Quando a estiver em relação com b escreveremos $a \mathcal{R} b$. Também aqui para cada par ordenado de elementos a e b, *ou* a *está em relação com* b, *ou* a *não está em relação com* b.

Esta relação gosa das propriedades:

1). $a \mathcal{R} a$ pois que $|a-a|=0$;

2). Se $a \mathcal{R} b$ então $b \mathcal{R} a$, pois que $|a-b|=|b-a|$;

e não gosa, em geral, da propriedade transitiva, pois que «se $a \mathcal{R} b$ sendo $|a-b|=2$ e $b \mathcal{R} c$ sendo $|b-c|=2$ e além disso $a \neq c$ então a não está em relação com c porque $|a-c|=4>3$».

Este exemplo mostra a independência de $I\,3$.

3.º). Consideremos finalmente o sistema de todos os números primos

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\ldots$$

e entre os elementos do sistema definida a seguinte relação:

«Dois números primos a e b estarão em relação e escreveremos $a\,R\,b$, se e só se a e b forem simultâneamente impares».

Assim dado um par ordenado de elementos a e b, ou a *está em relação com* b ou a *não está em relação com* b.

Esta relação gosa das seguintes propriedades:

1). Se $a\,\mathrm{R}\,b$ então $b\,\mathrm{R}\,a$, pois que se a e b são primos impares b e a são primos impares;

2). Se $a\,\mathrm{R}\,b$ e $b\,\mathrm{R}\,c$ então $a\,\mathrm{R}\,c$, por uma razão análoga à anterior;

e não gosa da propriedade reflexiva em geral, porque

«2 não está em relação com 2».

Fica assim demonstrado que $I\,1$ é independente de $I\,2$ e $I\,3$.

Os três sistemas e as relações aí definidas mostram então que no sistema de axiomas, que tomamos para caracterizar a relação de igualdade, estes são independentes.

Exemplos de sistemas que provam a independência dos Axiomas $P_p\,1 - P_p\,5$, de Peano, podem ver-se em *Formulário Matemático*, 2.º volume, de Peano.

O método dos coeficientes indeterminados

por **Laureano Barros**

1. Os actuais programas do Ensino Liceal incluem alguns assuntos que ou não são tratados ou são muito mal tratados nos livros até há pouco adoptados. Pareceu-nos, portanto, que poderia ter interesse a publicação de um estudo correcto de alguns destes assuntos. E assim, julgamos de particular importância a consideração de certos pontos dos programas de Álgebra (6.º e 7.º anos) onde as ampliações a programas anteriores mais se fizeram sentir.

Nesta ordem de ideias, começaremos por fazer uma referência breve ao método dos coeficientes indeterminados, ou, mais particularmente, aos teoremas em que esse método se fundamenta.

A brevidade desta referência justifica-se pelo facto deste mesmo assunto já ter sido tratado nas páginas da *Gazeta de Matemática*: o n.º 22 publica, efectivamente, um artigo do colaborador J. J. Rodrigues dos Santos, intitulado «Estudo de algumas propriedades dos polinómios inteiros», para o qual chamamos a atenção do leitor. Neste artigo, a par daquelas propriedades elementares dos polinómios que, actualmente, também são referidas nos novos programas, trata-se com particular detalhe do método dos coeficientes indeterminados. Como se justifica então esta nossa nota? É que no teorema-base do método há, naquele artigo, um erro grave de demonstração (Nota 1) Por outro lado, o facto mais recente de em alguns cursos liceais ser repetido esse erro e em alguns outros se usar uma forma ainda mais grosseira para tratar a questão, tudo isto decidiu-nos à publicação desta nota.

Aproveitamos a oportunidade para acrescentar aos exercícios propostos por Rodrigues dos Santos, no já referido n.º 22 da *Gazeta*, alguns outros, igualmente simples, mas que poderão ter algum interesse para os estudantes que pretendem submeter-se ao exame do 3.º ciclo.

2. Como é sabido, um *polinómio de grau* n em x é do tipo $f_n(x)=a_0\,x^n+a_1\,x^{n-1}+a_2\,x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\,x+a_n$, onde $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ são os coeficientes. O valor de um polinómio $f_n(x)$ para $x=\alpha$ representa-se por $f_n(\alpha)$. Diz-se que um α é um *zero* ou *raiz* de $f_n(x)$ quando $f_n(\alpha)=0$.

Um polinómio $f_n(x)$ é *identicamente nulo*, quando é nulo para todos os valores de x; por outras palavras, um polinómio idênticamente nulo é o que admite para zero *qualquer* número real. Escreve-se $f_n(x)\equiv 0$.

Teorema fundamental. *Se* $f_n(x)$ *é identicamente nulo, são nulos todos os seus coeficientes.*

Demonstração. Procederemos por indução completa, mostrando que o teorema se verifica para $f_1(x)$ e, seguidamente, demonstrando que a verificação para $f_{n-1}(x)$ arrasta a verificação para $f_n(x)$ (Nota 2).

Seja $f_1(x)=a_0x+a$, um polinómio do 1.º grau, identicamente nulo, isto é, nulo para todos os valores de x. Será $f_1(0)=0$, logo $a_1=0$ e portanto $f_1(x)=a_0x$. Se fosse $a_0\neq0$, $f_1(x)$ só se anularia para $x=0$ mas como, por hipótese, é nulo para todos os valores de x, será necessàriamente $a_0=0$.

Admitamos agora que, se $f_{n-1}(x)$ é identicamente nulo, todos os seus coeficientes são nulos; e demonstraremos, nesta hipótese, que o mesmo acontece a $f_n(x)$.

Seja então

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

um polinómio de grau n identicamente nulo. Será então $f_n(x)=0$ qualquer que seja x e portanto $f_n(2x)=0$ (Nota 3), também para todos os valores de x. As igualdades

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$a_0 2^n x^n + a_1 2^{n-1} x^{n-1} + a_2 2^{n-2} x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1} 2x + a_n = 0$$

verificam-se, assim, para qualquer x o mesmo acontecendo à igualdade

$$a_1 (2^n - 2^{n-1}) x^{n-1} + a_2 (2^n - 2^{n-2}) x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1} (2^n - 2) x + a_n (2^n - 1) = 0$$

que se obtém das anteriores multiplicando ambos os membros da 1.ª por 2^n e subtraindo-lhe ordenadamente a 2.ª

Nestes termos, o polinómio de grau $n-1$

$$f_{n-1}(x) = a_1 (2^n - 2^{n-1}) x^{n-1} + a_2 (2^n - 2^{n-2}) x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1} (2^n - 2) x + a_n (2^n - 1)$$

é identicamente nulo e, dentro da nossa hipótese, será

$$a_1 (2^n - 2^{n-1}) = 0\,,\ a_2 (2^n - 2^{n-2}) = 0 \cdots a_{n-1}(2^n - 2) = 0$$
$$a_n (2^n - 1) = 0\,,$$

donde

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\,,$$

visto serem não nulos os factores

$$(2^n - 2^{n-1})\,,\ (2^n - 2^{n-2})\,,\ \cdots\ (2^n - 1)\,.$$

Então $f_n(x)$ reduz-se a $f_n(x) = a_0 x^n$ e, se fosse $a_0\neq0$, $f_n(x)$ só se anularia para $x=0$; logo será $a_0=0$.

(A demonstração anterior, bem como alguns dos exercícios a propor, são extraídos do livro *Algèbre et Trigonométrie*, Paris, 1925, por M. Weber).

Em resumo: ficou demonstrado que num polinómio de grau n identicamente nulo são nulos todos os seus coeficientes, admitindo que essa propriedade é verificada para um polinómio de grau $n-1$; como directamente se provou a sua validade para $n=1$, o teorema ficou demonstrado, por indução completa, para todos os valores de n.

Usando o mesmo método seria fácil demonstrar este outro Teorema: *Se um polinómio $f_n(x)$, de grau n. admite mais que n zeros distintos, é identicamente nulo,*

Deixaremos esta demonstração ao cuidado do leitor, o que constituirá um exercício muito simples de aplicação do método de indução completa.

3. Dois polinómios $f_m(x)$ e $f_n(x)$ dizem-se *idênticos* quando têm o mesmo valor para qualquer valor de x. Por outras palavras, dois polinómios são: idênticos quando a sua diferença é um polinómio identicamente nulo. Escreve-se $f_m(x)\equiv f_n(x)$.

Os dois teoremas precedentes permitem agora concluir o seguinte:

Princípio das identidades. *Se $f_m(x)$ e $f_n(x)$ de graus m e n $(m\geqslant n)$ tomam o mesno valor para mais de m valores distintos atribuídos a x, então os dois polinómios são idênticos e os coeficientes dos respectivos termos semelhantes são iguais.*

Deixaremos a demonstração deste teorema ao cuidado do leitor.

O *método dos coeficientes indeterminados* baseia-se, como é sabido, no princípio das identidades e este princípio no teorema fundamental, cuja demonstração foi o objectivo essencial desta nota. O leitor poderá servir-se do já citado artigo do n.º 22 da *Gazeta de Matemática* para se familiarizar com aplicações simples do método e poderá depois fazer algumas das aplicações igualmente simples que a seguir enunciamos.

Alguns exercícios sobre polinómios

— Determine $f(x)$ tal que

$$f(x) - f'(x) \equiv \frac{x^n}{n!}\,.$$

— Determinar um polinómio do 3.º grau $f(x)$ divisível por $x-a$, e cujo resto por $x-1$, $x-2$ e $x-3$ é sempre a. Decomponha em fracção simples (ver n.º 22) a função racional de a que se obtém achando o valor do polinómio obtido para $x=0$. (O denominador da referida função racional admite o zero 1).

— Determinar um polinómio do 5.º grau $f(x)$ tal que $f(x)+10$ seja divisível por $(x+2)^3$ e $f(x)-10$ por $(x-2)^3$.

— Determinar um polinómio divisível pela sua derivada.

— Se m é múltiplo de n, x^m-1 é divisível por x^n-1.

—Mostre que a equação

$$x^3 - 2x^2 + (1 + m - m^2)\,x + m^2 - m = 0$$

admite uma raiz independente de m. Determine essa raiz.

Notas

1. A demonstração a que aludimos, é do teor seguinte:

Se $f_n(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n \equiv 0$, então $f_n(0) = 0$ e portanto $a_n = 0$. Logo $f_n(x) = x(a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1})$. Ora, sendo $f_n(x)$ nulo qualquer que seja x o mesmo deve suceder ao polinómio que figura entre parentesis no 2.º membro da igualdade anterior. Fazendo nesse polinómio $x=0$ vem $a_{n-1}=0$ e assim sucessivamente.

Há um erro manifesto nesta demonstração: na verdade, o facto de $f_n(x)$ ser nulo para todos os valores de x apenas implica que o polinómio entre parentesis seja nulo para todos os valores de $x \neq 0$, pois para $x=0$, mesmo que fosse diferente de zero o polinómio entre parentesis, vinha sempre $f_n(x)=0$.

2. Sobre o princípio de indução completa pode consultar-se a *Aritmética Racional* de J. Silva Paulo e A. Aniceto Monteiro ou a *Aritmética Racional* de J. Vicente Gonçalves.

3. A demonstração fazia-se do mesmo modo substituindo $f_n(2x)$ por $f_n(kx)$, com $k \neq 0$.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS

Como já noticiamos em *Gazeta de Matemática* n.os 37-38, realizar-se-á, de 30 de Agosto a 6 de Setembro deste ano, em Cambridge, Massachussets, U. S. A., um importante congresso de matemáticos. Desde 1936, data do Congresso de Oslo, não tem sido possível efectuar uma grande reunião internacional. A Sociedade Matemática Americana, que projectava já o congresso para 1940, tem desenvolvido grande actividade para garantir o maior êxito possível a esta assembleia internacional.

Além das sete secções a que já anteriormente nos referimos e onde serão apresentados trabalhos pouco extensos com novas contribuições nos vários ramos da Matemática, a Comissão Organizadora decidiu o funcionamento de quatro Colóquios sobre Algebra, Análise, Matemáticas Aplicadas e Topologia. Para melhor dar ideia da natureza e importância destes colóquios transcrevemos, dos prospectos informativos distribuídos pela Sociedade Matemática Americana, os assuntos que particularmente serão aí tratados e discutidos:

Algebra: 1, Groups and universal algebra; 2, Structure theory of rings and algebras; 3, Arithmetic algebra; 4, Algebraic geometry.

Analysis: 1, Algebraic tendencies in analysis; 2, Analysis and geometry in the large; 3, Extremal methods and geometric theory of functions of a complex variable.

Applied Mathematics: 1, Partial differential equations; 2, Statistical mechanics; 3, Random processes in physics and communication.

Topology: 1, Homology and homotopy theory; 2, Fibre bundles and obstructions; 3, Differentiable manifolds; 4, Topological groups.

Estes quatro colóquios serão presididos, respectivamente, pelos Professores A. A. Albert, Marston Morse, John von Neumann e Hassler Whitney.

M. Z.

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE ÁLGEBRA E DE TEORIA DOS NÚMEROS

De 22 de Setembro a 1 de Outubro de 1949 o Centro Nacional de Investigação Científica (C. N. R. S.) organizou em Paris um colóquio internacional dedicado à Álgebra e à Teoria dos Números que reuniu cientistas franceses e estrangeiros especialistas nestas matérias. Para avaliar da importância da reunião apresentamos ao leitor a lista das conferências e os assuntos tratados nos seminários que se realizaram.

Set. 23 — O. Zariski, professor da Universidade de Harvard — Quelques questions concernant la théorie des fonctions holomorphes sur une variété algébrique.

R. Apery, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Rennes — Résultats récents concernant les idéaux de polynômes.

L. Lesieur, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Poitiers — Le transfert de certaines