Problemas do nosso ensino superior (II)

As definições do número real

por **Luís Neves Real**

Fundamentalmente essa exposição assenta na noção de *secções contíguas*, parente muito próxima das de *corte* e *encaixe*. No conjunto R dos números racionais, uma *secção inferior*, U, é um subconjunto próprio de R tal que: (i) com um número racional, contém todos os menores; e (ii) não possui último elemento, isto é não há em U nenhum elemento que seja maior que todos os outros. Um subconjunto próprio, V, de R, será uma *secção superior* se (i) com um número contiver todos os maiores; e (ii) se não possuir primeiro elemento, isto é, se não houver em V nenhum número que seja menor que todos os outros.

Um *par*, (U/V), *de secções contíguas de números racionais* é um conjunto ordenado cujos elementos são uma secção inferior, U, e uma secção superior, V, de R, tais que: (i) são disjuntas; e (ii) a sua união, $U \cup V$, é densa em R, isto é: entre dois quaisquer números racionais há sempre elementos de $U \cup V$.

Note-se bem que não é nestes termos que o Professor Vicente Gonçalves nos apresenta estas noções. Mas verificando-se que sobre a base — pares de secções contíguas — se pode efectivamente ordenar uma exposição coerente, na estricta linha das caracterizações ordinais dos conjuntos, fiel portanto ao que há de essencial no pensamento de Dedekind[1], mas apresentando vantagens em relação à forma como originàriamente foi exposto, procurei libertar as definições que nos dá o Professor Vicente Gonçalves de tudo o que me parece menos conforme com esse pensamento. Em primeiro lugar é conveniente chamar *conjunto* ao que o autor chama *colecção*. Não se compreende o cuidado que põe o autor em manter-nos afastados do uso habitual em matemática da palavra «conjunto» até à página 34 das suas lições, altura em que num parágrafo (!), subordinado ao capítulo *Limite de sucessões*, introduz o *conceito geral de conjunto*, conceito que lhe será necessário não apenas na teoria dos limites, mas em toda a obra, inclusivé antes de nela o ter caracterizado, como, por exemplo, nos passos a que nos estamos a referir. Por outro lado só como sacrifício, bem deslocado, ao *preciosismo* da sua linguagem, se pode perceber que usasse essa palavra numa frase que briga com a maneira de dizer corrente nos modernos livros de matemática: *as secções contíguas devem englobar*, **em seu conjunto,** *todos os números racionais, com uma só excepção possível* — quando pretendia dizer que na união das duas secções constitutivas de um *par* estão, como elementos, todos os números racionais com uma só excepção possível!! De resto entende-se hoje que a importância assumida na matemática pela álgebra dos conjuntos, não só como instrumento de análise, mas pelo seu interesse próprio de álgebra de Boole, lhe dá direito a um lugar à parte em qualquer curso de matemáticas gerais. A orientação escolhida pelo Professor Vicente Gonçalves para o seu obrigava a tratá-la logo de entrada num primeiro capítulo ou numa introdução, logrando ainda a incontestável vantagem metodológica de ficar no seu livro rigorosamente delimitada a região contestável dos fundamentos da análise matemática.

Igualmente na definição de secções contíguas substituí a condição (ii) à condição equivalente enunciada pelo Professor Vicente Gonçalves nos termos seguintes: *Podem sempre encontrar-se dois elementos, u de U e v de V satisfazendo a $v-u<\delta$, por menor que seja o número racianal e positivo δ prèviamente dado.* Êste anunciado confere desnecessàriamente à noção de *par de secções contíguas* um caracter híbrido: combinações típicas da caracterização ordinal com outras — métricas — de natureza topológica: a condição exprime, de facto, que no espaço R, metrizado com o valor absoluto da diferença de dois números racionais, tem de ser nula a distância das duas secções contíguas.

Parece-nos importante salientar que o par de secções contíguas quando aproximado do corte apresenta, do ponto de vista da teoria ordinal, a real vantagem de serem equivalentes (correspondência biúnivoca) o conjunto R e o conjunto de todos os pares (U/V), cujos elementos, U e V, não são complementares, enquanto que a cada número racional correspondem dois cortes de Dedekind. Mas quando na definição de *par de secções contíguas* recordamos o encaixe (e é o que faz o Professor Vicente Gonçalves com a sua condição (ii)) o ponto de vista do cálculo infinitesimal leva a preferir o próprio encaixe para a definição de número irracional, pois que esta se faz então à custa de *sucessões* de números racionais.

Quanto ao uso da expressão *par de secções contíguas*, ela permite, dentro desta orientação, um enunciado perfeitamente aceitável na definição de *número real*: «*um número real é um par de secções contíguas de números racionais; se as secções são complementares,*

[1] Cf. *Gazeta de Matemática*, n.º 40.

o número diz-se real irracional, se o não são o número diz-se real racional». Desta definição simples e acessível esteve muito próximo o Professor Vicente Gonçalves, que dela se afastou brusca e essencialmente ao embrenhar-se nas suas considerações sôbre dízimas, separação de valores, etc.... ; acabou por preferir mascarar uma posição outrora legítima, (ultrapassada hoje nas exposições rigorosas do assunto) com uma terminologia que obscurece e complica a forma como os tratados com mais de dez anos a ele se referem; sem que daí resultasse qualquer utilidade prática, pois, como veremos, nenhumas das definições de caracter metafísico, que abruptamente nos aparecem no desenvolvimento matemático da teoria, tem com ela qualquer relação.

Não nos diz o Professor Vicente Gonçalves por que motivo foi levado a adoptar, como base de definição de números irracionais, as *classes contíguas*. Vimos que o *corte* surgiu a Dedekind, como resultado da procura de um axioma que traduzisse a *continuidade*, sugerida pela linha recta — conjunto ordenado sem saltos nem lacunas; quanto ao encaixe é ele processo conhecido, desde a antiguidade, para avaliação aproximada dos números irracionais. Mas o Professor Vicente Gonçalves não teve a preocupação de aproximar o par de secções contíguas de qualquer problema concreto, que de qualquer modo preparasse os leitores, os seus alunos, para o aceitarem, como sua solução. Limitou-se a ir procurar sugestões ao confronto dos tipos de ordenação do conjunto de todas as dízimas infinitas e do conjunto de todos os números racionais. Mas que fôrça de persuasão pode ter, nas pessoas a quem a obra se dirige, a *dízima infinita* se esta aí aparece sem ser relacionada com qualquer questão matemática? Tanto mais que o autor não dá de dízima infinita qualquer definição! Embora o o facto seja quasi inacreditável, a verdade é que o Professor Vicente Gonçalves vai buscar a um conjunto que não definiu, num jôgo vazio de qualquer coerência lógica e de poder de convicção, as razões que, segundo ele, *comandam* a inserção de *novos* números, por *entre* os números racionais. Na realidade — e essa será a conclusão a que adeante teremos de chegar — o que todo o parágrafo 2.º do primeiro capítulo da obra nos mostra é que, se a sua aguda intuição de analista o não engana sobre *o que sejam* números racionais ou irracionais, muito pouco cuidou de se habilitar a poder dizer-nos que coisa eles *são*.

Ao iniciar as considerações desse parágrafo, exige o autor que saibamos que um número racional admite um desenvolvimento em dízima periódica. Como se não trata de assunto que faça parte dos programas liceais, bom seria que tivesse dado, a tal propósito, as bem necessárias indicações bibliográficas. Esta falta (que é, de resto defeito geral de toda a obra) obrigou-nos naturalmente a abrir de novo o seu *Compêndio de Aritmética*. Verificamos que há dele duas edições, com a mesma data, diferindo apenas em que uma delas tem a menos que a outra precisamente o capítulo, onde o assunto vem tratado, e que tem por título: *Dízimas periódicas* Lá vimos que a dízima (periódica, claro está) aparece com base no número racional, sujeitando-o ao algoritmo de base 10. Mas sendo assim (e como poderia ser de outro modo?) não tem qualquer sentido falar de dízima não representativa de um número racional, nem falar de dízimas sem ser como o resultado do desenvolvimento dos números racionais — base única, adoptada no «Curso de Algebra Superior» para a exposição. Se é legítimo considerar, como o faz na página 5, a sucessão $|x_n = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n|$, onde x_n é o maior número com n decimais que pertence à secção inferior de um dado par de secções contíguas, já o não é passar dessa sucessão bem definida (que pode ter ou não limite — e nisto sim reside a questão primordial que interessa esclarecer para fundamentar o estudo do cálculo) para a *figura* $\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ representada no texto pelo símbolo (A) e a que o autor sem mais explicações chama repentinamente *dízima*, como se essa figura fôsse familiar ao leitor, como se este soubesse o que ela *é*... embora possa vislumbrar *o que seja*. No curso do Professor Vicente Gonçalves não há nenhuma indicação sobre o sentido que nós devamos atribuir ao que chama *dízima*!

Uma vez fixada esta falta, procuremos, com o objectivo de poder prosseguir neste comentário, qual poderá ser o pensamento do autor sobre o que se entende por uma *dízima*. Na edição referida do «Compêndio de Aritmética», numa nota da página 239, diz-nos o Professor Vicente Gonçalves: *Dízima infinita é a figura em que pela imaginação dispomos em ordem determinada uma infinidade de algarismos, precedidos de um número inteiro e dele separados por uma vírgula.* Partamos pois desta descrição, que nos dá a dízima como creação imaginativa, só gràficamente semelhante às conhecidas dízimas periódicas. Consideremos o conjunto $\overline{D}$ constituído por todas as dízimas e ordenemo-lo pelo critério de anterioridade adoptado pelo autor da página 4. Resulta logo um isomorfismo entre $\overline{D}$ e o conjunto $\overline{P}$ de todos os pares de secções contíguas. Não interessou porém ao Profesor Vicente Gonçalves elevar-se do conjunto dos números racionais ao conjunto $\overline{P}$. Se o tivesse feito, e uma vez que se dispôs a apoiar a *sua* creação dos números irracionais na dízima, o isomorfismo entre $\overline{D}$ e $\overline{P}$ justificaria que tomasse como definição de número real aquela que acima propuzemos — *um par de secções contíguas de números racionais.*

Justificação que se completaria invocando Dedekind e mostrando que o conjunto $\overline{P}$, como o conjunto $\overline{D}$ são ambos *contínuos*. Ficou-se porém o Professor Vicente Gonçalves apenas na comparação de $\overline{D}$ e R.

Guiado pela intuição geométrica, não confessada (aí o grande mal, pois é origem de todo o obscuro da explicação), de que o conjunto dos números racionais imaginado estendido sobre uma recta a deixa a descoberto nos pares de secções contínuas complementares e que, pelo contrário, $\overline{D}$ se adapta perfeitamente a essa recta — cada ponto desta e cada dízima correspondendo-se biunìvocamente e com respeito da ordem relativa — ficou-se na tradução incompleta das diferenças entre uma régua contínua de dízimas e uma régua lacunar de números racionais. Mas não aprofundou, lògicamente, esta visão intuitiva do problema numa exposição que sugerisse aceitàvelmente a continuidade à Dedekind do conjunto ordenado das dízimas. Por isso as suas explicações comparadas com as de Dedekind e com aquelas que devemos a Bento Caraça muito deixam a desejar. Insiste sim em concluir que todo par de secções contíguas de números racionais, supostos escritos como dízimas periódicas, dá lugar em $\overline{D}$ a uma separação das dízimas em dois conjuntos, um contendo todas as dízimas correspondentes aos números racionais da secção inferior do par e outro todas aquelas que representam os números racionais da secção superior — separação essa que, ao contrário do que sucede no conjunto R, é feita sempre por uma dízima (que não pertence a nenhum daqueles conjuntos). É pois, *sem que nunca o nomeie, à continuidade* do conjunto das dízimas que pretende conduzir-nos o Professor Vicente Gonçalves. Mas para quê, uma vez que a dízima não passa duma *figura da nossa imaginação...?!* Não se consegue atinar no livro com razões que nos permitam compreender o ter o autor passado dos pares de secções contínuas para as dízimas. Vantagens para o prosseguimento da exposição? nenhumas, pois que será a partir das secções contíguas que definirá as leis para o cálculo com os números reais.

Omisso a tal respeito o Professor Vicente Gonçalves, sem se preocupar com a confusão que esse desvio da exposição possa provocar aos seus leitores, passa convictamente a definir-nos números irracionais. Retomando figura já acima considerada, $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$, e designada pelo símbolo (A), a dízima correspondente ao par (A_1/A_2), afirma-nos: *Sendo (A) periódica, é representação decimal de certo número racional e esse número, que não pertence a A_1 nem a A_2, excede todos os elementos a_1 de A_1 e é excedido por todos os elementos a_2 de A_2: a separação das dízimas reflecte assim uma separação de valores.* Interrompamos a transcrição para anotar esta misteriosa palavra: «valores». Ao certo não sei o que por trás dela se oculta. Pode levar-se à conta da preocupação tantas vezes revelada pelo Professor Vicente Gonçalves de exibir um estilo literário: ela teria impedido que mais uma vez dissesse «números racionais» e aconselharia, com o mesmo significado, o termo «valores». Mas pode também ser que esta palavra traduza qualquer enquadramento filosófico da teoria dos números. A verdade é que o não revela, embora nos dê em vários pontos desta hermética página 8, sinais da sua possível existência. A ser assim, então a frase citada procuraria indicar-nos que nas dízimas, até aí consideradas meras *figuras imaginadas*, etc... se reflecte qualquer outra *realidade*. Será esta, ao fim e ao cabo, que justifica o desvio da exposição pelo parágrafo das dízimas? Mistério, que mais se adensa ao embrenharmo-nos na segunda parte do trecho que estávamos a transcrever: *Não sendo dízima periódica, (A) não é representação decimal de qualquer número racional, nem existe número desta espécie* (note-se que é a primeira vez que no livro encontramos esta expressão. *N. R.*) *que separe A_1 de A_2; mas subsiste a separação das dízimas e isto nos leva a ver em (A)* (Como? Porquê? Afirmação completamente arbitrária! *N. R.*) *a representação de um número de outra espécie. Êsse número superior a todos os a_1 de A_1 e inferiores a todos os a_2 de A_2 é então um número irracional.*

Antes de prosseguir recordemos os passos essenciais da exposição do Professor Vicente Gonçalves: 1.º — os números racionais dão lugar pela sua representação decimal a dízimas infinitas periódicas; 2.º — sugerem estas (e nada mais do que estas?! N. R.) a criação de *figuras da nossa imaginação* designadas por analogia (Apenas?! *N. R.*) com o nome de dízimas; 3.º — a cada par de secções contíguas de números racionais pode fazer-se corresponder uma dessas figuras — uma das dízimas; 4.º — que no conjunto $\overline{D}$, de certa maneira ordenado, produz uma separação entre as dízimas anteriores e as posteriores. 5.º — Se as duas secções do par forem separadas por um número racional, essa separação, feita por uma dízima periódica reflecte uma separação de *valores* (?!), que é realizada por um número racional; 6.º — mas no caso de serem as duas secções do par conjuntos complementares de R, e não sendo pois periódica a *dízima* que lhe podemos fazer corresponder (agora simples *figura etc...* sem qualquer significado dentro da aritmética), *então* (e apenas! *N. R.*) pelo facto de continuarem as *tais figuras imaginadas* a serem separadas umas das outras por uma delas (embora se não possa dizer que há um *valor* que separa os valores maiores dos valores menores), *somos levados* a ver nessa *figura a representação* de um *número* (Que coisa é um *número*?! *N. R.*); 7.º — que é de *outra espécie* (?!).

8.º — *É então* (?!) êste número um número irracional; 9.º — que se *declara* (sic., linha 20 da página 9) maior que todos os números racionais da secção inferior e menor do que todos os da secção superior.

É isto, quanto a mim, um encadeamento de considerações, que não tem por base nem a lógica nem a intuição. De modo que é impossível *ver* a tal separação de valores a que se vai buscar o forçoso da *existência* (levantando-se desnecessàriamente e sem o esclarecer o problema do que se entende por tal *existência*) de números de *espécie diferente da* (?) dos números racionais: os números irracionais. O Professor Vicente Gonçalves, desdenhando preocupações didáticas sem ter sequer a desculpa da procura de originalidade (que, de certo modo poderia ter logrado, fazendo uma construcão lògicamente inatacável, partindo do par de secções contíguas de números racionais, como definição de número real) chega a dar a impressão que procurou ocultar-nos, o que constantemente deve ter guiado o seu espírito e que só revela mais adeante, na página 14, sob a forma de um teorema: a recta continua identificada ao conjunto ordenado das dízimas. Como consequência desta continuidade têm limite todas as sucessões de números decimais que satisfaçam a certas condições (é o caso da sucessão $\{x_n\}$ acima considerada). Ora o conjunto de todas as dízimas infinitas (consideradas ou não como figuras da imaginação, o que para o caso nada importa) é susceptível de uma organização topológica segundo a qual esses limites existem (para a sucessão $\{x_n\}$ o seu limite é precisamente a dízima (A)). Entendo que deveria afirmar, sem subterfúgios, que é para obter êste resultado (e não em obediência àquele misterioso critério de separação de valores) que o Professor Vicente Gonçalves é obrigado a intercalar (muito à fôrça, sem as sugestões persuasivas das exposições citadas) por entre os números racionais os números irracionais. Creio que, para o matemático Vicente Gonçalves o número irracional é uma dízima infinita não periódica. Porque o não confessou, humilde e simplesmente, desenvolvendo em seguida, sem mais delongas, todas as propriedades dos números reais que é indispensável considerar numa obra do género da sua — as algébricas do corpo ordenado, as topológicas de espaço distanciado completo? Tudo resultaria em termos simples e fàcilmente assimilável, pelos seus alunos. No cotêjo com obras estrangeiras que ao assunto se referem ficaria na companhia dos nomes de Courant, Haupt, Aumann, etc... Mas não; o Professor Vicente Gonçalves arreigado à ideia de projectar para as núvens o número real e ver nas secções contíguas a sua sombra cá na terra, chega às definições:

«*Número irracional é o conceito de quantidade que decompõe em duas secções contíguas a totalidade dos números racionais. Cada número irracional excede todos os elementos da respectiva secção inferior e é excedido por todos os da secção superior. Os números irracionais que acabamos de definir e os números racionais já conhecidos têm a designação geral de números reais.*»

No primeiro período da transcrição anterior inclui-se uma noção metafísica — o conceito de quantidade — a confirmar que relega o Professor Vicente Gonçalves para a filosofia o esclarecimento do problema. Mas não a analisando, deixa-nos a convicção, de que nada lhe serve o seu trabalho com os números irracionais, antes aparece incòmodamente a dar aspectos de círculo vicioso às definições adoptadas: por um lado, parte-se das secções contíguas complementares à procura da noção do número irracional, mas, por outro diz-se que é êste que *decompõe em duas secções contíguas a totalidade dos números racionais...* O segundo período dá-nos a ordenação do número irracional entre os números racionais, considerando-os a todos como elementos de um mesmo conjunto ordenado. E como não acha literàriamente aceitável repetir expressões, diz agora *excede* (de excesso ou diferença — termo da Aritmética) onde antes dizia *maior*, e *é excedido* onde dizia *menor*. Tenho dúvidas sôbre o bom gosto literário de tal redacção, mas tenho a certeza dos seus inconvenientes do ponto de vista didático; matemàticamente é imprópria. No terceiro período coloca num mesmo plano — o dos números reais — aos números racionais e irracionais. Não conseguindo, ou não se preocupando com subordinar as exposições correntes nos antigos livros de análise às distinções logísticas, o Professor Vicente Gonçalves coloca-se (êle tão escrupuloso no seu Compêndio de Aritmética!) em conflito consigo mesmo: o número real, é tanto uma *relação* (quando racional) como um *conceito de quantidade* (quando irracional)!

Quere parecer-me que o Professor Vicente Gonçalves se comporta em relação aos números irracionais de três formas diversas: (*i*) como analista e investigador, considera-o uma dízima infinita não periódica; (*ii*) como autor do «Curso de Algebra Superior», um par de secções contíguas e complementares de números racionais; e (*iii*) como elemento de destaque do do Mundo Culto na nossa terra, *um conceito de quantidade, que separa, etc. ...* Não conseguiu o Professor Vicente Gonçalves na obra que estamos comentando, fazer a necessária coordenação das três concepções. Pelo contrário é pela fôrça de uma afirmação inesperada que a uma delas dá a primazia. Mas não foi nem o *analista* nem o *autor da obra* quem ousou fazer prevalecer nesta as suas legítimas convicções, preciosos e necessários instrumentos de prossecução do seu trabalho. Só o homem culto foi capaz de afirmar (e em *tipo* destacado) a sua certeza; a ele se subordinou o analista, que terá de contentar-se com saber que um número real é representável por uma dízima; e também ao obreiro de centenas de páginas de matemática há-de bastar saber que o número irracional gosa da propriedade de *poder ser dado pelas secções que lhe são contíguas.*

A confusão do *arranjo lógico* das três definições vieram sobrepor-se todos os inconvenientes, todos os perigos de um insistente preciosismo da sua linguagem. Atente-se nos dois períodos seguintes:

«Todo o número real se supõe dado pelas secções que *lhe* são contíguas.»

«A cada par de secções contíguas A_1 e A_2, graças ao conceito de número irracional, fica a corresponder em todos os casos um número real que designaremos por a.»

Pela primeira destas transcrições, se quero designar um número real, dou-o pelas secções que *lhe* (a ele, número real preexistente) são contíguas. Mas pela segunda, sempre que tenha um par de secções contíguas, *há* (que significa este *há*?) um número real que lhe corresponde. Se pergunto:

— Mas que número real? — designar-mo-ão pelo próprio par de secções contíguas: número real e par de secções contíguas ficam assim identificados.

Se se pretende desviar a questão, nomeando o número real por intermédio de uma certa dízima, dizendo-se que o número real a que nos referimos é aquele que certa dízima representa, notar-se-à que o algoritmo que permite encontrar para um certo número real a dízima correspondente, não parte do «conceito de quantidade que ele é» mas das próprias secções contíguas. O ciclo fecha-se de novo; na verdade dele se não pode sair e uma exposição desta natureza toma forçosamente aspetos de circulo vicioso.

Temos de apontar um outro exemplo de descuido do autor ao definir-nos novos conceitos: «*O número real* a *que corresponde ao par de secções contíguas* A1 *e* A_2 *é como que o fecho comum de* A_1 *e* A_2*: introduzido em A ficaria sendo o maior elemento; em A o menor*». Quem seguir a exposição do Professor Vicente Gonçalves, terá de recorrer a este período para ver nele a definição do que o autor continuará chamando *fecho de uma secção.* É claro que é inadmissível dizer-se «como que» numa definição. Mas infelizmente há aqui muito peor e quase inacreditável! Refiro-me aquela operação (!) de *introduzir* um número numa secção, que é um conjunto de elementos de que o tal número não faz parte!! O Professor Vicente Gonçalves, inexorável examinador que é, não admitiria nunca a um aluno seu uma sombra do atrevimento de linguagem que neste passo a si mesmo permitiu. Na realidade julgo que o rigor e o cuidado em não deixar ideias confusas aos leitores, (que pela primeira vez contactam, através da sua obra, com as matemáticas superiores) exigiria termos análogos aos seguintes:

«Consideremos duas secções A_1 e A_2 e o número real a que elas representam; «ao conjunto formado pela união do conjunto A_1 e do conjunto cujo único elemento é o número a ordenemo-lo de acordo com as relações de ordem dos números racionais e com as convenções de ordenação adoptadas na própria definição de número real: a é o último elemento desse conjunto união. Procedendo de simétrica forma para com A_2 e a, chega-se a um outro conjunto de que é a o primeiro elemento.»

São afinal estas circunstâncias — o de ser primeiro elemento num conjunto e último no outro — que levam o Professor Vicente Gonçalves a considerar *a como que um fecho comum* de A_1 e A_2. Não seriam antes as de ele ser o supremo de A_1 e o infimo de A_2 ou o limite comum desses dois conjuntos que valeria a pena salientar? Além de que a expressão *fecho de um conjunto* possui, na literatura matemática nacional, um significado consagrado por diversos e valiosos trabalhos originais de António Monteiro, Hugo Ribeiro e Pereira Gomes. O Professor Vicente Gonçalves sabe que esse é o significado da palavra *fecho* na maioria das publicações e colóquios dos Centros de Estudos Matemáticos de Lisboa e Porto e nos Cadernos de Análise geral da Junta de Investigação Matemática. É um facto e, quer se aceite quer não, é um facto consumado. Respeitá-lo é respeitar a insistência do labor de um grupo de matemáticos que periòdicamente e em circunstâncias ou pouco favoráveis ou nìtidamente adversas lembram ao estrangeiro que existe em Portugal actividade científica criadora.

Ora em relação a esse significado, tanto o conjunto A_1 como o conjunto A_2, (subconjuntos do espaço R dos números racionais, com a sua topologia habitual, à base da métrica universalmente adoptada) são já conjuntos fechados. Não há nada a *introduzir-se-lhes* para os fechar!! Mergulhados no conjunto dos números reais (em absoluto rigor, por isomorfismo), então o que o Professor Vicente Gonçalves pretende que seja o fecho comum de A_1 e A_2 é apenas a intersecção dos respectivos fechos.

Acima fizemos notar como a intuição da recta estava por trás de todas as considerações feitas pelo Professor Vicente Gonçalves a propósito dos números racionais e dos números reais. E salientamos, estranhando-o, que nunca a ela se referisse no propósito de tornar admissíveis as definições adoptadas. Vamos ver como este silêncio é coroado com a demonstração de um teorema, que, sem o menor comentário, o Professor Vicente Gonçalves insere nas páginas 14 e 15: «Cada número real e positivo a é a medida de um segmento OA de Ox». É a seguinte a prova feita pelo autor: «Marque-se sobre Ox o segmento OM_1 de comprimento a_1 (número racional da secção inferior de a) e os segmentos OM_2 de comprimento a_2 (número racional da secção superior). As colecções de segmentos OM_1 e OM_2 satisfazem às condições seguintes: todo OM_1 é parte de OM_2 e há segmentos de diferença arbitràriamente pequena. Nestas condições o postulado de Cantor-Dedekind afirma que um e só um segmento extrema as duas colecções». É esta a demonstração. Nem uma palavra de esclarecimento mais; nem um comentário. Nós é que não podemos deixar de o fazer. Deixemos de lado o pecado (tão iepetidamente praticado através de todo o livro) de, ainda em passo tão delicado, em redacção tão elíptica, nos arremessar com uma nova (nova no texto) palavra, sem que nos tenha explicado o seu significado matemático: *extrema*. Insistamos ante em reprovar que o autor tenha desenvolvido toda uma pretensa justificação da necessidade dos números irracionais, feitas, em última análise, à luz do postulado de Dedekind (de Cantor-Dedekind) sem que uma única vez a ele aludisse e sem portanto beneficiar de todo o seu poder sugestivo para nos fazer admitir a noção abstracta de secções contíguas. Assim ao invocar sùbitamente — como se se tratasse de coisa com que os leitores estivessem familiarizados — esse axioma, com um enunciado particularizado à estrutura da recta — conjunto ordenado de pontos — afim de estabelecer o enlace entre o contínuo da análise e o da geometria, deixando na sombra a íntima conexão do desenvolvimento dessas noções na história da matemática, desvia-se o leitor, (ou não se lhe dá conta) do facto essencial da teoria: são os cortes que caracterizam a continuidade da recta; são eles que convenientemente traduzidos numa linguagem de números nos revelam a descontinuidade do conjunto dos números racionais.

Independentemente desta restrição deve ainda observar-se que não decorre directamente do axioma de Dedekind a conclusão que interessa à demonstração do teorema. O enunciado desse axioma (enunciado que o Professor Vicente Gonçalves não dá e em relação ao qual não faz a mínima citação bibliográfica!!) podia redigir-se em termos de secções contíguas de pontos da recta, ordenados pela relação «estar à esquerda de»: *Todo par de secções contíguas de pontos da recta é separado por um único ponto da recta.*

Ora para chegar deste enunciado ao resultado necessário ao Professor Vicente Gonçalves era indispensável fazer notar que, se pela escolha de uma origem e de uma unidade, destacarmos na recta um subconjunto com o tipo de ordenação do conjunto dos números racionais, todo par de secções contíguas neste subconjunto da recta corresponde biunivocamente a um par de secções contíguas na própria recta. Não tendo dado o enunciado do axioma de Dedekind, e não tendo feito esta observação, o Professor Vicente Gonçalves não habilita os seus leitores a esclarecerem, com o texto que lhes fornece, as legítimas dúvidas que necessàriamente hão-de surgir nos seus espíritos.

É hábito em Portugal acusar toda a crítica de destrutiva, esquecendo-se que épocas há em que, infelizmente, a destruição é a única forma deixada aos homens para construir. Por boa sorte não é este o caso, pois que é possível esboçar em rápidos traços, e ao nível do que se conhece hoje sobre o assunto, uma exposição que dos números racionais conduza aos números reais. Entre várias maneiras de o fazer duas apontarei essencialmente distintas. Uma delas partirá dos pares de secções contíguas: é aquela que, uma vez que se situou aproximadamente dentro do campo das caracterizações ordinais, deveria ter seguido coerentemente o Professor Vicente Gonçalves, autor do «Curso de álgebra superior». A outra, que me parece exercício de maior interesse, do ponto de vista dos métodos do cálculo infinitesimal, dar-me-á a oportunidade de enfrentar directamente a dificuldade que originou a Dedekind as considerações que o levaram a ocupar-se e a resolver este secular problema da matemática; o objectivo imediato è construir um conjunto — um espaço dotado da noção do limite e onde se demonstre que todas as sucessões limitadas e monótonas são convergentes. Este era o caminho que esperávamos ver seguir ao matemático Vicente Gonçalves, de méritos bem justamente firmados no domínio da análise.

Porto, 31 de Dezembro de 1949. *(Continua)*

A lei de Hauber demonstrada pela Álgebra de Boole

por *Maria Teodora Alves*

A lei de Hauber ou lei dos conjuntos fechados [1] pode considerar-se um teorema sobre teoremas cujo enunciado é o seguinte:

«Se num teorema estabelecermos todas as hipóteses possíveis e elas conduzirem a teses distintas e cada uma excluindo todas as outras, os teoremas recíprocos deduzidos do teorema considerado são todos verdadeiros».

Vamos apresentar uma demonstração da lei de Hauber pela Álgebra de Boole.

[1] *Introduction to Logic*, Tarsky.