalités

par **Jean Aczél**

III

Solutions des problèmes et des exercices de la partie II

Problème 6. Etant donnés x_1 et x_2, sur la corde AB (fig. 8) le point d'abscisse $q_1 x_1 + q_2 x_2$ a pour ordonnée $q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$; sur la courbe $y = f(x)$, le point

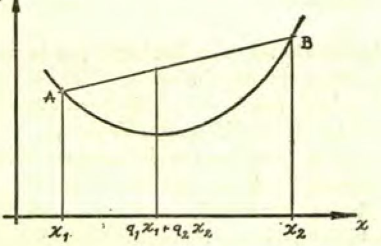

Fig. 8

ayant même abscisse que le précédent, a pour ordonnée $f(q_1 x_1 + q_2 x_2)$. La corde laisse l'arc $\widehat{AB}$ au-dessous d'elle si et seulement si (2) est satisfaite.

Problème 7. Par

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leqslant q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

pour les fonctions convexes au sens large, par $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) > q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ pour les fonctions concaves, et par $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geqslant q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ pour les fonctions concaves au sens large.

Problème 8. Poser $q_1 = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2}$ et $q_2 = \dfrac{p_2}{p_1 + p_2}$.

Problème 9. On a

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = a\,(q_1 x_1 + q_2 x_2) + b = q_1 (a x_1 + b) + q_2 (a x_2 + b) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2),$$

puisque $q_1 + q_2 = 1$.

Problème 10. La fonction $f(x) = 1/x$ est concave pour $x < 0$, et convexe pour $x > 0$. En effet, on a la relation

$$(q_1 x_1 + q_2 x_2)\left(\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}\right) = q_1^2 + q_1 q_2 \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + q_2^2 > q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2 = (q_1 + q_2)^2 = 1$$

(puisque $x + 1/x > 2$, cf. l'*Introduction*), donc pour $x_1, x_2 > 0$ (cf. Problème 1),

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} < q_1/x_1 + q_2/x_2 = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2), \tag{12}$$

et pour $x_1, x_2 < 0$,

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} > q_1/x_1 + q_2/x_2 = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$