the analysis of sigmoid curves», *Acta Biotheoretica,* vol. VIII. Parts I/II).

Podemos generalizar ahora las conocidas curvas del crecimiento heterogenico o allométrico de HUXLEY y TEISSIER.

Pues si suponemos que ademas de (13) tenemos otra ecuacion del mesmo tipo

$$(14) \qquad z = \frac{a_1 x^{k_1}}{1 + b_1 x^{k_1}}$$

— en donde x representa el tiempo fisico — y eliminamos entre (13) y (14) el tiempo x, nos resulta

$$(15) \qquad y = \frac{az^m}{(a_1 - b_1 z)^m + bz^m}$$

que llamamos *curva generalizada* del *crecimiento allométrico* ó heterogónico y que permite explicar los diversos fenómenos del crecimiento enantrométrico hasta ahora inexplicables.

Para subrayar su interés, recuerdense las palabras del sabio biólogo francés G. TEISSIER:

«Il n'existe donc pas de loi d'allométrie généralisée, la seule généralisation actuellement possible consistant à representer les croissances complexes par plusieurs arcs de courbes puissances que separent des points anguleux plus ou moins nettement marqués» [1].

Para terminar, observemos que si calculamos la distancia geodésica entre dos puntos $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ teniendo en cuenta las fórmulas (5) y (8) resulta

$$(16) \qquad d\,(A\,,B) = \sqrt{m}\, L\, \frac{X_2}{X_1}$$

Lo que nos dice, recordando la conocida ley psicofisica de WEBER-FECHNER, que la distancia entre los dos puntos significa, en este caso, la intensidad de la sensacion.

[1] G. TEISSIER: Les lois quantitatives de la croissance. Paris. *Actualités Scientifiques Hermann,* 1937, n.° 455, pg. 31.

Inégalités

par **Jean Aczél**

III

Solutions des problèmes et des exercices de la partie II

PROBLÈME 6. Etant donnés x_1 et x_2, sur la corde AB (fig. 8) le point d'abscisse $q_1 x_1 + q_2 x_2$ a pour ordonnée $q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$; sur la courbe $y = f(x)$, le point

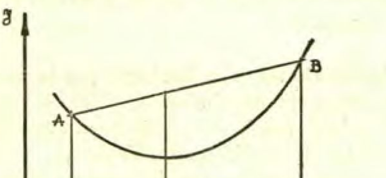

Fig. 8

ayant même abscisse que le précédent, a pour ordonnée $f(q_1 x_1 + q_2 x_2)$. La corde laisse l'arc $\widehat{AB}$ au-dessous d'elle si et seulement si (2) est satisfaite.

PROBLÈME 7. Par

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leqslant q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

pour les fonctions convexes au sens large, par $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) > q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ pour les fonctions concaves, et par $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geqslant q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ pour les fonctions concaves au sens large.

PROBLÈME 8. Poser $q_1 = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2}$ et $q_2 = \dfrac{p_2}{p_1 + p_2}$.

PROBLÈME 9. On a

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = a\,(q_1 x_1 + q_2 x_2) + b = q_1 (ax_1 + b) + q_2 (ax_2 + b) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2),$$

puisque $q_1 + q_2 = 1$.

PROBLÈME 10. La fonction $f(x) = 1/x$ est concave pour $x < 0$, et convexe pour $x > 0$. En effet, on a la relation

$$(q_1 x_1 + q_2 x_2)\left(\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}\right) = q_1^2 + q_1 q_2 \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + q_2^2 > q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2 = (q_1 + q_2)^2 = 1$$

(puisque $x + 1/x > 2$, cf. l'*Introduction*), donc pour $x_1, x_2 > 0$ (cf. Problème 1),

$$(12) \qquad f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} < q_1/x_1 + q_2/x_2 = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2),$$

et pour $x_1, x_2 < 0$,

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} > q_1/x_1 + q_2/x_2 = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$

La fonction $f(x)=x^2$ est convexe car, d'après (1),

$$(13)\quad f(q_1x_1+q_2x_2)=(q_1x_1+q_2x_2)^2=q_1^2x_1^2+ \\ +2q_1q_2x_1x_2+q_2^2x_2^2<q_1^2x_1^2+q_1q_2x_1^2+q_1q_2x_2^2+ \\ +q_2^2x_2^2=(q_1+q_2)\,q_1x_1^2+(q_1+q_2)\,q_2x_2^2= \\ =q_1x_1^2+q_2x_2^2=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)\,.$$

La fonction $f(x)=+\sqrt{x}$ est concave car, de la relation suivante, conséquence immédiate de (1),

$$\left(q_1\sqrt{x_1}+q_2\sqrt{x_2}\right)^2=q_1^2x_1+2q_1q_2\sqrt{x_1x_2}+ \\ +q_2x_2^2<q_1^2x_1+q_1q_2x_1+q_1q_2x_2+q_2x_2^2= \\ =(q_1+q_2)\,q_1x_1+(q_1+q_2)\,q_2x_2=q_1x_1+q_2x_2$$

on déduit que

$$f(q_1x_1+q_2x_2)=+\sqrt{q_1x_1+q_2x_2}>q_1\sqrt{x_1}+ \\ +q_2\sqrt{x_2}=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)\,.$$

Problème 11. En posant $q_1=p_1/(p_1+p_2)\,,q_2=$ $=p_2/(p_1+p_2)$, on a $q_1+q_2=1$, et les inégalités à démontrer se transforment en

$$\frac{1}{q_1/x_1+q_2/x_2}<q_1x_1+q_2x_2<\sqrt{q_1x_1^2+q_2x_2^2}\,.$$

Or ces inégalités (qui expriment précisément le fait que $y=1/x$ est convexe pour $x>0$ et que $y=x^2$ est convexe) ont été démontrées au cours du problème précédent (cf. (12) et (13)).

Exercice 6. Désignons par a et b les côtés du rectangle, par $K=2a+2b$ son périmètre et par $A=ab$ son aire. On a $d=\sqrt{a^2+b^2}$.

$a)$ On a, d'après la seconde inégalité du problème précédent (en y posant $q_1=q_2=1/2$): $(a+b)/2\leqslant$ $\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)/2}$, c'est-à-dire $K/4\leqslant d/\sqrt{2}$, l'égalité n'ayant lieu que si $a=b$. C'est donc le carré qui a le plus grand périmètre.

$b)$ On a d'après (1) $ab=\sqrt{a^2b^2}\leqslant(a^2+b^2)/2$, c'est-à-dire $A\leqslant d^2/2$, l'égalité n'ayant lieu que si $a=b$. C'est donc encore le carré qui a la plus grande aire.

Exercice 7. En conservant les notations de l'exercice précédent, on a $K/4\leqslant d/\sqrt{2}$ resp. $A\leqslant d^2/2$, où cette fois K resp. A sont fixés. d est minimum quand $a=b$; c'est donc encore pour le carré que ce minimum est réalisé.

Problème 12. La fonction $y=a^x$ est convexe, la fonction $y={}^a\log x$ est concave (pour $x>0$), car d'après (1) on a les relations

$$a^{(x_1+x_2)/2}=\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}<(a^{x_1}+a^{x_2})/2\,,$$

$$\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\log\sqrt{x_1x_2}=\frac{1}{2}(\log x_1+\log x_2)\,.$$

Problème 13. D'après le problème précédent, la fonction $\log x$ est concave, d'où, en vertu de l'inégalité de Jensen, il vient que

$$\log(q_1x_1+q_2x_2)>q_1\log x_1+q_2\log x_2=\log x_1^{q_1}x_2^{q_2}\,,$$

c'est-à-dire $x_1^{q_1}x_2^{q_2}<q_1x_1+q_2x_2$, pour $x_1\neq x_2$. L'inégalité $1/(q_1/x_1+q_2/x_2)<x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ résulte de ceci comme dans la démonstration du problème 2.

Problème 14. La fonction $y=(1+h)^x$ est convexe (cf. Problème 12) et la droite $y=1+hx$ rencontre la courbe $y=(1+h)^x$ aux points d'abscisses $x=0$ et $x=1$. (Cf. la définition d'une fonction convexe au nº 1 et la remarque qui la suit).

Exercice 8. Posons $a^r=x_1\,,b^s=x_2\,,1/r=q_1\,,1/s=q_2$. On a d'après (4) $ab=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\leqslant q_1x_1+q_2x_2=a^r/r+b^s/s$.

Exercice 9. Posons $x_1=a/2,x_2=b,q_1\ \ 2/3,q_2=1/3$. On a d'après (4)

$$a^2b=4x_1^2x_2=4\,(x_1^{2/3}x_2^{1/3})^3\leqslant \\ \leqslant4\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)^3=4\left(\frac{a+b}{3}\right)^3.$$

Problème 15. On a

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\,,$$

donc, puisque $0<\cos[(x_1-x_2)/2]<1$ si $0<x_1-x_2<\pi$, la fonction $\sin x$ est concave où elle est positive, c'est-à-dire pour $2n\pi<x<(2n+1)\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ et convexe où elle est négative, c'est-à-dire pour $2(n-1)\pi<x<2n\pi\ \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. De même, il résulte de la relation

$$\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}=\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$$

que la fonction $\cos x$ est concave pour $(2n-1/2)\pi<$ $<x<(2n+1/2)\pi$ et convexe pour $(2n-3/2)\pi<x<$ $<(2n-1/2)\pi,\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

Problème 16. $a)$ En utilisant la relation $x+1/x>2$, on a

$$(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})^n\,(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})^n= \\ =(x_1^{2n}+x_1^nx_2^n\,(x_2/x_1+x_1/x_2)+x_2^{2n})^n> \\ >(x_1^{2n}+2x_1^nx_2^n+x_2^{2n})^n=(x_1^n+x_2^n)^{2n}.$$

$b)$ Nous démontrons l'inégalité par recurrence sur n pour $n>0$. La relation est vérifiée pour $n=1$ (cf. Problème 11). Supposons que

$$\sqrt[n-1]{(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})/2}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n/2}$$

subsiste. On a alors

$$(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})^n<2\,(x^n+x_2^n)^{n-1}.$$

En multipliant membre à membre par l'inégalité (5), on obtient

$$(x_1^n + x_2^n)^{n+1} < 2\,(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})^n,$$

d'où résulte l'inégalité à démontrer pour $n>0$. Pour $n<0$, on ramène le problème au précédent en posant $n=-n'$ $(n'>0)$, $x_1'=1/x_1$ et $x_2'=1/x_2$.

c) Il faut d'abord démontrer l'inégalité analogue à (5):

$$(14)\qquad \frac{(q_1 x_1^n+q_2 x_2^n)^{n+1}}{(q_1 x_1^{n-1}+q_2 x_2^{n-1})^n} < \frac{(q_1 x_1^{n+1}+q_2 x_2^{n+1})^n}{(q_1 x_1^n+q_2 x_2^n)^{n-1}}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}&(q_1 x_1^{n-1} + q_2 x_2^{n-1})^n\,(q_1 x_1^{n+1} + q_2 x_2^{n+1})^n =\\ &= (q_1^2 x_1^{2n} + q_1 q_2 (x_2/x_1+x_1/x_2)\, x_1^n x_2^n + q_2^2 x_2^{2n})^n >\\ &> (q_1^2 x_1^{2n} + 2q_1 q_2 x_1^n x_2^n + q_2^2 x_2^{2n})^n =\\ &= (q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{2n}.\end{aligned}$$

Or la relation a démontrer est vraie pour $n=1$ (voir Problème 11). Supposons qu'elle subsiste pour $n-1$, ce qui revient à dire que

$$(q_1 x_1^{n-1} + q_2 x_2^{n-1})^n < (q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{n-1}$$

subsiste. En multipliant membre à membre par l'inégalité (14), on obtient

$$(q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{n+1} < (q_1 x_1^{n+1} + q_2 x_2^{n+1})^n,$$

d'où résulte l'inégalité à démontrer.

PROBLÈME 17. Posons $r=m/n$; soit d'abord $0<m<n$. On a, d'après le problème précédent,

$$\left(\frac{x_1^m+x_2^m}{2}\right)^{1/m} < \left(\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\right)^{1/n},$$

c'est-à-dire, en posant $x_1^n=t_1$, $x_2^n=t_2$,

$$\frac{t_1^r + t_2^r}{2} < \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^r.$$

De même, pour $n<0<m$; pour $0<n<m$, on obtient l'inégalité opposée. Pour démontrer (6) on pose $r=m/n$, $r'=m'/n'$, $x_1^{1/n}=y_1$, $x_2^{1/n}=y_2$. On a $m<m'$ et l'inégalité (6) se transforme en

$$(q_1 y_1^m + q_2 y_2^m)^{1/m} < (q_1 y_1^{m'} + q_2 y_2^{m'})^{1/m'},$$

ce qu'on a démontré au problème 16. Finalement, pour démontrer (7), il suffit, en vertu de (6), de considérer le cas où $-r=r'>0$. En posant $x_1^{r'}=y_1$ et $x_2^{r'}=y_2$, l'inégalité (7) est équivalent à

$$\frac{1}{q_1/y_1+q_2/y_2} < y_1^{q_1} y_2^{q_2} < q_1 y_1 + q_2 y_2,$$

qui n'est autre chose que la formule (4).

PROBLÈME 18. Les courbes qui représentent les fonctions $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$ qui est la bissectrice du premier et du troisième quadrant. La proposition résulte de cette représentation géométrique.

EXERCICE 10. D'après (1) et l'inégalité démontrée au problème 11, on a

$$a^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2} < a^{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} = \sqrt{a^{x_1^2}\,a^{x_2^2}} < \frac{a^{x_1^2}+a^{x_2^2}}{2}.$$

PROBLÈME 19. On a

$$\begin{aligned}&\chi(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \varphi(\psi(q_1 x_1 + q_2 x_2)) <\\ &< \varphi(q_1 \psi(x_1) + q_2 \psi(x_2)) < q_1 \varphi(\psi(x_1)) +\\ &+ q_2 \varphi(\psi(x_2)) = q_1 \chi(x_1) + q_2 \chi(x_2).\end{aligned}$$

PROBLÈME 20. Le centre de gravité des poids $p_1, p_2, \cdots, p_k$, sera le point

$$\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}, \frac{p_1y_1+p_2y_2+\cdots+p_ky_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\right).$$

On voit ceci par recurrence. En effet, si le centre de gravité des poids $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$ est

$$\left(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_{k-1} x_{k-1}}{p_1+\cdots+p_{k-1}}, \frac{p_1 y_1+\cdots+p_{k-1} y_{k-1}}{p_1+\cdots+p_{k-1}}\right),$$

alors, par exemple, l'abscisse du point en question sera, d'après la constrution indiquée,

$$\frac{(p_1+\cdots+p_{k-1})\left(\dfrac{p_1 x_1+\cdots+p_{k+1} x_{k-1}}{p_1+\cdots+p_{k-1}}\right)+p_k x_k}{(p_1+\cdots+p_{k-1})+p_k} = \\ = \frac{p_1 x_1+\cdots+p_k x_k}{p_1+\cdots+p_k}.$$

PROBLÈME 21. La démonstration se fait par récurrence, moyennant un calcul analogue à celui qui vient d'être effectué.

PROBLÈME 22. Pour $k=2$, on a démontré l'énoncé dans le texte. Pour $k>2$, on le voit par récurrence.

PROBLÈME 23. Supposons que l'énoncé est vrai pour $k=2^{j-1}$. Il subsiste alors aussi pour $k=2^j$, car

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^j}}{2^j}\right) < \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^{j-1}}}{2^{j-1}}\right) +\right.\\ &\left.+ f\left(\frac{x_{2^{j-1}+1}+\cdots+x_{2^j}}{2^{j-1}}\right)\right] <\\ &< \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^{j-1}})+f(x_{2^{j-1}+1})+\cdots+f(x_{2^j})}{2^j}.\end{aligned}$$

La démonstration s'achève comme on l'a déjà indiqué dans l'énoncé du problème.

PROBLÈME 24. Soit $p_1=\mu_1/\nu$, $p_2=\mu_2/\nu$, $\cdots$, $p_k=\mu_k/\nu$, alors on a

$$f\left(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_k x_k}{p_1+\cdots+p_k}\right) = f\left(\frac{\mu_1 x_1+\cdots+\mu_k x_k}{\mu_1+\cdots+\mu_k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{\mu_1 \text{ fois}}+\cdots+\overbrace{x_k+\cdots+x_k}^{\mu_k \text{ fois}}}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\right) <$$

$$< \frac{\overbrace{f(x_1)+\cdots+f(x_1)}^{\mu_1 \text{ fois}}+\cdots+\overbrace{f(x_k)+\cdots+f(x_k)}^{\mu_k \text{ fois}}}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k} =$$
$$= \frac{p_1 f(x_1)+\cdots+p_k f(x_k)}{p_1+\cdots+p_k}.$$

Démonstration analogue pour les $q_1, q_2, \cdots, q_k$ rationnels.

Problème 25. Il faut démontrer que si $r<r'$, alors
$$(q_1 x_1^r + \cdots + q_k x_k^r)^{1/r} < (q_1 x_1^{r'} + \cdots + q^k x_k^{r'})^{1/r'}.$$

Supposons que $0<r<r'$ et posons $x_1^{r'}=t_1, \cdots, x_k^{r'}=t_k$, $0<s=r/r'<1$. L'inégalité à démontrer se transforme en
$$q t_1^s + \cdots + q_k t_k^s < (q_1 t_1 + \cdots + q_k t_k)^s,$$
ce qui, d'après le problème 21, équivaut à la concavité de la fonction $y=t^s$, laquelle a été prouvée au problème 17. Le cas $r<r'<0$ se réduit au précédent en considérant les réciproques. Si maintenant $r=0<r'$, alors l'inégalité à démontrer devient
$$x_1^{q_1} \cdots x_k^{q_k} < \left(q_1 x_1^{r'} + \cdots + q_k x_k^{r'}\right)^{1/r'},$$
donc, en posant $x_1^{r'}=t_1, \cdots, x_k^{r'}=t_k$ et en prenant les logarithmes,
$$q_1 \log t_1 + \cdots + q_k \log t^k < \log (q_1 t_1 + \cdots + q_k t_k),$$
ce qui équivaut à la concavité de la fonction $\log t$ (cf. Problème 12). Démonstration analogue pour $r<0=r'$.

Problème 26. Puisque x_j est le plus grand des $x_1, \cdots, x_k$, on a pour $\rho>0$
$$(q_1 x_1^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho} \leqslant (q_1 x_j^\rho + \cdots + q_k x_j^\rho)^{1/\rho} = x_j,$$
et d'autre part
$$(q_1 x_1^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho} \geqslant (q_j x_j^\rho)^{1/\rho} = x_j \sqrt[\rho]{q_j}.$$
Or $\sqrt[\rho]{q_j} \to 1$ lorsque $\rho \to \infty$, ce que démontre que $M_\rho \to x_j$. On a de même pour $\rho<0$, en posant $x_i = \min(x_1, \cdots, x_k)$
$$x_i \leqslant (q_1 x_1^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho} \leqslant x_i \sqrt[\rho]{q_i},$$
d'où $M_\rho \to x_i$ lorsque $\rho \to -\infty$.

Exercice 11. Soient a, b, c les côtés différents du parallélépipède rectangle, $S=2(ab+bc+ca)$ sa surface, $o=4(a+b+c)$ la somme des longueurs de ses arètes, $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ sa diagonale et $V=abc$ son volume. On a les inégalités
$$V^{2/3} = \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3} = \frac{S}{6},$$
$$V^{1/3} = \sqrt[3]{abc} \leqslant (a+b+c)/3 = o/12,$$
$$V^{2/3} = \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \leqslant (a^2+b^2+c^2)/3 = d^2/3,$$
$$\frac{o}{12} = \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Tous les extrema sont donc réalisés quand $a=b=c$, ce qui est le cas d'un cube.

Exercice 12. Soient a, b, c les côtés d'un triangle, K son périmètre, A son aire. En posant $2s=a+b+c=K$ on a, d'après la formule de Héron, l'inégalité
$$A^{1/2} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{s+(s-a)+(s-b)+(s-c)}{4} = \frac{K}{4},$$
c'est donc le triangle équilatère qui a la plus grande aire.

Exercice 13. D'après l'inégalité qui lie la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique on a
$$\frac{\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{a_1}+\cdots+\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{a_k}}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{k}{\dfrac{a_1}{a_1+\cdots+a_k}+\cdots+\dfrac{a_k}{a_1+\cdots+a_k}} = k,$$
ce qui équivaut à la première inégalité à démontrer. De même
$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geqslant \frac{k}{1/a_1+\cdots+1/a_k}.$$

Exercice 14.
$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_k^2}{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 15. D'après l'inégalité
$$\frac{S}{6} = \frac{1}{6}a+\frac{2}{6}\frac{b}{2}+\frac{3}{6}\frac{c}{3} \geqslant a^{1/6}\left(\frac{b}{2}\right)^{2/6}\left(\frac{c}{3}\right)^{3/6} = \sqrt[6]{\frac{ab^2c^3}{36}}.$$
les extrema en question sont réalisés si $a = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{3}$.

Exercice 16. La convexité de la fonction $\log(1+a^x)$ résulte de l'inégalité
$$2\log\left(1 + a^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right) = \log(1 + 2\sqrt{a^{x_1} a^{x_2}} + a^{x_1} a^{x_2}) \leqslant$$
$$\leqslant \log(1 + a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_1} a^{x_2}) =$$
$$= \log(1 + a^{x_1}) + \log(1 + a^{x_2}).$$
En posant $a_1=a^{x_1}, \cdots, a_k=a^{x_k}$ on a, par la convexité de $\log(1+a^x)$,
$$\log \sqrt[k]{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = \frac{\log(1+a^{x_1})+\cdots+\log(1+a^{x_k})}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \log\left(1 + a^{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}\right) = \log\left(1 + \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\right).$$

La convexité de la fonction $\sqrt{1+x^2}$ résulte de l'inégalité
$$\left(\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_2^2}\right)^2 = 2 + x_1^2 + x_2^2 +$$
$$+ 2\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+x_1^2 x_2^2} \geqslant 2 + x_1^2 + x_2^2 +$$
$$+ 2\sqrt{1+2x_1 x_2+x_1^2 x_2^2} = 4 + (x_1+x_2)^2.$$

De là il vient que

$$\sqrt{1+\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+a_1^2}+\cdots+\sqrt{1+a_k^2}}{k}$$

Exercice 17. Désignons par r le rayon du cercle, par $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ les angles au centre du polygone, par A son aire et par K son périmètre. On a, d'après la concavité de la fonction $\sin x$:

$$A=\frac{r^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\sin\varphi_i\leqslant\frac{r^2}{2}k\sin\left(\frac{\varphi_1+\cdots+\varphi_k}{k}\right)=\frac{r^2}{2}k\sin\frac{2\pi}{k},$$

$$K=2r\sum_{i=1}^{k}\sin\frac{\varphi_i}{2}\leqslant 2rk\sin\left(\frac{\varphi_1+\cdots+\varphi_k}{2k}\right)=2rk\sin\frac{\pi}{k}.$$

Les extremas sont donc réalisés pour $\varphi_1=\cdots=\varphi_k=2\pi/k$, c'est-à-dire pour le polygone régulier.

3. Autres propriétés caractérisant la convexité.

Il résulte immédiatement de la définition géométrique de la convexité que si A, B et C désignent trois

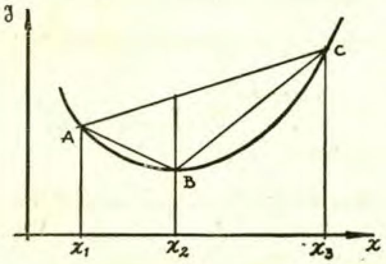

Fig. 9

points successifs quelconques sur la courbe qui représente $y=f(x)$, alors chacune des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $y=f(x)$ soit convexe:

a) La corde AB est toujours au-dessous de la corde AC;

b) La corde BC est toujours au-dessous de la corde AC.

c) La corde AB a toujours une plus petite pente que la corde BC.

On peut mettre ces conditions aussi sous la forme *algébrique* suivante: Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si l'une quelconque des trois conditions suivants est satisfaite:

a) On a toujours

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},\quad (x_1<x_2<x_3).$$

b) On a toujours

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}>\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},\quad (x_1<x_2<x_3).$$

c) On a toujours

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},\quad (x_1<x_2<x_3).$$

On a évidemment des conditions analogues pour caractériser les fonctions convexes au sens large, concaves et concaves au sens large. Nous utiliserons maintenant ces propriétés pour démontrer quelques inégalités.

Problème 27. Démontrer que pour $a>0$, et pour $n=1,2,3,\ldots$

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)>(n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right).$$

Problème 28. Démontrer que la suite $\log(1+1/n)^n$ croit et que la suite $\log(1-1/n)^{-n}$ décroit avec $n\to\infty$ $(n=1,2,3,\ldots)$. En déduire que la suite $a_n=(1+1/n)^n$ croit et que la suite $b_n=(1+1/n)^{n+1}$ décroit quand $n\to\infty$. Démontrer que tout a_n est plus grand que tout b_m et que a_n et b_m sont arbitrairement voisins lorsque n et m sont suffisamment grands.

Il résulte du problème précédent qu'il existe un nombre et un seul, que nous désignerons par la lettre e, qui est plus grand que tout a_n et plus petit que tout b_m. On a donc

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}$$

e est *la base des logarithmes naturels ou néperiens* et on écrira $\log_e x=ln\,x$.

Remarquons qu'on a aussi les relations

$$e=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{x+1}$$

lorsque x est une variable qui tend continûment vers $+\infty$.

Problème 29. Soit t une valeur réelle quelconque; posons $a_n(t)=(1+t/n)^n$ et $b_n=(1+t/n)^{n+1}$. Démontrer les relations

$$e^t=\lim_{n\to\infty}a_n(t)=\lim_{n\to\infty}b_n(t).$$

L'interprétation géométrique de la convexité montre qu'une fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si la tangente en un point quelconque à la courbe qui la représente, laisse la courbe *au-dessus* d'elle (fig. 10). Nous supposons pour simplifier les choses que cette tangente existe toujours; ce sera bien le cas pour les fonctions que nous considérons ici. Rappelons que la pente de la tangente en un point x n'est autre chose que la dérivée $f'(x)$ en ce point. L'intuition géométrique prouve que la fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si $f'(x)$ est strictement croissante, ou encore si $f''(x)$ est strictement positive. On établira sans

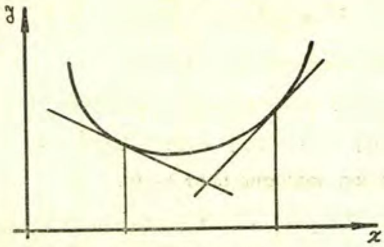

Fig. 10

peine les propositions analogues pour les fonctions convexes au sens large, concaves et concaves au sens large.

Problème 30. Démontrer l'inégalité $e^x > x+1$, qui est valable pour tout x réel. [Utiliser le fait que la dérivée de e^x est aussi e^x].

Problème 31. Déterminer la pente de la corde entre les points d'abscisses x et $x+1/n$ de la courbe $ln\,x$. En déduire la valeur de la dérivée de $ln\,x$. Démontrer l'inégalité $ln\,x < x-1$ $(x > 0)$. Démontrer que $(x^r-1)/r$ tend vers $ln\,x$ lorsque $r \to 0$.

Problème 32. Nous utilisons les notations du problème 25. Démontrer que

$$M_r(x_1,x_2,\cdots,x_k) \leqslant q_1\frac{x_1^r-1}{r}+q_2\frac{x_2^r-1}{r}+\cdots+q_k\frac{x_k^r-1}{r}.$$

Démontrer que

$M_r(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ tend vers $M_0(x_1,x_2,\cdots,x_k)$, lorsque r tend vers 0.

On peut énoncer sous une forme plus générale la caractérisation des fonctions convexes donnée au dé-

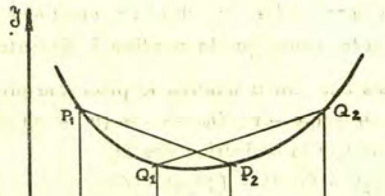

Fig. 11 a

but de ce n°. Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si la condition suivante est satisfaite: quels que soient les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 aux abscisses x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 $(x_1 < x_2;\ \xi_1 < \xi_2)$ tels que $x_1 \leqslant \xi_1, x_2 \leqslant \xi_2$,

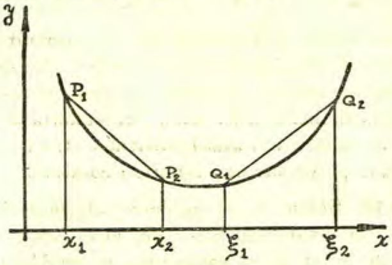

Fig. 11 b

le signe $<$ étant valable pour au moins une de ces deux relations, on a toujours

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1},$$

c'est-à-dire la pente de la corde P_1P_2 est inférieure à celle de la corde Q_1Q_2. De cette proposition on déduit le cas *a)* du résultat donné au début de ce n° en posant $x_1=\xi_1$, le cas *b)* en posant $x_2=\xi_2$ et le cas *c)* en posant $x_2=\xi_1$. On a évidemment des propositions analogues pour les fonctions convexes au sens large, concaves et concaves au sens large.

Problème 33. Soit $y=f(x)$ une fonction convexe. Soit $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_k, v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_k$; posons

$$D_1=\frac{f(v_1)-f(u_1)}{v_1-u_1}, D_2=\frac{f(v_2)-f(u_2)}{v_2-u_2}, \cdots, D_k=$$
$$=\frac{f(v_k)-f(u_k)}{v_k-u_k},$$

et $U_1=u_1, U_2=u_1+u_2, \cdots, U_k=u_1+u_2+\cdots+u_k$, $V_1=v_1, V_2=v_1+v_2, \cdots, V_k=v_1+v_2+\cdots+v_k$. Supposons que $U_1<V_1, U_2<V_2, \cdots, U_{k-1}<V_{k-1}$, mais $U_k=V_k$. Démontrer que

$$\begin{aligned}(15)\qquad & U_1(D_1-D_2)+U_2(D_2-D_3)+\cdots+\\ &+U_{k-1}(D_{k-1}-D_k)+U_kD_k<V_1(D_1-D_2)+\\ &+V_2(D_2-D_3)+\cdots+V_{k-1}(D_{k-1}-D_k)+V_kD_k.\end{aligned}$$

En déduire que

$$u_1D_1+u_2D_2+\cdots+u_kD_k<v_1D_1+v_2D_2+\cdots+v_kD_k.$$

Problème 34. Démontrer que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit convexe: Quels que soient les valeurs $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_k, v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_k$, tels que, $u_1<v_1, u_1+u_2<v_1+v_2, \cdots, u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}<v_1+v_2+\cdots+v_{k-1}$, mais $u_1+u_2+\cdots+u_k<v_1+v_2+\cdots+v_k$, on a

$$\begin{aligned}(16)\qquad & f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_k)<f(v_1)+\\ &+f(v_2)+\cdots+f(v_k).\end{aligned}$$

[Nécessaire : utiliser le problème précédent ; suffisant : poser $u_1=u_2=\cdots=u_k=\frac{v_1+v_2+\cdots+v_k}{k}$].

C'étaient Hardy, Littlewood et Pólya qui ont prouvé que le critère précédent est nécessaire. La démonstration qu' on obtient à partir du Problème 33. est due à M. Ladislas Fuchs. M. J. Karamata a remarqué que le critère est aussi suffisant. On a le signe opposé dans (16) pour une fonction concave.

Exercice 18. Soient π_1 et π_2 deux polygones inscrits au cercle. Soient $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k$ et $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_l$ les côtés de π_1 et de π_2 rangés par ordre décroissant. Supposons que $a_1<b_1, a_2<b_2,\cdots,a_l<b_l$. Désignons par A_j l'aire et par K_j le périmètre du polygone π_j (j=1,2). Démontrer que $A_1>A_2$ et que $K_1>K_2$.

IV

Solutions des problèmes et des exercices de la partie III.

Problème 27. Par la convexité de la fonction a^x, on a

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\frac{a^{1/n}-a^0}{1/n}>\frac{a^{1/n+1}-a^0}{1/n+1}=$$
$$=(n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right).$$

Problème 28. Par la concavité de la fonction $\log x$, on a

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log 1}{\frac{1}{n}}<$$
$$<\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\log 1}{\frac{1}{n+1}}=\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

et

$$\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\log 1}{-\frac{1}{n}}>$$
$$>\frac{\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\log 1}{-\frac{1}{n+1}}=\log\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}$$

La croissance de a_n résulte aussitôt; celle de b_n résulte de ce que

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n-1}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}.$$

Il suffit de démontrer que $b_n>a_n$ pour le même indice n, ce qui résulte de

$$a_n-b_n=a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=-\frac{a_n}{n}<0.$$

Ceci montre aussi que $a_n-b_n\to 0$.

Problème 29. Posons $n=t\xi$, on a alors

$$a_n(t)=(1+t/n)^n=(1+1/\xi)^{t\xi}\to e^t.$$

Démonstration analogue pour $b_n(t)$.

Problème 30. $y=x+1$ est l'équation de la tangente au point $x=0$ à la courbe $y=e^x$, qui est convexe.

Problème 31.

$$\frac{ln\,(x+1/n)-ln\,x}{1/n}=ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n\to ln\,e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x},$$

lorsque $n\to\infty\cdot y=x-1$ est l'équation de la tangente au point $x=1$ à la courbe $y=ln\,x$, qui est concave. Posons $\rho=x^r$ alors on a

$$\frac{x^r-1}{r}=\frac{\rho-1}{\frac{ln\,\rho}{ln x}}=ln\,x\left(\frac{ln\,\rho-ln\,1}{\rho-1}\right)^{-1}\to ln\,x.$$

Problème 32. D'après le problème 25 et le problème précédent, on a

$$ln\,x_1^{q_1}\cdots x_k^{q_k}\leqslant ln\sqrt[r]{q_1x_1^r+\cdots+q_kx_k^r}=$$
$$=\frac{1}{r}ln\,(q_1x_1^r+\cdots+q_kx_k^r)\leqslant\frac{q_1x_1^r+\cdots+q_kx_k^r-1}{r}=$$
$$=q_1\frac{x_1^r-1}{r}+\cdots+q_k\frac{x_k^r-1}{r}\to q_1ln\,x_1+\cdots+q_kln\,x_k=$$
$$=ln\,x_1^{q_1}\cdots x_k^{q_k}.$$

Problème 33. Par la convexité de $f(x)$, on a $D_i-D_{i+1}>0$ pour $i=1,2,\cdot\cdot,k-1$, d'où résulte (15), d'après les hypothèses sur U_i et V_i. (15) s'écrit sous la forme

$$U_1D_1+(U_2-U_1)D_2+\ldots+(U_k-U_{k-1})D_k<V_1D_1+$$
$$+(V_2-V_1)D_2+\cdots+(V_k-V_{k-1})D_k,$$

qui n'est autre chose que la relation à dèmontrer.

Problème 34. On a d'après le problème précédent

$$(u_1-v_1)D_1+(u_2-v_2)D_2+\cdots+(u_k-v_k)D_k<0$$

c'est-à-dire, par la définition des D_i,

$$(f(u_1)-f(v_1))+(f(u_2)-f(v_2))+\cdots+$$
$$+(f(u_k)-f(v_k))<0.$$

D'autre part on a $v_1\geqslant\frac{v_1+v_2}{2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{v_1+\cdots+v_k}{k}=$ $=u_1=u_2=\cdots=u_k$, donc $kf\left(\frac{v_1+\cdots+v_k}{k}\right)<f(v_1)+$ $+f(v_2)+\cdots+f(v_k)$.

EXERCICE 18. Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ les angles au centre de π_1, par $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_l$ ceux de π_2 et posons $\psi_{l+1} = \cdots = \psi_k = 0$. On a évidemment $\sum_{i=1}^{j} \varphi_i < \sum_{i=1}^{j} \psi_i \ (j=1, 2, \cdots, k-1)$ et $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = \sum_{i=1}^{k} \psi_i$. On voit, par le problème 34 et par la concavité de la fonction $\sin x$, que

$$A_1 = \frac{r^2}{2} \sum_{i=1}^{k} \sin \varphi_i < \frac{r_2}{2} \sum_{i=1}^{k} \sin \psi_i = A_2 ,$$

$$K_1 = 2r \sum_{i=1}^{k} \sin \frac{\varphi_i}{2} < 2r \sum_{i=1}^{k} \sin \frac{\psi_i}{2} = K_2 .$$

4. Fonctions convexes de plusieurs variables. Dans ce n°-ci nous géneraliserons la notion de convexité à des fonctions de plusieurs variables. Une fonction $z = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de n variables sera dite convexe si pour tout couple de points $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$ et $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots x_n^{(2)})$ et pour tout couple de nombres positifs q_1 et q_2, tels que $q_1 + q_2 = 1$, on a l'inégalité

$$(17) \quad F(q_1 x_1^{(1)} + q_2 x_1^{(2)}, q_1 x_2^{(1)} + q_2 x_2^{(2)}, \cdots, q_1 x_n^{(1)} + q_2 x_n^{(2)}) < \\ < q_1 F(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) + q_2 F(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}) .$$

Cette inégalité est *l'inégalité de Jensen pondérée à n variables et à deux termes.* Dans le cas d'une fonction $z = F(x, y)$ de deux variables, l'inégalité (17) s'écrit

$$(17 \text{ bis}) \quad F(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 y_1 + q_2 y_2) < \\ < q_1 F(x_1, y_1) + q_1 F(x_2, y_2) .$$

La signification géométrique de cette inégalité est évidente : La surface qui représente la fonction $z = F(x, y)$ est située au-dessous d'une quelconque de ses cordes(c'est pourquoi on appelle parfois les fonctions convexes de plusieurs variables, des fonctions *sous-linéaires*). De l'inégalité (17) on déduit, de la même façon qu'au problème 21, l'inégalité pondérée de Jensen à n variables et à k termes, que le lecteur aura soin d'écrire explicitement.

Pour qu'une fonction *continue* $z = F(x, y)$ de deux variables soit convexe, il faut et il suffit que l'inégalité *symétrique* de Jensen

$$(18) \quad F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)}{2} .$$

déduite de (17) en posant $q_1 = q_2$, soit vérifiée. D'ici on déduit, comme au problème 22, qu'une fonction continue de deux variables $z = F(x, y)$ est convexe si et seulement si elle vérifie l'inégalité symétrique de Jensen à deux variables et à k termes

$$(19) \quad F\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \cdots + y_k}{k}\right) < \\ < \frac{F(x_1, y_1) + \cdots + F(x_k, y_k)}{k} .$$

Le lecteur pourra vérifier ces résultats et les expliciter pour les fonctions de n variables $z = F(x_1, x_2, \cdots x_n)$. On a évidemment des définitions et des propositions analogues pour les fonctions de plusieurs variables convexes au sens large, concaves et concaves au sens large.

Il est aussi facile à voir (cf. Problèmes 23 et 24) que si une fonction $z = F(x, y)$ de deux variables [de n variables], non nécéssairement continue, vérifie l'inégalité symétrique (18), allors elle vérifie aussi l'inégalité (19) et l'inégalité (17), mais cette dernière avec des poids *rationnels.*

PROBLÈME 35. Démontrer que la fonction $F(x, y) = \sqrt{xy}$ est concave, que la fonction

$$F(x, y) = {}^{a}\log(a^x + a^y)$$

est convexe, et que les fonctions $F(x, y) = x^{q_1} y^{q_2}$ $(q_1 > 0, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1)$ et $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n}$ $(q_1 > 0, q_2 > 0, \cdots, q_n > 0, q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1)$ sont concaves.

PROBLÈME 36. Démontrer l'inégalité

$$(20) \quad (x_1^{(1)} + \cdots + x_1^{(k)})^{q_1} (x_2^{(1)} + \cdots + x_2^{(k)})^{q_2} \cdots (x_n^{(1)} + \cdots + x_n^{(k)})^{q_n} \geqslant \\ \geqslant x_1^{(1)\, q_1} x_2^{(1)\, q_2} \cdots x_n^{(1)\, q_n} + \cdots + x_1^{(k)\, q_1} x_2^{(k)\, q_2} \cdots x_n^{(k)\, q_n} .$$

Soit $r > 1$ et $1/r + 1/s = 1$, démontrer l'inégalité

$$(a_1^r + a_2^r + \cdots + a_k^r)^{1/r} (b_1^s + b_2^s + \cdots + b_k^s)^{1/s} \geqslant \\ \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_k b_k$$

(Inégalité de Hölder). A quoi se réduit cette inégalité lorsqu'on pose $r = s$? (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

PROBLÈME 37. Démontrer que la fonction $F(x, y) = \left(\frac{x^r + y^r}{2}\right)^{1/r}$ et plus généralement que la fonction

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{1/r} \quad (r > 1)$$

est convexe. [Poser dans l'inégalité de Hölder d'abord $s = r/(r-1)$, $b_1 = (x_1 + x_2)^{r-1}$, $b_2 = (y_1 + y_2)^{r-1}$. Introduire ensuite $a_1 = x_1$, $a_2 = y_1$, puis $a_1 = x_2$, $a_2 = y_2$; et ajouter les deux inégalités].

PROBLÈME 38. Démontrer l'inégalité $(r > 1)$:

$$[(a_1 + b_1)^r + (a_2 + b_2)^r + \cdots + (a_k + b_k)^r]^{1/r} \leqslant \\ \leqslant (a_1^r + a_2^r + \cdots + a_k^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r + \cdots + b_k^r)^{1/r}$$

(Inégalité de Minkowski).

EXERCICE 19. Démontrer l'inégalité

$$\frac{u_1^p}{v_1^{p-1}} + \frac{u_2^p}{v_2^{p-1}} + \cdots + \frac{u_k^p}{v_k^{p-1}} \geqslant \frac{(u_1 + u_2 + \cdots + u_k)^p}{(v_1 + v_2 + \cdots + v_k)^p}$$

EXERCICE 20. Démontrer l'inégalité

$$\sqrt[k]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_k + b_k)} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a} + \\ + \sqrt[k]{b_1 b_2 \cdots b_k} ,$$

où k est un entier positif. *(continua)*