pelo autor: «Marque-se sobre Ox o segmento OM_1 de comprimento a_1 (número racional da secção inferior de a) e os segmentos OM_2 de comprimento a_2 (número racional da secção superior). As colecções de segmentos OM_1 e OM_2 satisfazem às condições seguintes: todo OM_1 é parte de OM_2 e há segmentos de diferença arbitràriamente pequena. Nestas condições o postulado de Cantor-Dedekind afirma que um e só um segmento extrema as duas colecções». É esta a demonstração. Nem uma palavra de esclarecimento mais; nem um comentário. Nós é que não podemos deixar de o fazer. Deixemos de lado o pecado (tão repetidamente praticado através de todo o livro) de, ainda em passo tão delicado, em redacção tão elíptica, nos arremessar com uma nova (nova no texto) palavra, sem que nos tenha explicado o seu significado matemático: *extrema*. Insistamos ante em reprovar que o autor tenha desenvolvido toda uma pretensa justificação da necessidade dos números irracionais, feitas, em última análise, à luz do postulado de Dedekind (de Cantor-Dedekind) sem que uma única vez a ele aludisse e sem portanto beneficiar de todo o seu poder sugestivo para nos fazer admitir a noção abstracta de secções contíguas. Assim ao invocar sùbitamente — como se se tratasse de coisa com que os leitores estivessem familiarizados — esse axioma, com um enunciado particularizado à estrutura da recta — conjunto ordenado de pontos — afim de estabelecer o enlace entre o contínuo da análise e o da geometria, deixando na sombra a íntima conexão do desenvolvimento dessas noções na história da matemática, desvia-se o leitor, (ou não se lhe dá conta) do facto essencial da teoria: são os cortes que caracterizam a continuidade da recta; são eles que convenientemente traduzidos numa linguagem de números nos revelam a descontinuidade do conjunto dos números racionais.

Independentemente desta restrição deve ainda observar-se que não decorre directamente do axioma de Dedekind a conclusão que interessa à demonstração do teorema. O enunciado desse axioma (enunciado que o Professor Vicente Gonçalves não dá e em relação ao qual não faz a mínima citação bibliográfica!!) podia redigir-se em termos de secções contíguas de pontos da recta, ordenados pela relação «estar à esquerda de»: *Todo par de secções contíguas de pontos da recta é separado por um único ponto da recta.*

Ora para chegar deste enunciado ao resultado necessário ao Professor Vicente Gonçalves era indispensável fazer notar que, se pela escolha de uma origem e de uma unidade, destacarmos na recta um subconjunto com o tipo de ordenação do conjunto dos números racionais, todo par de secções contíguas neste subconjunto da recta corresponde biunivocamente a um par de secções contíguas na própria recta. Não tendo dado o enunciado do axioma de Dedekind, e não tendo feito esta observação, o Professor Vicente Gonçalves não habilita os seus leitores a esclarecerem, com o texto que lhes fornece, as legítimas dúvidas que necessàriamente hão-de surgir nos seus espíritos.

É hábito em Portugal acusar toda a crítica de destrutiva, esquecendo-se que épocas há em que, infelizmente, a destruição é a única forma deixada aos homens para construir. Por boa sorte não é este o caso, pois que é possível esboçar em rápidos traços, e ao nível do que se conhece hoje sobre o assunto, uma exposição que dos números racionais conduza aos números reais. Entre várias maneiras de o fazer duas apontarei essencialmente distintas. Uma delas partirá dos pares de secções contíguas: é aquela que, uma vez que se situou aproximadamente dentro do campo das caracterizações ordinais, deveria ter seguido coerentemente o Professor Vicente Gonçalves, autor do «Curso de álgebra superior». A outra, que me parece exercício de maior interesse, do ponto de vista dos métodos do cálculo infinitesimal, dar-me-á a oportunidade de enfrentar directamente a dificuldade que originou a Dedekind as considerações que o levaram a ocupar-se e a resolver este secular problema da matemática; o objectivo imediato è construir um conjunto — um espaço dotado da noção do limite e onde se demonstre que todas as sucessões limitadas e monótonas são convergentes. Este era o caminho que esperávamos ver seguir ao matemático Vicente Gonçalves, de méritos bem justamente firmados no domínio da análise.

Porto, 31 de Dezembro de 1949. *(Continua)*

A lei de Hauber demonstrada pela Álgebra de Boole

por *Maria Teodora Alves*

A lei de Hauber ou lei dos conjuntos fechados [1] pode considerar-se um teorema sobre teoremas cujo enunciado é o seguinte:

«Se num teorema estabelecermos todas as hipóteses possíveis e elas conduzirem a teses distintas e cada uma excluindo todas as outras, os teoremas recíprocos deduzidos do teorema considerado são todos verdadeiros».

Vamos apresentar uma demonstração da lei de Hauber pela Álgebra de Boole.

[1] *Introduction to Logic*, Tarsky.

Seja dado o conjunto de teoremas

$$(1) \qquad (H_1 \supset T_1) \cup (H_2 \supset T_2) \cup \cdots (H_n \supset T_n)$$

em que se verificam simultâneamente as condições (2) e (3)

$$(2) \qquad H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$$

e

$$(3) \quad \begin{cases} T_1 \supset \sim T_2 & \\ \ldots & T_2 \supset \sim T_3 \\ \ldots & \ldots \\ T_1 \supset \sim T_n & T_2 \supset \sim T_n \cdots T_{n-1} \supset \sim T_n \end{cases}$$

De (3), por definição de $\supset$, vem:

$$(4) \quad \begin{cases} \sim T_1 \cup \sim T_2 & \\ \ldots & \sim T_2 \cup \sim T_3 \\ \ldots & \ldots \\ \sim T_1 \cup \sim T_n & \sim T_2 \cup \sim T_n \cdots \sim T_{n-1} \cup \sim T_n \end{cases}$$

Por adição de (2) e (4), obtemos:

$$(5) \qquad H_1 \cup \cdots \cup H_n \cup \sim T_1 \cup \cdots \cup \sim T_n ;$$

mas por ser

$$\left.\begin{array}{l} \sim T_1 \cup \sim T_1 \cup \cdots = \sim T_1 \\ \sim T_2 \cup \sim T_2 \cup \cdots = \sim T_2 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{idempotente}$$

(5) transforma-se em

$$(6) \qquad H_1 \cup \cdots \cup H_n \cup \sim T_1 \cup \cdots \sim T_n$$

onde cada um dos símbolos $\sim T_1, \cdots, \sim T_n$ figura uma só vez.

Por aplicação das propriedades comutativa e associativa, vem:

$$(\sim T_1 \cup H_1) \cup (\sim T_2 \cup H_2) \cup \cdots (\sim T_n \cup H_n)$$

ou, finalmente, por definição de $\supset$

$$(T_1 \supset H_1) \cup (T_2 \supset H_2) \cup \cdots (T_n \supset H_n) .$$

Esta lei que acabamos de demonstrar pelo recurso à Álgebra de Boole, foi estabelecida por Hauber (1775-1851) antes da criação da Álgebra de Classes por Boole (*An investigation of the laws of thought* foi editada, pela primeira vez, em 1854).

Desde as ciências matemáticas elementares [1] às ciências matemáticas superiores, a lei de Hauber é da mais larga aplicação.

Os tratadistas dos diversos ramos das ciências matemáticas não têm aproveitado convenientemente as simplificações que a lei de Hauber pode introduzir nessas ciências.

J. Carnoy em *Cours de Géométrie Analytique*, Vol. I (Géométrie plane) Cap. II, números, 21, 22 e 23, estuda o lugar geométrico representado em coordenadas cartesianas pela equação

$$Ax + By + C = 0 .$$

Considerando as várias hipóteses acerca dos parâmetros conclui, depois disso, que aquela equação representa, em todos os casos, uma recta.

No número seguinte do mesmo Capítulo demonstra o teorema recíproco pela consideração das diversas posições que uma recta pode tomar relativamente ao sistema de eixos coordenados.

Ora, o conhecimento da lei de Hauber torna inútil esta demonstração do teorema recíproco, o que é de grande economia por quanto na referida demonstração há que considerar as várias posições que uma recta pode tomar relativamente ao sistema de eixos e, para cada uma dessas posições, demonstrar que a recta considerada é representada por uma equação do 1.º grau.

Este mesmo autor no volume II (*Géométrie de l'espace)*, Capítulo III, n.º 41, demonstra que, em coordenadas cartesianas, a equação

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

representa um plano cuja posição relativamente aos eixos coordenados depende dos parâmetros e no número seguinte do mesmo capítulo, demonstra o teorema recíproco considerando as várias posições que um plano pode tomar relativamente aos planos coordenados.

Como já dissemos, o conhecimento da lei de Hauber permite dispensar essa demonstração.

As considerações que acabam de ser feitas podem também ser aplicadas ao *Cours de Mathématiques spéciales*, de H. Commissaire e G. Cagnac, 3.ª edição de 1947, Vol. I, pág. 274 e seguintes, para citar um tratado mais recente do que o de J. Carnoy.

Com outros tratadistas e também com outros ramos das ciências matemáticas este facto poderia ser ilustrado.

O estudo das leis da Lógica Racional pelos processos clássicos é moroso e difícil e os tratadistas das ciências matemáticas para subtrairem os seus leitores às dificuldades e morosidades desse estudo evitam recorrer a essas leis. Mas a Álgebra de Boole permite, com uma das suas numerosas aplicações, fazer o estudo das leis da Lógica Racional com facilidade, economia e elegância, e, portanto, tornar acessível, a quem se dedica ao estudo da Matemática, aquelas leis.

É certo também que só modernamente a Álgebra de Boole tem avultado em importância e começou a ser conhecida.

No notável compêndio de *Aritmética Racional* da autoria dos Srs. Drs. A. Monteiro e J. Paulo são apre-

---

(1) Veja-se o *Compêndio de Geometria para o 7.º ano* pelos Drs. A. Nicodemos e J. Calado.

sentadas as primeiras noções da Álgebra de Classes e a esse respeito dizem aqueles ilustres autores «... mas poucas pessoas sabem que existe uma Álgebra de Colecções (Álgebra de Boole), que é um instrumento de cálculo muito útil. Não é caso para admirar visto que a sua importância na Matemática só foi posta em evidência muito recentemente».

A Álgebra de Boole é, com efeito, um instrumento da maior utilidade não só no estudo da Lógica Racional como também em todos os ramos da Matemática.

Em *A survey of Modern Algebra*, a página 326, Birkhoff diz: «The most fundamental laws of Boolean Algebra on the reflexive, anti-symmetric, and transitive laws of inclusion. They evidently hold in any sistem for the subsets distinguished by some given property. Thus they hold for the subgroups (or the normal subgroup!) of any group, the subfields of any field, the subspaces of any linear space, and so on — even thought these do not form Boolean algebras».

É dificilmente justificável que os alunos de Matemática no 1.º ano das escolas superiores portuguesas não sejam iniciados no estudo da Álgebra de Classes com aplicação ao estabelecimento das leis gerais da Lógica Racional.

A correlação, entendimento e segurança que os alunos adquiririam no raciocínio, por um lado, e, por outro, a educação do espírito crítico, a economia do pensamento e clareza de ideias, só teriam, com isso, a ganhar.

Sobre arcos duma cónica cujos comprimentos têm um cociente constante

por **Duarte Leite**

É sabido que qualquer arco duma cónica não é rectificável: assim o comprimento dum arco de parábola depende duma função logarítmica, e de transcendentes elípticas o duma cónica centrada. Todavia é susceptível de expressão algébrica a diferença de comprimento de inúmeros arcos de uma cónica, e alem disto há uma infinidade de arcos seus rectificáveis. Indico os principais teoremas conhecidos na matéria.

Dadas duas elipses confocais, se por um ponto T da exterior forem tiradas as tangentes TP e TQ à interior, delimitando o arco PQ, demonstrou o Dr. Graves ser constante a diferença $(TP+TQ)-PQ$. Daqui advém que, tirando doutro ponto T' da elipse exterior as tangentes $T'P'$ e $T'Q'$ à interior, delimitando o arco $P'Q'$, será rectificável a diferença $PQ-P'Q'$, por igualar a diferença $(TP+TQ)-(T'P'+T'Q')$; e portanto também o será a diferença $PP'-QQ'$. Este teorema foi generalizado a duas curvas tais que a tangente em qualquer ponto da exterior faz ângulos iguais com duas tangentes tiradas à outra por esse ponto [1]. Como esta propriedade é comum a duas cónicas centradas confocais, o teorema é extensivo a duas hipérboles ou a uma elipse com uma hipérbole, contanto que satisfaçam a essa condição.

Demonstrou Mac Cullagh que, tirando do ponto T duma hipérbole as tangentes TP e TQ a uma elipse dos mesmos focos que a intersecta no ponto M, a diferença de comprimentos dos arcos PM e QM igualará a das tangentes TP e TQ [1]. Reciprocamente, se dum ponto R duma elipse forem tiradas as tangentes RS e RS' a uma hipérbole confocal, por ela intersectada no ponto M, será a diferença $SM-S'M$ igual a $RS-RS'$.

Dizem-se associados dois pontos P e Q, situados num quadrante de elipse, quando as normais neles à curva equidistam da seu centro. Considerando outro par de pontos associados P' e Q', e designando por D e D' as distâncias do centro às normais em P ou Q, e em P' ou Q', demonstra-se que a diferença dos arcos PQ e $P'Q'$, iguala a diferença das distâncias D e D' [2]. Se P' for um vértice A da elipse, o seu associado Q' será o outro vértice B no quadrante, e a diferença dos arcos AP e BQ igualará a distância comum D do centro às normais em P ou Q. Tal é o teorema de Fagnano.

Combinando-o com o do Dr. Graves deduziu Rodolfo Guimarães que há inúmeros arcos elípticos rectificáveis, para o que basta haver entre as coordenadas rectangulares dos seus extremos certa equação do 5.º grau [3]. Tirem-se efectivamente pelo ponto P e pelo vértice A duma elipse E as tangentes, que se cruzam no ponto T e por este se trace outra elipse

(1) G. Salmon, *Traité de géomètrie analytique* (*Sections coniques*), págs. 526-27 da ed. de 1870.

(1) *Op. cit.*, pág. 527.

(2) M. F. Frenet, *Recueil d'exercices de calcul infinitésimal*, págs. 372-74 da ed. de 1866.

(3) *Jornal de ciências matemáticas e astronómicas*, vol. 7.º e *Semelhança e rectificação de arcos elípticos* (1877).