

**I. S. T. — 2.º exame de frequência extraordinário — 1948-49.**

**2973** — a) Forças conservativas.

b) Domínios em que os potenciais Newtonianos e logarítmicos são funções harmónicas.

c) O potencial de uma força que varia na razão inversa do cubo da distância será harmónico, no plano, ou no espaço tridimensional?

**2974** — a) Funções do Cálculo Absoluto definidas à custa de tensor  $\epsilon$  do espaço tridimensional. Comparação dos resultados com o do Cálculo Vectorial ordinário.

b) Como pode definir-se e utilizar-se um tensor  $\epsilon$  num espaço a mais de três dimensões?

**2975** — a) Utilização da teoria dos momentos na Cinemática dos sólidos.

b) Analogias entre os movimentos cicloidalis e os movimentos giroscópicos.

**I. S. T. — 3.º exame de frequência 1948-49.**

**2976** — a) Comparar os conceitos de mínimo utilizados respectivamente por Gauss e Hertz, na determinação de princípios gerais da dinâmica.

b) Pode-se generalizar o Princípio de Hertz no espaço das fases?

**2977** — Verificar que no movimento de um sólido com um ponto fixo, se o momento das forças exteriores em relação ao ponto fixo é constantemente perpendicular ao vector velocidade angular, a força viva é constante.

**2978** — a) Relacionar a homografia fundamental de equilíbrio de um meio contínuo, com o tensor dos esforços.

b) Conceitos de isotropia e de fluido perfeito.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**2979** — Dada uma superfície cónica de revolução e um ponto exterior a ela, e ainda um eixo, fazer rodar a superfície cónica em torno do eixo até levá-la a conter o ponto dado. Número de soluções.

**2980** — Dados três pontos,  $A, B$  e  $C$ , não colineares, fazer passar por eles uma superfície cónica de revolução de abertura dada, nos três casos:

a) Os pontos pertencem a uma directriz circular da superfície.

b) Dois dos pontos pertencem a uma geratriz.

c) Os pontos não têm posição particular.

**2981** — Dada uma esfera e uma superfície cónica de revolução, determinar um eixo de rotação tal que nos permita, rodando a esfera em torno dele, levar aquela a ocupar duas posições, distintas, em que ela fica inscrita à superfície cónica. Número de soluções.

**2982** — Dados três pontos não colineares,  $A, B, C$ , e uma superfície cónica de revolução, determinar um eixo de rotação que nos permita levar  $A, B$  e  $C$  a pertencerem simultaneamente à superfície cónica, devendo  $A$  e  $B$  ficar a distâncias dadas do vértice da superfície cónica.

Problemas propostos por Daniel Vera-Cruz, aluno da F. E. P.

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

**79** — DE BROGLIE, LOUIS — *La Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules*. (Collection de Physique Mathématique) — Gauthier-Villars, Paris, 1950. — (VI + 223 pp.) — 1.650 frs.

Este livro — reimpressão sem modificações da 1.ª edição de 1939 — pertence à série de tratados, admiráveis pela clareza e elegância do estilo, em que Louis de Broglie, desde a sua *Introduction à l'Étude de la Mécanique ondulatoire* (1930) até à recente *Mécanique ondulatoire du Photon et Théorie quantique des Champs*

(1949), tem exposto didacticamente os diferentes ramos da mecânica ondulatória e suas aplicações, subordinando tudo a um plano geral onde cabem, além das suas próprias investigações e maneiras de vêr, as principais correntes da física teórica moderna. É pena que este conjunto de livros — o maior e melhor tratado de Mecânica quântica que conhecemos — não tenha tido, fora de França, o acolhimento que merece. Nos países anglo-saxões principalmente — onde a indiferença pela ciência francesa se tem acentuado muito ultimamente — são raramente citados,

sendo-lhes preferidos livros muitas vezes confusos, mais elementares e pouco recomendáveis sob o ponto de vista didáctico.

Na sua *Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules*, o Autor expõe a mecânica ondulatória não relativista dos sistemas de partículas, começando por uma introdução onde a mecânica analítica clássica é resumida admiravelmente pela maneira mais apropriada para efectuar a transição para a mecânica ondulatória. Esta transição faz o objecto do 2.º capítulo, onde se mostra como a equação de ondas de Schrödinger constitue uma generalização da equação clássica de Jacobi. Depois de expôr os princípios fundamentais da interpretação física das funções e valores próprios dos operadores hermiticos, passa então à mecânica ondulatória propriamente dita dos sistemas, que é introduzida pela análise das propriedades do centro de gravidade sob o ponto de vista ondulatório, pondo em evidência as analogias por vezes profundas entre esta noção e a noção correspondente da Mecânica racional. A segunda parte do livro expõe, com a mesma clareza, as propriedades das funções de onda que descrevem os sistemas de partículas idênticas ou não idênticas, com ou sem spin, assim como as aplicações habituais ao átomo de hélio, à teoria da valência homopolar, ao para e orto-hidrogénio, etc.

É nossa opinião que a necessidade da reimpressão desta obra se fazia sentir muito; mas pena é que o seu preço actual ponha um obstáculo sério à sua expansão.

António Gilão

**80 — DENJOY, ARNAUD — Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique.** Gauthier-Villars Ed., Paris, 1949, 6500 frs. Quatro partes: 1.ª — *La différentiation seconde mixte et son application aux séries trigonométriques*; 2.ª — *Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions*; 3.ª — *Détermination d'une fonction continue par ses nombres dérivés seconds généralisés extrêmes finis*; 4.ª — *Les totalisations. Solution du problème de Fourier.* Fasc. 1: *Les totalisations*; fasc. 2: *Appendices et Tables générales.*

As séries trigonométricas são um presente dos físicos à Matemática. Os problemas postos por este modo de exprimir funções duma variável real podem parecer muito particulares quando os comparamos com o conjunto dos vastos assuntos de que se ocupa a Análise. Mas esta encontrou, nas questões suscitadas pelo estudo das séries trigonométricas, a origem da maioria das ideias tornadas fundamentais para a matemática moderna: noção geral de função não analítica, integrabilidade das funções descontínuas, distinção entre continuidade e derivabilidade, etc. Não se poderia recusar interesse ao problema primordial posto pelas séries trigonométricas e resolvido por Arnaud

Denjoy na sua obra, a saber: determinar o meio de calcular os coeficientes de toda a série trigonométrica convergente de soma dada; e, para tal, definir o processo de integração dando um sentido às fórmulas de Fourier no caso mais geral em que a função desenvolvida não é integrável à Riemann, nem somável à Lebesgue, nem totalizável à maneira dos números derivados de primeira ordem das funções contínuas.

A solução, publicada nas suas grandes linhas pelo autor desde 1921, utiliza os resultados da teoria das funções de variáveis reais, como a fundaram Borel, Lebesgue e sobretudo Baire. Ela é porem infelizmente pouco conhecida. Denjoy tomando por regra retomar desde início todas as doutrinas estranhas ao ensino clássico, fez da sua obra mais um tratado das funções reais, do que uma exposição da solução do problema de Fourier. A segunda parte, dedicada às relações entre os conjuntos perfeitos e as funções do duplo ponto de vista topológico (ou descritivo) e métrico, o 1.º fascículo da parte quarta, dedicado à ideia geral de integral revestindo o carácter duma totalização conjugada com uma medida algébrica dos conjuntos, e os dois Apêndices que terminam o 2.º fascículo da parte quarta, estas três secções, perfazendo um total de três quintos do livro, pertencem à teoria geral das funções de variáveis reais. O restante, parte terceira dando o meio de integrar uma derivada segunda generalizada qualquer (é a este problema que, até hoje, se reduz sempre o de Fourier), a parte primeira, estudo elementar da convergência e da integrabilidade termo a termo das séries trigonométricas, e a parte quarta no começo do seu 2.º fascículo, destinado a provar a impossibilidade de diminuir a complexidade das regras da totalização elaboradas na parte terceira, estas três subdivisões, sobretudo as duas ultimas indicadas, são as únicas que correspondem directamente ao título da obra.

Esta oferece ao leitor uma larga iniciação às teorias destinadas a tomar um lugar preponderante em todas as questões da Análise onde as singularidades das funções representam um papel importante, quer se trate de funções analíticas quer de integrais reais de equações diferenciais ordinárias ou às derivadas parciais. *(Tradução do projecto distribuído pelo Editor)*

**81 — EINSTEIN, Albert e INFELD, Leopold — «L'Evoluzione della Fisica»** — Desenvolvimento das ideias desde os conceitos primitivos até à relatividade e aos quantos. — Tradução de Abele Graziadei — Casa editora Einaudi, Turim, 1948.

«A evolução da física» de Albert Einstein e Leopold Infeld é um livro magnífico, na clara e simples exposição dos princípios que estão na base da física moderna, à qual o leitor é guiado através do lento

progredir da própria física, considerada como desenvolvimento da mente humana, na afanosa busca da verdade no Universo.

Os autores partem do berço da física, que assume desde Galileu a categoria de ciência, com a descoberta de que não é a velocidade, mas sim a variação de velocidade, que está directamente ligada às forças que actuam sobre um corpo.

Depois a física evolue: procura explicar tudo com simples acções directas e instantâneas entre as partículas materiais que constituem as substâncias; mas depois é constrangida a introduzir um infinito número de novas substâncias para explicar os fenómenos luminosos, até que se descobrem ainda acções transversais, que dão o primeiro golpe na concepção mecanicista do mundo.

Um grande passo em frente deu o pensamento humano com a introdução do conceito de campo, seja eléctrico, magnético ou gravitacional, considerado a princípio como simples comodidade descritiva, depois como entidade real com uma vida própria e acções directas sobre as partículas materiais. Para ter uma visão intuitiva do campo, como realidade autónoma, imaginemos que se dissemina, em toda uma região, em torno duma carga fixa, uma multidão de outras pequenas cargas. Se agora perturbarmos a carga central, as outras serão por sua vez perturbadas, pelo facto de ter variado a força que actua sobre elas; mas enquanto as mais próximas se movem imediatamente, as outras mantêm-se inalteradas tanto mais tempo quanto mais afastadas estiverem: imaginem-se estas cargas em gradual movimento e ter-se-á a impressão como que de um vento que, partindo do centro, as atinja todas sucessivamente. E comparemos ainda as nossas cargas a pequenos seixos ligados por um grande manto que os sustenha: agitando a orla do manto, eles mover-se-ão sucessivamente, de maneira análoga às cargas em questão. Este manto que actua localmente transmitindo a acção longínqua, aquele vento que emana e atinge as diferentes cargas uma após outra, é o campo electromagnético; como o manto da imagem, ele subsiste mesmo se não actua sobre nenhuma carga: permanece no espaço a sua capacidade de acção, que se pode propagar, transportando consigo qualquer coisa que sempre o acompanha: a sua energia.

Com o afirmar-se do conceito de campo, estamos já nos últimos 50 anos de rápidos desenvolvimentos: o físico liberta-se de vínculos onerosos que o forçam a referir os acontecimentos do mundo a esquemas fixos, ao mesmo tempo que se apercebe, pela primeira vez, da inconsistência dos critérios que lhe permitiam afirmar a simultaneidade de dois acontecimentos: até o tempo, que fluía sempre igual a si mesmo, sofre

uma revisão inesperada, mudando de aspecto para os vários observadores e amalgamando-se numa só entidade com o espaço, enquanto a matéria e a energia se tornam dois aspectos diversos da mesma coisa, simplificando o problema do desconhecido. Além disso, a identidade entre os dois conceitos de massadum corpo—como resistência às forças que solicitam o corpo ao movimento ou como capacidade de atrair a si um outro corpo—já não é considerada como mera casualidade; mas recebe um profundo significado conceitual que explica a própria gravidade como propriedade geométrica local do espaço, redutível, na ausência desta, a um movimento acelerado.

Reciprocamente, supondo que se lança um corpo oco fora da atmosfera, de modo que este rode em torno da Terra como um pequeno satélite, dentro dele não se sentiria nenhuma gravidade, sendo esta compensada pela reacção centrífuga. Vem a propósito recordar o erro em que cai Júlio Verne no seu livro «Da Terra à Lua», em que ele, à parte a impossibilidade de fazer partir seres vivos dentro dum projectil, imagina os seus personagens desprovidos de peso em certo ponto da viagem, naturalmente mais próximo da Lua que da Terra; ele não reflectiu que um objecto que fosse «deixado cair» por um dos seus personagens «não cairia» nunca sobre o pavimento—tendo a mesma aceleração e portanto a mesma velocidade que este—o que sucederia em toda a viagem, mesmo com a ausência da atracção lunar.

É ainda interessante notar que, enquanto a física clássica concebe o universo como um espaço vazio, ocupado aqui e ali por matéria, a teoria da relatividade geral não separa a ideia do espaço físico da matéria que o ocupa: com efeito, por exemplo, um deslocamento de matéria provoca, com o seu campo de gravitação, uma deformação das propriedades geométricas do espaço, assim como uma pequena bola faria sobre uma delgada membrana de cautchu distendida, deslizando sobre esta.

Chegamos finalmente às últimas conquistas conceituais: todos os entes que nós conhecemos têm, a respeito do nosso modo intuitivo de entender o mundo, dois aspectos, um ondulatório e outro corpuscular; e aparece-nos um ou o outro, consoante os fenómenos que se nos deparam.

A teoria ondulatória da luz, que tão bem tinha explicado a difracção e a interferência, cai perante o efeito fotoeléctrico que nos põe em face dos quantos de luz; enquanto, por outro lado, um feixe de electrões apresenta sobre a chapa fotográfica, depois de ter atravessado a fina lâmina de cristal, típicas figuras de difracção, características dos fenómenos ondulatórios.

Mas os dois aspectos derivam do nosso desejo de

pôr questões que, a um exame aprofundado, se revelam desprovidas de significado; por exemplo, é óbvio que um dos electrões do feixe agora considerado atinge um ponto da região impressionada da chapa fotográfica, mas é claro que toda a tentativa de conhecer com exactidão o caminho dessa partícula nos obrigaria a interpôr alvos perfurados que alterariam a figura de difracção e, com esta, todo o fenómeno, porquanto o electrão já não cairia no mesmo ponto. Por isso, imaginar a «partícula elementar» como uma pequena bola a que correspondam posição e velocidade bem determinadas, é errado; com a física quântica perde-se pois, completamente, a concepção mecanicista: nós podemos apenas saber quais são as regiões do espaço onde «provavelmente» a partícula pode encontrar-se num dado instante. Eis portanto o princípio duma possível solução: a física quântica deve poder-nos dar leis probabilísticas que se tornam depois leis estatísticas quando se trata duma multidão de partículas. Neste sentido ela tem dado brilhantes resultados, enquanto hoje se prepara para enfrentar, depois do problema das partículas, aquele do campo electromagnético.

Antes de encerrar estas minhas palavras desejo notar como, de todo o livro, transparece este facto: não é a inacessível «descoberta da realidade» o que hoje compete ao físico, mas a conexão lógica da multiplicidade de factos observados por meio de instrumentos cada vez mais refinados, com uma visão coerente do mundo, que não é aquela intuitiva e simplicista dos primeiros tempos. Visão à qual o livro de A. Einstein e L. Infeld guia e encaminha com rigor lógico e científico, digno de alta consideração.

Dante Cunsolo (Instituto Físico da Universidade de Roma)

Escrito em italiano para a Gazeta de Matemática e traduzido por J. S. S.

**82 — BOULIGAND, Georges — Les principes de l'Analyse Géométrique.** Tomo 1 — *Leçons de Géométrie Vectorielle. Préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein* — 3.<sup>a</sup> edição revista e aumentada — Livraria Vuibert, Paris, 1949 — 1.200 frs.

Há já um quarto de século, em 1924, apareceu a 1.<sup>a</sup> edição das «Lições de Geometria Vectorial». O livro deve ter sido certamente considerado revolucionário relativamente aos métodos então adoptados no ensino em França. Assim o dá a entender o Prof. Goursat na apresentação que fez da obra e o demonstram os cursos publicados nessa época. O cálculo vectorial foi, com efeito, lentamente, talvez mesmo tardiamente, utilizado como instrumento corrente. O mesmo sucedeu com outros ramos da matemática moderna apesar de serem franceses notáveis criadores dalguns destes ra-

mos como E. Cartan, E. Borel, H. Lebesgue, M. Fréchet e outros. Além de outros méritos, não menos importantes, deve-se ao Prof. G. Bouligand o de ser um dos renovadores e um dos maiores propagandistas da modernização dos métodos do ensino da matemática. Atestam-no os seus numerosos livros de que queremos destacar «Primeiras lições da Teoria Geral dos Grupos», «Introdução à Geometria Infinitesimal Directa» e o excelente «Curso de Geometria Analítica» com um interessante e claro prefácio do Prof. E. Cartan. Os seus esforços foram porém finalmente coroados de êxito; assim o provam as modificações introduzidas há já bastante tempo nos programas de ensino.

O cálculo vectorial penetrou mesmo no ensino secundário no estudo da Geometria e dos elementos de mecânica ao lado também de noções de Álgebra Moderna, por exemplo, como a teoria dos grupos, naturalmente introduzida no estudo das transformações geométricas.

Acaba de aparecer agora a 3.<sup>a</sup> edição desta obra ampliada sobretudo pela adição de notas.

O Prof. Bouligand que rege actualmente na Faculdade de Ciências de Paris a cadeira «Aplicações da Análise à Geometria» resolveu, como o anuncia e justifica na advertência a esta edição, reunir numa só obra, refundindo e dando maior unidade, assuntos publicados sobretudo na «Geometria Infinitesimal Directa» e nas «Primeiras lições da Teoria Geral dos Grupos» atrás citados e há muito esgotados.

Apesar de já desactualizado para o público francês e de muitos outros países o prefácio do Prof. Goursat oferece, infelizmente, para a maioria dos leitores portugueses um interesse grande visto nos encontrarmos, com poucas excepções, em condições de maior atraso do que o referido há 25 anos em França.

Por isso traduzimos a seguir grande parte deste prefácio que elucida simultaneamente o leitor do conteúdo e características da obra.

«O Sr. Bouligand dividiu a sua obra em 3 partes, dedicadas respectivamente às operações vectoriais em geometria linear, em geometria métrica e às operações infinitesimais. Esta divisão parece natural, e as ideias encadeiam-se com uma lógica incontestável, sem monotonia alguma. Pode, sem hesitação, recomendar-se a leitura do livro aos jovens professores, que, não tendo já a preocupação de exames a prestar, têm ainda o desejo e o tempo de aperfeiçoar os seus conhecimentos matemáticos. Que leiam a obra sem pressa, meditando com vagar cada capítulo. Farão assim, com o cálculo vectorial por fio condutor, fio um pouco ténue talvez, por vezes, ao que me parece, uma bela viagem matemática. Percorrerão sem dúvida, nesta viagem, regiões novas para eles, mas tor-

narão a ver também muitas que já atravessaram, ou pelo menos divisaram, no decurso dos seus estudos clássicos e serão surpreendidos por constatar quanto as paisagens, que julgavam conhecer melhor, lhes oferecem aspectos inesperados, quando se examinam sob um novo ponto de vista. E muitas vezes é a partir desse momento que verdadeiramente *compreenderam*, no sentido elevado do termo. Fácilmente se explica que as propriedades das curvas e das superfícies possam ser ligadas às teorias vectoriais; mas o leitor ficará, sem dúvida, mais admirado ao constatar que noções na aparência puramente abstractas, pelo menos pela maneira por que lhe tinham sido apresentadas, tenham também ligações muito íntimas com esta teoria. Para só citar um exemplo, o Sr. Bouligand mostra desde as primeiras páginas como a noção de volume se introduz muito naturalmente em geometria linear, sem qualquer consideração métrica, pelo estudo dum sistema de três vectores com a mesma origem, não situados num mesmo plano, e o desenvolvimento desta ideia condu-lo por um caminho lógico às propriedades dos determinantes».

«Duma forma geral, a exposição do Sr. Bouligand distingue-se por um caracter nitidamente filosófico. No início de cada teoria nova, apresenta um pequeno número de novos conceitos, de que admite algumas propriedades fundamentais, para daí deduzir consequências. O leitor acostumado às exposições clássicas terá talvez ao princípio algumas dificuldades para adquirir novos hábitos, mas em breve será recompensado do esforço que teve de fazer. Se este esforço lhe permitisse unicamente tornar a encontrar as noções e os resultados que lhe são familiares, talvez o considerasse supérfluo, o que de resto seria absolutamente

injusto. Mas, uma vez adaptado a esta nova disciplina, não terá dificuldade alguma em penetrar nas novas geometrias que tão grande papel representam na ciência de hoje. O Sr. Bouligand mostra rapidamente como se pode constituir uma Geometria autónoma a duas dimensões, isto é, liberta de qualquer consideração de elementos *exteriores* à multiplicidade de que se trata, fazendo a adjução à forma quadrática de Riemann de certos outros elementos tirados da própria multiplicidade, forçosamente um pouco arbitrários, mas não implicando contradição alguma. O leitor que tiver reflectido maduramente sobre estes parágrafos sem custo poderá apreender o sentido da Geometria de Weyl, tão estranha ao primeiro contacto».

«Ainda que o Sr. Bouligand não fale em momento algum, ao que me parece, de relatividade, creio poder afirmar que ao redigir as notas que terminam o volume e, em particular as duas primeiras, pensou nos estudantes desejosos por se iniciarem nestas novas teorias».

As notas e complementos que terminam este 1.º tomo, abrangendo mais de uma centena de páginas, constituem matéria não menos interessante que a anterior, e intitulam-se: «Sobre os princípios do cálculo tensorial», «Sobre as multiplicidades de Riemann com mais de duas dimensões», «Sobre os princípios da Geometria», «Complementos sobre as superfícies de curvatura total constante, as superfícies convexas, etc.» e «Variantes e extensões dos métodos vectoriais. Aplicações».

M. Zaluar

★

A «GAZETA DE MATEMÁTICA» AGRADECE O ESFÓRÇO DISPENDIDO E ÊXITO ALCANÇADO NA SUA DIFUSÃO AOS ESTUDANTES DAS NOSSAS ESCOLAS SUPERIORES, EM ESPECIAL AOS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA E DO INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E FINANCEIRAS.

★

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUÊSA