França promoveu no dia 6 de Novembro uma sessão que teve lugar no Grande Anfiteatro do Instituto de Oceanografia da Universidade de Paris, presidida pelo Prof. André Danjon, director do Observatório Astronómico de Paris e presidente da Sociedade. Nessa sessão foram analisadas a notável obra e as variadas contribuições de Laplace para o progresso do conhecimento humano. O Prof. E. Bauer tratou de «Laplace e a Física», o Prof. G. Darmois de «Laplace, probabilista e estatístico» e o Prof. Lemaître, de Louvain, de «Laplace e a Mecânica Celeste».

M. Z.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Algebra Superior — 1.º exame de frequência — 1948-49.

2898 — Calcular o limite da sucessão cujo termo geral é $\sqrt{n(n+a)}-n$.

2899 — Calcular arctg $(n+1)$ – arctg n e, de acordo com o resultado, estudar a convergência e calcular a soma da série $\sum_{1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+(n+1)n}$.

2900 — *a*) Calcular a derivada da função

$$y=\operatorname{arctg}[(a \operatorname{sen} x+b \cos x)/(a \operatorname{sen} x-b \cos x)]$$

b) Mostrar que a função $y=(a+bx)e^{-x^2}$ verifica a equação $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0$.

2901 — Determinar os extremos da função

$$y=(1+x-x^2)e^x.$$

2902 — Calcular o lim $(\operatorname{tag} x/x)^{1/x^2}$, quando $x \to 0$.

2903 — Provar que se $a_n (n=1,2,\cdots)$ são positivos e se para todos os valores de n se verifica $a_{n+1} \leqslant k a_n$ com $0<k<1$, então é $\lim a_n=0$ $(n \to \infty)$.

F. C. C. — Algebra Superior — 2.º exame de frequência de 1948-49.

2904 — Primitivar $1/(2^x+2^{-x})+x^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$

2905 — Mostrar que as rectas da equação $(2-3\lambda)x-(3+\lambda)y+5+\lambda=0$ (λ arbitrário) passam todas pelo mesmo ponto e determinar as coordenadas desse ponto.

2906 — Qual a condição para que tres rectas não paralelas de equação $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $a''x+b''y+c''=0$ concorram no mesmo ponto? Justificar.

2907 — Calcular o valor do determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k_2 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

2908 — Quando o afixo de z descrever uma circunferência de centro na origem e raio 2, qual é o lugar geométrico descrito por $z_1=8z^{-4}/3$?

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência, 1948-1949.

2909 — Calcule a derivada de $f(x)=\frac{a \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \pi^{x^2}}{x+b}$. Determine a e b de modo que a recta $r \equiv y=x+1$ seja tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $P(0,1)$. Determine sobre a recta $x=1$ o centro da circunferência tangente à recta r em ponto cuja distância a P seja $=\sqrt{2}$. R:

$$f'(x)=a(x+b)^{-1} \cdot 2x\pi^{x^2} \log \pi \left(1+\pi^{2x^2}\right)^{-1}- \\ -a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \pi^{x^2} \cdot (x+b)^{-2}.$$

Fazendo $x=0$, $f(0)=1$, *na expressão de* $f(x)$, *vem* $1=a\pi(4b)^{-1}$. *Para que* r *seja tangente à curva em* P, *deve ter-se* $f'(0)=1$ *(o coeficiente angular de* r *é* 1) *e portanto, fazendo* $x=0$ *e* $f'(0)=1$, *na expressão de* $f'(x)$, *virá:* $1=-a\pi(4b^2)^{-1}$, *donde, atendendo à relação precedente:* $b=-1$, $a=-4/\pi$. *Sobre* r *há dois pontos cuja distância a* P *é* $\sqrt{2}$: *um é o ponto* $(1,2)$, *intersecção de* r *com a recta* $x=1$; *o outro é* $(-1,0)$.

Para ter o centro da circunferência tangente em $(-1,0)$, *basta conduzir por* $(-1,0)$ *uma perpendicular a* r *e determinar a intersecção da recta* $y=-x-1$ *assim obtida com a recta* $x=1$: *o centro será então o ponto* $(1,-2)$.

2910 — Mostre que a função

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{para } x \text{ irracional}\\ (x-1)^2-2 & \text{para } x \text{ racional}\end{cases}$$

é contínua para $x=2$ e discontínna para $x=1$. Ache neste ponto a sua oscilação. Em que se modificariam as conclusões permutando-se as condições definidoras da função? R: *Tem-se* $f(2)=-1$; *por outro lado, o limite de* $f(x)$ *quando* $x\to 2$ *é também* -1, *quando* x *assume só valores racionais ou só valores irracionais, tendo-se portanto* $\lim_{x\to 2} f(x)=-1$ *sobre todo o domínio de* $f(x)$: *a função é pois contínua para* $x=2$. *Por outro lado,* $\overline{f}(1)=0$, $\underline{f}(1)=-2$: *a oscilação de* $f(x)$ *no ponto* $x=1$ *será portanto* $\omega=0-(-2)=2$. *Permutando-se as condições definidoras, em nada se modificariam as conclusões.*

2911 — Defina série convergente e justifique a condição necessária e suficiente de convergência. Considere $\sum u_n$ transformada em $\sum v_n$ pelo facto de cada termo u_n ter sido transferido para lugar de índice $\varphi(n)$ (univalente); supondo limitada a diferença $|\varphi(n)-n|$, prove que as duas séries são da mesma natureza e, se convergentes, de igual soma. Enuncie as regras da convergência e divergência que se aplicam a uma série em que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p_0\,n^h+p_1\,n^{h-1}+\cdots}{q_0\,n^h+q_1\,n^{h-1}+\cdots},\ p_0,q_0>0\,.$$

Resolução da 2.ª parte: *Designemos por* ν *um limite excedente de* $|\varphi(n)-n|$ *e ponhamos* $s_n=u_1+\cdots+u_n$, $s'_n=v_1+\cdots+v_n$. *Ter-se-á então* $s'_n=s_n+\sum u_{n+i}-\sum u_{n-i}$, *em que os somatórios se estendem a valores de* i *inferiores a* ν. *Ora, se para* $n\to\infty$ *(com* i *constante), vem* $u_{n+i}\to 0$, $u_{n-i}\to 0$, *será também* $\sum u_{n+i}\to 0$, $\sum u_{n-i}\to 0$, *quando* $n\to\infty$, *visto que cada somatório não tem mais de* ν *termos, qualquer que seja* n. *Logo, se existe* $\lim s_n$, *será por força* $\lim s'_n=\lim s_n$, *e vice-versa, se existe* $\lim s'_n$, *será* $\lim s_n=\lim s'_n$.

2912 — Defina função inversa, e descreva e justifique a relação que liga as respectivas derivadas. Seja $y=f(x)$ invertível em (a,b), $x=\varphi(y)$ a função inversa. Sopondo $f(x)$ contínua e $f(a)<f(b)$, prove que $f(x)$ é crescente e $\varphi(y)$ contínua.

2913 — Supondo que $f(x)$, contínua em (a,b), tem aí uma infinidade de zeros, prove que dois destes compreendem todos os outros. R: *Designe* Z *o conjunto dos zeros de* $f(x)$ *e sejam* Λ,λ *os limites superior e inferior de* Z. *Por ser* $f(x)$ *contínua,* Z *é fechado e portanto* λ,Λ *pertencem necessàriamente a* Z, *isto é, são zeros de* $f(x)$, *entre os quais ficam pois compreendidos todos os outros.*

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de frequência, 1948-49.**

2914 — Calcule a derivada de

$$f(x)=\frac{1}{2n}(x^2-2x+2)^2\log\frac{nx+2}{nx}\quad\text{no ponto } x=1$$

e prove a convergência da série de termo geral $u_n=(-1)^n f'(1)$. Com quantos termos se tem a soma da série a menos de 1/10? R: *Atendendo a que a derivada de* $(x^2-2x+2)^2$ *se anula para* $x=1$, *virá*

$$f'(1)=\left[\frac{1}{2n}(x^2-2x+2)^2\frac{nx}{nx+2}\cdot\frac{-2n}{n^2x^2}\right]_{x=1}=$$
$$=-\frac{1}{n(n+2)}\,.$$

A série de termo geral $(-1)^n f'(1)$ *é alternada; a sua convergência é pois garantida pelo facto de* $1/[n(n+2)]$ *ser decrescente e tender para zero. O erro cometido será, neste caso, sempre inferior ao módulo do primeiro termo despresado; bastará por isso tomar os dois primeiros termos* $(1/3,-1/8)$, *visto que o terceiro é igual a* $1/5<1/10$.

2915 — Escreva a equação geral das circunferências de centro em $C(-1,0)$ e determine aquela que é tangente à recta $x-y-3=0$. Ache a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta e da circunferência. R: *Equação geral:* $(x+1)^2+y^2=r^2$. *A circunferência de centro* C *e tangente à recta dada tem o raio igual à distância* δ *de* C *a essa recta:* $\delta=|(-1-3)/\sqrt{1+1}|=2\sqrt{2}$; *a equação da circunferência será pois* $(x+1)^2+y^2=8$. *Seja agora* $P(\overline{x},\overline{y})$ *um ponto genérico do lugar geométrico em questão. Distância de* P *à recta:* $|(\overline{x}-\overline{y}-3)/\sqrt{2}|$. *Distância de* P *à circunferência:* $\left|\sqrt{(\overline{x}+1)^2+\overline{y}^2}-\sqrt{8}\right|$. *Equação do lugar:* $\overline{x}-\overline{y}-3=\sqrt{2}\left(\sqrt{(\overline{x}+1)^2+\overline{y}^2}-\sqrt{8}\right)$ *ou* $\overline{x}-\overline{y}-3=\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-\sqrt{(\overline{x}+1)^2+\overline{y}^2}\right)$. *No primeiro caso tem-se a equação* $(\overline{x}+\overline{y}+1)^2=0$, *equivalente (àparte a multiplicidade) à equação* $\overline{x}+\overline{y}+1=0$, *representativa duma recta; mas desta apenas pertence ao lugar o segmento compreendido entre* C *e a recta dada. No segundo caso tem-se uma parábola, toda pertencente ao lugar.*

2916 — Prove que a função $f(x)$, contínua em (a,b), assume neste intervalo qualquer valor entre

$f(a)$ e $f(b)$. Examine a marcha da função na hipótese de esta ser univalente e satisfazer à condição $f(a) < f(b)$.

2917 — $g(x)$ é função contínua em (a, b), intervalo onde cada ponto intermédio c é limite inferior dos pontos d que fazem $g(d) > g(c)$. Prove que $g(x)$ é incessantemente crescente. R: *Suponhamos que existem dois pontos interiores* c_1, c_2, *tais que* $c_1 < c_2$, $g(c_1) > g(c_2)$, *e seja* c_3 *o limite superior dos pontos* ξ *de* (c_1, c_2) *que fazem* $g(\xi) > g(c_1)$. *É claro que* $c_3 < c_2$, *de contrário, em cada vizinhança de* c_2, *haveria pontos* ξ *tais que* $g(\xi) - g(c_2) > \delta$, *sendo* $\delta = g(c_1) - g(c_2)$, *o que é contra a hipótese da continuidade. Mas, por outro lado, em virtude da 2.ª parte da hipótese, haveria pelo menos um ponto* d_1 *tal que* $c_3 < d_1 < c_2$, $g(d_1) > g(c_3)$, *o que é contrário ao que supusemos a respeito de* c_3. *Quer isto dizer que, sendo* $c_1 < c_2$, *não pode ser* $g(c_1) > g(c_2)$. *Anàlogamente se conclue que, sendo* $c_1 < c_2$, *não pode ser* $g(c_1) = g(c_2)$. *Segue-se portanto que a desigualdade* $c_1 < c_2$ *implica* $g(c_1) < g(c_2)$, *q. e. d.*

2918 — Aproveitando os coeficientes, forme um limite excedente para o valor absoluto do polinómio $f(x) = 2 - 4x + x^2 + x^4$ no intervalo $(-1, 1)$ e, tendo em vista o teorema dos acréscimos finitos, decomponha esse intervalo em partes $(x_i, x_i + h)$, nas quais a oscilação de $f(x)$ seja sempre inferior a 0,1. R: $|f(x)| \leqslant 2 + 4|x| + |x|^2 + |x|^4 \leqslant 2 + 4 + 1 + 1 = 8$; $f(x_i + h) - f(x_i) = h f'(x_i + \theta h)$; $|f'(x)| \leqslant 4 + 2 + 4 = 10$; $h f'(x_i + \theta h) \leqslant 10h$; *basta pois que se tenha* $10h \leqslant 0{,}1$, *isto é,* $h \leqslant 0{,}01$.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência, 1948-1949.

2919 — Focos, directrizes e excentricidade da elipse de equação $3(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2$.

2920 — Deduza e discuta a condição necessária e suficiente para que a curva $y = f(x)$ seja convexa no ponto de abscissa c. Examine a hipótese de $f'(x)$ ser máxima ou mínima para $x = c$.

2921 — Enuncie e demonstre o teorema de Rolle, para uma função que só admita zeros de multiplicidade inteira. Descreva o uso do teorema na separação das raíses.

2922 — Demonstre que a identidade de Euler é característica das funções homogéneas diferenciáveis.

2923 — $f(x, y)$ é uma função contínua em certa região circular e em nenhum ponto interior $[f(x, y)]^2$ admite valor mínimo. Deduza daí que: $1/f(x, y)$ é contínua e de sinal fixo em todos os pontos interiores. R: *Como* $[f(x, y)]^2$ *é não negativa, não se pode anular em nenhum ponto interior, de contrário admitiria aí um mínimo; o mesmo acontece portanto com* $f(x, y)$; *então* $1/f(x, y)$, *como inversa duma função contínua que não se anula, será também contínua e não pode mudar de sinal na região circular, porque isso obrigaria a um anulamento no interior.*

2924 — Deduza a equação da hipérbole a partir da definição geral de cónica.

Soluções dos n.os 2909-2923 de J. Sebastião e Silva

F. C. P. — Álgebra Superior — 1.º exercício de revisão.

2925 — *Sendo* θ *uma raiz cúbica imaginária de* 1 *verificar que*: $(a+b)(a+b\theta)(a+b\theta^2) = a^3 + b^3$.

R: Visto que $1 + \theta + \theta^2 = \dfrac{1-\theta^3}{1-\theta} = \dfrac{0}{1-\theta} = 0$, $(1 \neq \theta)$, efectuando o cálculo do 1.º membro, imediatamente se obtém o segundo.

2926 — a) *Definir por meio de cisões, os números reais* $\dfrac{7}{3}, \sqrt[5]{6}, -\sqrt{2}$.

R: Por ex., $\sqrt[5]{6}$ é definido pelo cisão do conjunto dos números racionais em duas classes A e B, sendo A constituída pelos números cuja potência quinta é menor que 6, e B pelos números cuja potência quinta excede 6.

b) *Definindo desigualdade de 2 números reais:* $A = (A'/A'')$ *e* $B = (B'/B'')$, $A > B$, *do modo seguinte:* «A *diz-se maior que* B *quando algum elemento da classe inferior de* A *fôr elemento da classe superior de* B, *mostrar que* $A = B$ *se* $A' \subseteq B'$, *e* $A'' \subseteq B''$».

Nota: *admite-se que o conjunto dos números reais é ordenado.*

R: Suponhamos que $A \neq B$; então, ou $A > B$, ou $B > A$. Se, por ex., fôr $A > B$, algum elemento de A' pertence a B'': isso é absurdo, porque então tal elemento era comum a B' e B''.

2927 — *Quais os valores de* x *que anulam o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ x^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} ?$$

R: Evidentemente, $x = 2, 3, 4$ anulam o determinante; e não há mais valores, visto que $D = 0$ é uma equação do 3.º grau em x, como se vê desenvolvendo D segundo a 1.ª coluna.

2928 — *Verificar se são linearmente independentes as três equações seguintes:*

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

R: Seguindo a definição, consideremos a identidade:

$$k_1(x-y+z)+k_2(x+y-z)+k_3(x-y-z)\equiv 0,$$

isto é, vemos se o sistema:

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ -k_1+k_2-k_3=0 \\ k_1-k_2-k_3=0 \end{cases}$$

tem soluções não nulas.

F. C. L. — Complementos de Algebra — **Exame final de 1948, 2.ª época, 2.ª chamada.**

2929 — Quando se diz que um polinómio $f(z)$ é irredutível a respeito dum dado corpo que contenha os seus coeficientes? Quando se diz que um corpo é algèbricamente fechado? Demonstre o teorema fundamental da irredutibilidade e indique algumas suas consequências.

2930 — Defina os conceitos de grupo admissível e de grupo de Galois duma equação a respeito dum dado corpo, justificando as afirmações em que tiver de se apoiar.

Determine os grupos de Galois das equações $x^3-x^2-x-2=0$, $x^3-2=0$ a respeito de Ra e de $Ra(\sqrt{3})$.

2931 — Demonstre que a equação ciclotómica de grau $p-1$, com p primo, é cíclica a respeito de Ra.

2932 — Prove que o grupo de Galois da equação geral de grau n a respeito do corpo gerado pelos coeficientes é o grupo simétrico.

2933 — Definição axiomática de corpo. Seja K o conjunto dos números complexos; atribuindo à palavra «soma» o significado usual e convencionando chamar produto de dois números complexos $a+bi$, $c+di$ ao número $ac+bdi$ (com a, b, c, d reais), verifique se o conjunto K forma ou não um corpo a respeito da multiplicação e da adição assim definidas.

Enunciados dos n.os 2929 a 2923 de J. Sebastião e Silva

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º exame de frequência de 1948-49.**

2934 — Indique como se determinam pontos da intersecção de duas superfícies de revolução, e a tangente à intersecção num desses pontos, no caso de os eixos serem concorrentes.

2935 — Em projecções cotadas: Sejam r, s duas rectas oblíquas não complanares, definidas pelas suas projecções graduadas, e designe α o plano que passa por r e é paralelo a s; determine uma escala de declive de α e o ângulo de α com ν_0.

2936 — Um hiperbolóide de revolução $[\rho]$ é definido pelo eixo (vertical) e por uma geratriz rectilínea g. Determine: *a*) a gola e o traço horizontal de $[\rho]$; *b*) o ponto em que é tangente a $[\rho]$ o plano que passa por g e é paralelo a uma recta dada.

2937 — Dados um elipsóide de revolução $[\varepsilon]$ de eixo vertical, um plano oblíquo α e uma vertical v que não corte $[\varepsilon]$, fazer rodar α em torno de v, até ficar tangente a $[\varepsilon]$. R: *Determine-se o ponto* $P\equiv\alpha\cdot v$. *Quando* α *roda em torno de* v, *a linha de maior declive de* α *que passa por* P *gera um cone* $[\gamma]$ *envolvente das posições de* α; *o problema reduz-se pois a determinar um plano* θ *tangente ao mesmo tempo a* $[\varepsilon]$ *e a* $[\gamma]$, *para o que basta circunscrever a* $[\varepsilon]$ *um cone* $[\gamma_1]$ *de eixo vertical e de abertura igual à de* $[\gamma]$: *um plano que passe por* P *e seja tangente a* $[\gamma_1]$ *fornece uma solução para o problema.*

2938 — Dados dois segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ iguais e não complanares, prove que AB e A_1B_1 formam ângulos iguais com qualquer plano paralelo a AA_1 e BB_1. Posto isto, determine o eixo da rotação que permite levar o segmento $\overline{AB}$ a coincidir com o segmento $\overline{A_1B_1}$. R: *Consideremos os planos* α, β *tais que* $\alpha // \beta$, $AA_1 \cdots \alpha$, $BB_1 \cdots \beta$; *designando por* B', B'_1, *respectivamente, as projecções ortogonais de* B, B_1 *sobre* α, *os triângulos rectângulos* $[ABB']$, $[A_1B_1B'_1]$ *serão iguais, por terem iguais os catetos* $\overline{BB'}, \overline{B_1B'_1}$ *e as hipotenusas* $\overline{AB}, \overline{A_1B_1}$: *logo* $B\hat{A}B' = B_1\hat{A}_1B'_1$, q. e. d. *O eixo pedido será a recta perpendicular a* α *que passa pelo ponto de intersecção das mediatrizes de* $\overline{AA_1}$, $\overline{B'B'_1}$.

Enunciados e soluções dos n.os 2934 a 2938 de J. Sebastião e Silva

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de frequência de 1948-49.**

2939 — Primitivar as funções $1/[x(1+x+x^2+x^3)]$ e $1/(4\,\mathrm{sen}^2\,x+9\cos^2 x)$.

2940 — Estabelecer uma fórmula de recorrência para a primitiva da função $y=x^n\cos(ax)$.

2941 — Estudar a série $\sum\left(\dfrac{1}{x^2+n}-\dfrac{1}{n}\right)$.

2942 — Achar os extremos locais da função $u=xe^{-(x^2+y^2)}$.

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência de 1948-49.**

2943 — Determinar o integral geral da equação $(x\sin y-1)\,y'+\cos y=0$. Dentre as curvas integrais escolher a que passa pelo ponto $(-1\,,0)$.

2944 — Determinar o integral geral da equação $y^{IV}+m^4 y=0$ e dentre as curvas integrais escolher aquela que satisfaz às condições seguintes:

$y=0\,,y'=0$ para $x=0$; $y=0\,,y''=0$ para $x=1$.

2945 — Calcular o integral duplo $\iint \frac{dx\,dy}{xy}$ estendido à área interior aos quatro círculos $x^2+y^2=ax$; $x^2+y^2=a'x$; $x^2+y^2=by$; $x^2+y^2=b'y$.

2946 — Calcular o integral triplo

$$\iiint (x^3+y^3+z^3)\,dx\,dy\,dz$$

estendido ao interior da esfera

$$x^2+y^2+z^2-2a\,(x+y+z)+2a^2=0\,.$$

2947 — Determinar um integral completo da equação às derivadas parciais $pq=(x+1)\,(y-1)$.

F. C. P. — Cálculo — **Exame final — 1.º chamada — 1 de Outubro de 1949.**

2948 — Determinar o plano tangente à superfície

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{1+e^z}{4+x^y}+\log\,(x^2+\sqrt{y})+y^x-x=\frac{\pi}{6}+1$$

no ponto $(0\,,1\,,0)$.

2949 — Calcular $\displaystyle\int_0^a \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2950 — Calcular a área da superfície gerada pela rotação da linha $\rho=a\,(1+\cos\theta)$ em torno do eixo polar.

2951 — Integrar a equação

$$y''-4xy'+2\,(2x^2-1)\,y=0$$

sabendo que admite 2 integrais particulares um dos quais é a derivada do outro.

Nota: O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios.

F. C. P. — Cálculo — **Exame final — 2.º chamada — 3 de Outubro de 1949.**

2952 — Determinar a subtangente e a subnormal de linha $(\cos x)^y+\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{y}-1)=1+x$ no ponto $(0,1)$.

2953 — Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{2-x}}$.

2954 — Calcular o volume limitado pela superfície

$$\begin{cases} x^2+y^2+z=10 \\ x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$$

2955 — Determinar $\varphi\,(x)$ de modo que a equação $y''+\varphi\,(x)\,y'+2xy=0$ admita 2 integrais particulares tais que $y_1^2+y_2^2=1$.

Nota: O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios.

I. S. T. — Cálculo — **1.º Exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2956 — Sendo n inteiro, qual a relação que deve existir entre $A\,,B$ e C para que seja algébrico o integral

$$\int \frac{4x^3+(4n+A)\,x+Bn-C}{x^2+n}\,dx$$

2957 — Valores próprios de uma matriz. Mostrar que os valores próprios de uma matriz hermítica são os mesmos da sua conjugada.

2958 — Para que funções o problema das primitivas é resolúvel pela integração de Riemann?

I. S. T. — Cálculo — **2.º exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2959 — Transformação conforme dum plano sobre outro plano por meio de uma função analítica.

Seja dada a função $f(z)=3z+2$.

Mostrar que: *a*) é analítica; *b*) a transformação de uma recta no plano (x,y) é ainda uma recta no plano $(P\,,Q)$; *c*) os ângulos de 2 vectores no plano $(x\,,y)$ são iguais para as transformadas desses vectores no plano $(P\,,Q)$.

2960 — Para que direcção λ é estacionária a derivada direccional $\frac{df}{d\lambda}$ considerada no ponto P.

Aplique os resultados obtidos à função

$$f(x\,,y\,,z)=u=xyz \quad \text{no ponto} \quad P\,(1\,,1\,,1)$$

2961 — A fórmula de Ostrogradski no cálculo de volumes.

I. S. T. — Cálculo — **3.º exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2962 — Em que caso o simples exame do integral completo de uma equação às derivadas parciais nos esclarece logo da existência de integrais singulares? Haverá algo de semelhante na teoria dos integrais das equações diferenciais totais?

2963 — Enuncie uma condição para que duas curvas de uma mesma superfície, tangentes num ponto, tenham nesse ponto a mesma curvatura.

2964 — Características na integração das equações diferenciais parciais lineares e não lineares.
Aplicação à equação de Jacobi.

F. C. C. — Análise Superior — **2.º Exame de frequência de 1948-49**

2965 — Calcular, recorrendo à teoria dos resíduos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+b^2)\,(x^2+a^2)^2}.$$

2966 — Provar que se tem

$$\int_0^{\infty} e^{a\cos bx} \operatorname{sen}(a \operatorname{sen} bx) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(e^a-1) \quad (a>0\,,b>0).$$

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — **1.º exame final — 17 de Outubro de 1949.**

2967 — *Estática*: Um sistema material é constituido por uma barra rectilínea AB de comprimento l, cujo extremo A é fixo sobre Oy a uma distância b de O e por um disco circular D, de raio r e centro C, o qual, devido a um atrito de escorregamento suficiciente só pode rolar sem resvalamento sobre Ox. A barra encosta-se constantemente ao disco.

O disco é homogéneo de peso total p; a barra tem um peso específico proporcional à distância a A (factor de proporcionalidade k).

a) Determinar o centro de inércia da barra.

b) Calcular a força F que deve actuar horizontalmente em C para manter em equilíbrio a configuração para o qual $\alpha = B\hat{A}O$ é dado.

c) Calcular as reações do disco sobre a base e do piso sobre o disco.

2968 — *Cinemática* — Supondo $r=1m$ e $b=(1+\sqrt{3})\,m$ e que o centro C do disco se desloca no sentido dos xx crescentes com aceleração constante $a=2m/s^2$ (sabe-se que para $t=O$ se encontra sem velocidade sobre Oy).

a) escrever a equação horária do movimento de C e calcular as velocidades angulares do disco e da barra em relação a Oxy no instante para o qual é $B\hat{A}O=60°$ e para a mesma configuração.

b) Calcular as componentes da velocidade de M, ponto do disco em contacto com a barra e deduzir delas o valor da velocidade de M.

c) Calcular a velocidade do escorregamento do disco sobre a barra.

d) Calcular a velocidade angular do disco em relação à barra.

2969 — *Dinâmica*: Um ponto material M de peso p é obrigado à parábola ($x^2=2yOy$ vertical).

a) Achar a expressão da velocidade que M deve possuir no vértice da parábola para atingir sem ultrapassar a cota dada y_0.

b) Deduzir a expressão do período das oscilações que M executa nas cendições impostas na alínea anterior.

c) Deduzir a expressão da reacção da curva em função de x e y para uma posição qualquer do ponto móvel.

d) Achar os componentes da força que deveria actuar sobre M além do peso p para que o ponto material M descrevesse a parábola livremente com a aceleração dirigida constantemente para o seu foco.

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2970 — Mostrar que o conceito de função harmónica definido como valor médio é mais geral que a definição clássica, mantendo-se as propriedades. Verificar que a função $W=x^2-y^2+2$ satisfaz à definição generalizada.

2971 — *a*) Comparar os conceitos de tensor e multivector.

b) Definir produto externo e produto escalar de tensores nos espaços tridimensionais.

c) É possível definir estes conceitos nos espaços pluri-dimensionais?

2972 — *a*) Determinar uma condição suficiente para que o trabalho das forças que actuam num sistema material seja independente do sistema de referência.

b) Se se tratar de um sólido, o que é que se passa?

c) Caracterizar o movimento do ponto representativo do sistema material nesse mesmo caso do sólido, num espaço de configuração cuja métrica é definida por $ds^2 = 2T\,dt^2$, sendo T a energia cinética.

I. S. T. — 2.º exame de frequência extraordinário — 1948-49.

2973 — *a*) Forças conservativas.

b) Domínios em que os potenciais Newtonianos e logarítmicos são funções harmónicas.

c) O potencial de uma força que varia na razão inversa do cubo da distância será harmónico, no plano, ou no espaço tridimensional?

2974 — *a*) Funções do Cálculo Absoluto definidas à custa de tensor ε do espaço tridimensional. Comparação dos resultados com o do Cálculo Vectorial ordinário.

b) Como pode definir-se e utilizar-se um tensor ε num espaço a mais de três dimensões?

2975 — *a*) Utilização da teoria dos momentos na Cimática dos sólidos.

b) Analogias entre os movimentos cicloidais e os movimentos giroscópicos.

I. S. T. — 3.º exame de frequência 1948-49.

2976 — *a*) Comparar os conceitos de mínimo utilizados respectivamente por Gauss e Hertz, na determinação de princípios gerais da dínâmica.

b) Pode-se generalizar o Princípio de Hertz no espaço das fases?

2977 — Verificar que no movimento de um sólido com um ponto fixo, se o momento das forças exteriores em relação ao ponto fixo é constantemente perpendicular ao vector velocidade angular, a força viva é constante.

2978 — *a*) Relacionar a homografia fundamental de equilíbrio de um meio contínuo, com o tensor dos esforços.

b) Conceitos de isotropia e de fluido perfeito.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2979 — Dada uma superfície cónica de revolução e um ponto exterior a ela, e ainda um eixo, fazer rodar a superfície cónica em torno do eixo até levá-la a conter o ponto dado. Número de soluções.

2980 — Dados três pontos, A, B e C, não colineares, fazer passar por eles uma superfície cónica de revolução de abertura dada, nos três casos:

a) Os pontos pertencem a uma directriz circular da superfície.

b) Dois dos pontos pertencem a uma geratriz.

c) Os pontos não têm posição particular.

2981 — Dada uma esfera e uma superfície cónica de revolução, determinar um eixo de rotação tal que nos permita, rodando a esfera em torno dele, levar aquela a ocupar duas posições, distintas, em que ela fica inscrita à superfície cónica. Número de soluções.

2982 — Dados três pontos não colineares, A, B, C, e uma superfície cónica de revolução, determinar um eixo de rotação que nos permita levar A, B e C a pertencerem simultâneamente á superfície cónica, devendo A e B ficar a distâncias dadas do vértice da superfície cónica.

Problemas propostos por Daniel Vera-Cruz, aluno da F. E. P.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

79 — DE BROGLIE, Louis — **La Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules.** (Collection de Physique Mathématique) — Gauthier-Villars, Paris, 1950. — (VI+223 pp.) — 1.650 frs.

Este livro — reimpressão sem modificações da 1.ª edição de 1939 — pertence à série de tratados, admiráveis pela clareza e elegância do estilo, em que Louis de Broglie, desde a sua *Introduction à l'Étude de la Mécanique ondulatoire* (1930) até à recente *Mécanique ondulatoire du Photon et Théorie quantique des Champs* (1949), tem exposto didacticamente os diferentes ramos da mecânica ondulatória e suas aplicações, subordinando tudo a um plano geral onde cabem, alem das suas próprias investigações e maneiras de vêr, as principais correntes da física teórica moderna. É pena que este conjunto de livros — o maior e melhor tratado de Mecânica quântica que conhecemos — não tenha tido, fora de França, o acolhimento que merece. Nos países anglo-saxões principalmente — onde a indiferença pela ciência francesa se tem acentuado muito ultimamente — são raramente citados,