ANO X-N.º 40 GAZETA DE MATEMÁTICA SETEMBRO-1949

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Problemas do nosso ensino superior

À memória do prof. B. Caraça

por ***Luís Neves Real***

As definições do número real

O Professor Ruy Luís Gomes, ao fazer no último número da *Gazeta de Matemática*, uma referência crítica às Lições de Álgebra e Geometria Analítica recentemente publicadas pelo Professor Madureira e Sousa e ao focar sobretudo a maneira aí adoptada para definir *número real*, obriga, por espírito de justiça, a alargar a discussão, transformando-a de simples crítica a um determinado livro em debate geral sobre a forma como se expõe no nosso ensino superior a base em que assenta todo o edifício do Cálculo Infinitesimal: a estrutura do domínio da variável real.

Na verdade trata-se de um significativo aspecto da debilidade e desconexão do movimento matemático nacional. Encontrando-se em quase todos os domínios a uma distância aflitiva dos problemas que são actualmente objecto da investigação matemática de todo o mundo, o nosso ensino superior precisa de não esquecer a obrigação de integrar no núcleo de conhecimentos matemáticos que transmite, ano após ano, as conquistas definitivas da nossa ciência na progressiva resolução dos seus problemas mais antigos. Minado pelos defeitos de uma organização, que, assoberbada com uma população escolar desmedida, quase se limita a conferir diplomas, mediante exames — muitos exames! — mostra também incompreensível indiferença pelo trabalho alheio, até naqueles aspectos em que dele depende a valorização do trabalho próprio. A carência de uma direcção superior — isenta de partidarismo e competente — e preconceitos mesquinhos estão a impedir que se coloquem nos seus precisos termos os problemas da investigação e do ensino da matemática em Portugal. António Monteiro — o grande animador do movimento matemático nacional de entre os anos 1939 e 1945 — via, uma vez mais, justo e alto ao pugnar pela criação do *Instituto Português de Matemática*, que era já, ao tempo do seu afastamento do país, uma necessidade, para dirigir a investigação dos diversos centros de estudos então existentes, orientar os seus trabalhos, garantir uma continuidade à nossa investigação matemática, forçar a um estreito contacto a investigação e o ensino superior e permitir uma direcção central do movimento bibliográfico. O *Instituto Português de Matemática* é hoje condição essencial de firme arrepio do caminho trilhado nestes últimos três anos. Para isso é preciso que seja não uma simples gravura a preto e branco no *Diário do Governo*, mas sim um organismo de autêntica unidade nacional imposta por um problema nacional. E antes de tudo, num primeiro acto de eficiência e justiça, deve investir no alto lugar a que têm direito nessa tarefa de renovação os dois matemáticos portugueses que mais aptos se mostraram para organizar escolas de investigadores: Ruy Luís Gomes e António Monteiro.

São as palavras que ficaram escritas de certo modo necessárias porque só no «clima» matemático português através delas esboçado se pode compreender plenamente como foi possível a uma personalidade da categoria do Professor Vicente Gonçalves, cientista a quem a matemática portuguesa deve serviços incalculáveis, redigir tão lamentávelmente o primeiro capítulo da «última e completamente remodelada edição» do seu Curso de Algebra Superior. Sinto-me obrigado a uma análise da forma como nessa obra se definem número irracional e número real por ser essa publicação utilizada por centenas de estudantes portugueses, nomeadamente de Coimbra e Lisboa, que, nas Faculdades de Ciências e no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, se iniciam nos estudos superiores da matemática, e particularmente no estudo da análise. Mas antes de prosseguir desejo que nenhuma dúvida se possa levantar a respeito da consideração que nos merece, como matemático, o Professor Vicente Gonçalves — matemático no mais elevado sentido do termo: capaz de formular problemas da sua Ciência e de contribuir para resolvê-los. Insisto em fazê-lo no plural e através de uma passagem de um documento dirigido ao Instituto para a Alta Cultura, em Dezembro de 1942, pelo Centro de Estudos Matemáticos do Porto: «...*seria de aconselhar que no campo da Análise pura se promovesse um curso sobre a teoria das funções, desde a obra de Borel, Lebesgue, Lusin, Baire e os seus continuadores até às aquisições mais recentes. Na verdade, não é possível abordar em bases sólidas os problemas actuais da Análise sem ter vivido os grandes problemas que aqueles matemáticos resolveram e formularam no princípio deste século. Para a regência deste curso, o nome indicado pela obra que já realizou, é o do Professor Vicente Gonçalves, da Universidade de Coimbra. Pedimos portanto à direcção do Instituto para a Alta Cultura se digne estudar com esse Professor a possibilidade de realização desse curso, durante o ano de 1943 na Universidade do Porto*». A transcrição mostra claramente o espirito que animava aqueles que do Porto procuravam criar um amplo movimento nacional a favor dos estudos matemáticos colocando na sua função própria os melhores valores da nossa ciência e como julgavam a posição que nela ocupava o Prof. Vicente Gonçalves. Lamentamos hoje, por nós e pelo Prof. Vicente Gonçalves, que não tenha sido possível a realização desse curso. Quem, através dos trabalhos publicados pelo Centro de Estudos Matemáticos do Porto e pela équipe portuense da Junta de Investigação Matemática, procure seguir as dificuldades de uma aprendizagem auto-didacta verá logo quanto teriam aproveitado da experiência e dos conhecimentos de um analista como Vicente Gonçalves. Recìprocamente é de supor que o contacto com um método de trabalho tão entusiástico e eficiente como o adoptado pelo Prof. Ruy Luís Gomes teria influenciado a concepção precária do Prof. Vicente Gonçalves relativamente à formação de uma verdadeira escola de Matemática. E é muito possível que a estreita colaboração que, desde essa data se poderia ter estabelecido com o Prof. Vicente Gonçalves tivesse evitado as lições iniciais deste seu *Curso de Álgebra*. A exposição do Prof. Vicente Gonçalves é, por um lado — no seu aspecto universitário — típicamente reveladora das desastrosas consequências da absoluta ausência de orientação no aproveitamento óptimo dos valores matemáticos de que a pátria dispõe. (Com uma vida de trabalho largamente depondo a seu favor era para a regência e direcção de cursos altamente especializados que estava naturalmente indicado o Prof. Vicente Gonçalves). E, por outro — no seu aspecto puramente pessoal — demonstra cabalmente quanto é difícil a um especialista (por excepcionalmente dotado que seja) abandonar o domínio particular da matemática a que se dedica desde que o ambiente cultural em que mergulha se não encontre saturado — pelo trabalho intenso de seminários, de cursos de especialização, de debates científicos generalizados, — das ideas mestras à volta das quais se vão estruturando os capítulos da ciência em que habitualmente não trabalha. E sob este aspecto a lição é bem digna de ser meditada, pois que o terreno escolhido pelo o Prof. Vicente Gonçalves fica logo abaixo do que lhe é próprio; e tão bem lavrado por analistas de primeira plana que a semente da álgebra moderna aí frutificou de modo a dissipar todas as incertezas que subsistiam ainda nas exposições clássicas de Dedekind, Méray e Cantor. Pois, apesar dessa afinidade de terrenos, apesar de todas as cautelas formais, não são os passos do Prof. Vicente Gonçalves menos falsos, menos reveladores do seu desconhecimento dos termos modernos da definição de número real.

«*Todos formamos ideia clara do que sejam números racionais e conhecemos as leis por que tais números se regem no cálculo. Disso faremos a base do nosso estudo.*» Assim começa o § 1-*Números irracionais* — do primeiro capítulo — *Números Reais* — do *Curso de Algebra Superior*. Pensando na insuficiente preparação dos seus alunos não podemos deixar de estranhar e reprovar esta atitude. Era absolutamente indispensável, já que desejou partir dos números racionais recordar essas leis essenciais a que se refere. Confesso que não imagino a atitude do Prof. Vicente Gonçalves perante o aluno perspicaz e irreverente que desconfiando da forma subjuntiva da sua frase (... *o que SEJAM números racionais*...) interrompesse a exposição, interrogando-o sobre *o que SÃO afinal os números racionais*.

¿ Expor-lhe-ia o seu ponto de vista de 1939 expresso no Compêndio de Aritmética segundo o qual *os números racionais (o mesmo que números fracionários) são relações de números inteiros* a, b, a', b', *etc*. ...

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

hierarquizadas pelos princípios

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ se } ab' = a'b \,; \quad \frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{a'}{b'} \text{ se } ab' \lesseqgtr a'b$$

e somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas respectivamente de acordo com as normas

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \,; \quad \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'} \,;$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'b} \; (\text{com } a' > 0) \,?$$

Quere-me parecer que não, ainda que alargasse esta definição de forma a incluir os simétricos destes *números racionais*, e a corrigisse com a restrição indispensável de nunca o 0 ser um b, um b', etc.... A não ser que retomasse com vagar, cuidado e clareza a distinção sobre que tanto insiste nesse compêndio: *«um número inteiro não é uma relação, é um conceito de quantidade»*. Em tal insistência, que reveste uma forma mais autoritária que persuasiva, vejo eu uma adaptação da advertência de Bertrand Russell (in *Introduction à la Philosophie Mathématique)* para que se não confundam *relação* e *conjunto de conjuntos* e portanto se não identifique o *número real (cardinal)* m nem com o inteiro m, nem com o *número racional* m, visto que o primeiro é um *conjunto de conjuntos equivalentes*, enquanto que os dois últimos são relações. Mas a exposição de Russell mantém-se no plano lógico-matemático enquanto que a do Professor Vicente Gonçalves entronca numa definição metafísica de número natural — *o modo da quantidade nas colecções de unidades*. Como quer que seja, fixemos porém que a definição de números racionais do *Compêndio de Aritmética* do Professor Vicente Gonçalves, implica serem esses números *«relações de inteiros»* e de modo algum *«conceitos de quantidade»*. Ora sucede, como teremos ocasião de ver, que no seu Curso de Álgebra Superior os números racionais se unem, na totalidade dos números reais, aos números irracionais e estes são considerados como *conceitos de quantidade*! A resposta à pergunta do aluno insatisfeito exigia pois uma meditada apreciação crítica das noções que correm nos nossos cursos elementares e na própria obra do Professor Vicente Gonçalves. Feito em Portugal, qualquer curso de introdução ao estudo da Análise, em que se não adopte a legítima atitude de partir do conjunto dos números reais como um dado, não deve prescindir de uma rigorosa caracterização do conjunto dos números racionais: ou do ponto de vista algébrico como *«corpo ordenado mínimo»*, ou do ponto de vista da teoria dos conjuntos, como *conjunto do tipo de ordenação* η; e é necessário tanto num caso como no outro, com o objectivo de ir habituando os estudantes aos esquemas fundamentais da teoria dos limites, fazer a sua organização topológica, evidenciando as suas propriedades de espaço L^* ou de espaço métrico separável, mas não completo. Creio que este aspecto deveria reter acima de tudo a atenção de um analista que redigiu o seu curso com a preocupação de habituar os leitores aos rigores do cálculo infinitesimal e que se não cansa de nos convencer (na sua linguagem rebuscada) ser *o conceito de limite nexo fundamental nas matemáticas modernas*. Ora, sendo precisamente a tentativa para solução da crise secular da teoria dos limites a origem das definições modernas de número real, dificilmente se compreende que o Professor Vicente Gonçalves não tenha insistido sobre as dificuldades que a operação de passagem ao limite encontra no espaço L^* dos números racionais. Seria de resto uma oportunidade para familiarizar os jovens estudantes de matemática com uma página magistral de Dedekind que, numa simplicidade de estilo digna de ser tomada como exemplo, nos coloca de um golpe em frente ao problema central da criação dos números reais. Transcrevo na integra essas palavras cujo conhecimento devo ao saudoso Mestre Bento Caraça que tanto se empenhou em integrar na nossa cultura matemática este aspecto da obra científica de Ricardo Dedekind:

«Então (1858) e pela primeira vez recebi o encargo, como Professor do Instituto Politécnico de Zürich, de realizar algumas lições sobre os elementos do cálculo diferencial, e nessa ocasião, senti mais do que nunca a falta de uma base verdadeiramente científica da Aritmética. Assim, por exemplo, ao considerar uma grandeza variável tendente a um valor-limite fixo (e isto na demonstração do teorema que toda grandeza sempre mas não ilimitadamente crescente tende certamente para um limite) recorri à intuição geométrica. Concedo ainda agora que, do ponto de vista didático, o uso de considerações geométricas seja muito útil numa primeira aprendizagem do cálculo diferencial e que seja indispensável se se quer evitar uma excessiva perda de tempo. Mas ninguém, creio eu, desejará sustentar que uma tal intromissão possa gabar-se de ser científica. Era tão grande a minha insatisfação que me decidi a refletir firmemente no assunto até obter uma base puramente aritmética e completamente rigorosa dos princípios do cálculo diferencial. A miudo se diz que o cálculo diferencial se ocupa de grandezas continuas; todavia não se dá nunca uma definição desta continuidade; antes se utilizam mais ou menos conscientemente representações geométricas, ou teoremas que por sua vez não foram nunca rigorosamente demonstrados com meios puramente aritméticos. A estes teoremas pertence, por exemplo, o acima mencionado e eu, depois de um exame mais cuidadoso convenci-me que este teorema, ou qualquer outro que lhe seja equivalente, pode ser considerado num certo sentido como base suficiente do cálculo diferencial. Tratava-se então ùnicameute de descobrir nos elementos da aritmética a verdadeira origem deste teorema, adquirindo simultâneamente uma definição efectiva da continuidade. Consegui atingir este objectivo no dia 24 de Novembro de 1858.»

Importa recordar aqui resumidamente como esse objectivo foi atingido; e só na medida em que disso precisamos para o que terá de seguir-se. Notemos em primeiro lugar que Dedekind virou costas ao problema típico que lhe surgira no desenvolvimento da teoria dos limites, para seguir o que a intuição geométrica lhe dizia da *continuidade* da recta e chegar assim ao célebre axioma: «*Se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo ponto duma classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe então um e só um ponto da recta que produz essa repartição*». Definindo depois o que se entende por *corte* no conjunto R dos números racionais — uma *repartição* de R em dois conjuntos A e A' de tal modo que todo número de A seja menor que todo número de A' — e observando que todo número racional *produz* dois cortes, que não considera como *essencialmente distintos*, prova que há no conjunto dos números racionais infinitos cortes (cortes irracionais) que não são produzidos por nenhum número — facto esse que caracteriza (segundo Dedekind) a descontinuidade de R. E propõe então resolver a dificuldade, pela forma seguinte: «sempre que é dado um corte (A, A') que não seja produzido por nenhum número racional *criamos* nós *um novo número, um número irracional*, que consideramos como *completamente definido* por este corte e dizemos que o número *corresponde* a este corte ou que *ele o produz*». É necessário insistir sobre este *momento* capital do pensamento de Dedekind. Dominado pela imagem da linha recta, *figura* o conjunto dos números racionais ordenado pela relação «$<$» paralelamente ao conjunto dos pontos da linha recta, ordenado pela relação «estar à esquerda de». Mas da comparação de ambos resulta que, enquanto neste todos os cortes *cortam* um ponto, naquele, pelo contrário, podem definir-se cortes (os cortes irracionais), que não cortam nenhum número racional. Então *coloca por entre os números racionais* novos seres a que chama números irracionais, de modo a preencher todas as lacunas reveladas pelo «test» dos cortes. «Por livre criação do espírito humano» surge o *número real* — elemento de uma totalidade *abstracta*, constituída por todos os números racionais e por todos os números irracionais — abstração esta que tem por representação concreta um conjunto *matemàticamente* trabalhável: o conjunto $\bar{R}$ cujos elementos são os números racionais — instrumentos já sem mistérios para o matemático — e todos os *cortes irracionais* no conjunto conhecido dos números racionais. E a primeira preocupação de Dedekind é verificar se $\bar{R}$ resulta já um conjunto contínuo. Para isso sujeita o *corte irracional* a definições que permitem a ordenação e a algebrização de $\bar{R}$, pela comparação e combinação dos cortes entre si e com os números racionais. E é assim simplicíssima a demonstração de que o objectivo está plenamente atingido: «Se o conjunto $\bar{R}$ de todos os números reais é decomposto em duas classes A_1 e A_2 de tal modo que cada número α_1 de A_1 é menor que todo número α_2 de A_2, existe então um e um só número α que produz este corte». Por outras palavras: o conjunto dos números reais, exactamente como o conjunto dos pontos da recta é um contínuo (à Dedekind).

É esta, a traços gerais, a concepção de Dedekind. Falta-lhe o enunciado firme do que é um número real; e desagrada-nos a junção num mesmo conjunto dos números racionais não com os próprios números irracionais (o que lhe está vedado por falta de definição matemática) mas com os cortes nos números racionais.

Mas não esqueçamos que nos legou uma condição a que tem de satisfazer todo conjunto ordenado que se tome como domínio da variável real: a *continuidade*.

Evitar à exposição de Dedekind o pouquíssimo que ela tem de menos claro, sem sacrificar (e, pelo contrário, recordando) a sua contribuição positiva para a caracterização do número real — eis, quanto a mim, a tarefa que se poderia ter proposto o Professor Vicente Gonçalves, uma vez que, mais ou menos directamente, preferiu seguir na esteira de Dedekind e dos seus *cortes* e não desejou, como analista, retomar o problema de limite com que Dedekind começara por tropeçar. Essa seria a forma (a única) de ir mais além do trabalho realizado em língua portuguesa para divulgação da teoria dos cortes — trabalho minucioso a que se devotou com tanto brilho o Professor Bento Caraça, nos *Conceitos fundamentais da Matemática*, e nas *Lições de Algebra e Análise*. Mas Bento Caraça na escrupulosa modéstia com que seguiu o pensamento de Dedekind trouxe para a sua obra as mesmas imprecisões da exposição original. Assim encontramos no primeiro daqueles livros: «... *Há cortes no conjunto R que não têm um elemento de separação? São estes mesmos que nos vão criar os novos elementos de separação. Basta para isso dar a seguinte definição: — chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com este número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional*».

Habilitados a ajuizar do que seria legítimo exigir em 1944-45 de quem entre nós se dispusesse a abordar a definição do número real, passaremos, no próximo número da *Gazeta de Matemática*, à análise da exposição adoptada pelo Prof. Vicente Gonçalves no primeiro capítulo dos seus *Elementos Gerais de Análise Real*, 1.ª Parte do *Curso de Álgebra Superior* publicação iniciada em Lisboa no final do ano de 1944.

(*Continua*)