# Inégalités — II

par Jean Aczél

### Solutions des problèmes et des exercices de la partie I.

Exercice 1. La partie recouverte du plan est un carré $Q$, dont les diagonales sont égales à la moitié du périmètre $k$ commun à tous les rectangles et ces diagonales sont parallèles aux côtés des rectangles. En effet si l'on choisit pour origine le centre commun des rectangles et pour axes de coordonnées les directions communes des côtés, alors $Q$ sera déterminé par les inégalités $\pm x \pm y \leqslant k/4$.

Exercice 2. Le carré. Car en posant, comme dans l'introduction, $ab=A, 2a+2b=k$, on a, d'après (1), $\sqrt{A}\leqslant k/4$ où, cette fois, $A$ est fixe. $k$ atteint son minimum pour $a=b$.

Exercice 3. La partie recouverte du plan est la figure $P$ située entre deux hyperboles équilatères, dont les demi-axes sont égaux à $\sqrt{2A}$, où $A$ désigne l'aire commune à tous les rectangles, et dont les asymptotes sont parallèles aux côtés des rectangles. En effet, si l'on choisit pour origine le centre commun des rectangles et pour axes de coordonnées les directions communes des côtés, alors $P$ sera déterminé par les inégalités $\pm xy \leqslant A/4$.

Problème 1. Pour démontrer l'inégalité $K>L$ (resp. $K<L$) entre deux nombres $K$ et $L$, il suffit de démontrer que $K-L>0$ (resp. $K-L<0$).

Si $A>B$, c'est-à-dire $A-B>0$, alors on a $(A+D)-(B+D)=A-B>0$. Si $A>B$, alors $CA-CB=C(A-B)$ est $>0$ pour $C>0$ et $<0$ pour $C<0$. Si $A>B, A>0, B>0$, alors

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+ \\ +\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})>0$$

et

$$1/A^n-1/B^n=(B^n-A^n)/A^nB^n<0.$$

Si $A>B, C>D$, alors $(A+C)-(B+D)=(A-B)+(C-D)>0$.

Si $A>B, C>D, B>0, D>0$, alors

$$AC-BD=(A-B)(C-D)+B(C-D)+ \\ +D(A-B)>0.$$

Problème 2. Posons $a=1/A, b=1/B$. On a d'après (1) $(A+B)/2>\sqrt{AB}$; donc $2/(A+B)<1/\sqrt{AB}=\sqrt{(1/A)(1/B)}$. En inscrivant les valeurs $A=1/a$, $B=1/b$ dans cette dernière inégalité, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 4. Désignons par $a$ et $b$ les deux segments en lesquels la hauteur $h$ divise l'hypothénuse $c$. On a $c=a+b$ et $h=\sqrt{ab}$, donc, par l'inégalité (1), $c\geqslant 2h$, où $h$ est fixé. $c$ atteint son minimum lorsque $a=b$, ce qui est le cas du triangle isocèle.

Exercice 5. En conservant les notations de l'exercice 4, on a de même $c\geqslant 2h$ où, cette fois, $c$ est fixé. $h$ atteindra son maximum lorsque $a=b$, ce qui est le cas du triangle isocèle.

Problème 3. La transformation de $f(x)$ en $-f(x)$ est une symétrie par rapport à l'axe des $x$. Si donc la corde inscrite à la fonction $f(x)$ laisse l'arc qu'elle sous-tend *au dessous* d'elle, alors la corde correspondante par symétrie, inscrite à la fonction $-f(x)$, laisse l'arc qu'elle sous-tend *au dessus* d'elle.

Problème 4. $y=x^2$ est toujours convexe; $y=x^3$ est convexe pour $x>0$, concave pour $x<0$; $y=\sqrt[3]{x^2}$ est toujours concave; $y=\sqrt{x^3}$ est convexe pour $x>0$; $y=1/x$ est convexe pour $x>0$, concave pour $x<0$; $y=1/x^3$ est convexe pour $x>0$, concave pour $x<0$; $y=1/\sqrt{x^3}$ est convexe pour $x>0$; $y=+\sqrt{x}$ est concave pour $x>0$; $y=-\sqrt{x}$ est convexe pour $x>0$; $y=2^x$ est convexe pour $x>0$; $y=10^x$ est convexe pour $x>0$; $y=\log x$ est concave pour $x>0$; $y=\sin x$ est concave pour $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, convexe pour $(2k-1)\pi<x<2k\pi$; $y=tg\,x$ est convexe pour $2k\pi/2<x<(2k+1)\pi/2$ et concave pour $(2k-1)\pi/2<x<2k\pi/2$.

Problème 5. Les fonctions linéaires de la forme $y=ax+b$ sont les seules qui sont à la fois convexes et concaves (au sens large).

**2. L'inégalité de Jensen.** Dans le nº précédent, nous avons donné une définition *géométrique* de la convexité d'une fonction, en nous servant de son graphique. Dans ce nº-ci nous en donnerons une autre définition, bien entendu équivalente à la précédente, mais qui, cette fois, aura un caractère *algébrique*.

Problème 6. Une fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si pour tout couple d'abscisses $x_1, x_2$ et pour tout couple $q_1, q_2$ de nombres vérifiant $q_1>0$, $q_2>0$, $q_1+q_2=1$, l'inégalité

(2) $$f(q_1x_1+q_2x_2)<q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$

est vérifiée.

La relation (2) est la fameuse *inégalité de Jensen pondérée* qui caractérise donc les fonctions convexes.

Problème 7. Par quelle relation faut-il remplacer l'inégalité (2), pour définir les fonctions convexes au sens large, resp. concaves, resp. concaves au sens large ?

Problème 8. L'énoncé du problème 6 est équivalent au suivant: Une fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si pour tout couple d'abscisses $x_1, x_2$ et pour tout couple $p_1, p_2$ de nombres positifs, l'inégalité

$$f\left(\frac{p_1 x_1+p_2 x_2}{p_1+p_2}\right)<\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)}{p_1+p_2}$$

est vérifiée. (Les quantités $p_1$ et $p_2$ seront appelés les *poids*).

L'inégalité de Jensen nous donne la possibilité de déterminer d'une façon rigoureuse le caractère convexe ou concave d'une fonction, au lieu de la méthode graphique grossière dont nous nous sommes servis au cours du problème 4.

Problème 9. Démontrer en utilisant l'inégalité (2) que la fonction linéaire $f(x)=ax+b$ $(a, b$ quelconques) est à la fois convexe et concave au sens large (cf. Problème 5).

Problème 10. Déterminer en utilisant l'inégalité (2), pour quelles valeurs de $x$ les fonctions suivantes sont convexes resp. concaves: $y=1/x, y=x^2, y=+\sqrt{x}$.

Problème 11. Soient $p_1$ et $p_2$ deux nombres positifs. On appelle *moyenne arithmétique pondérée* de deux nombres positifs $x_1$ et $x_2$, l'expression

$$(p_1 x_1+p_2 x_2)/(p_1+p_2),$$

*moyenne harmonique pondérée* de deux nombres positifs $x_1$ et $x_2$ l'expression

$$(p_1+p_2)\Big/\left(\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}\right),$$

et *moyenne quadratique pondérée* de deux nombres positifs $x_1$ et $x_2$ l'expression

$$\sqrt{\frac{p_1 x_1^2+p^2 x_2^2}{p_1+p_2}}$$

(les quantités $p_1$ et $p_2$ seront appelées des *poids*). Démontrer les inégalités suivantes:

$$(p_1+p_2)\Big/\left(\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}\right)\leqslant\frac{p_1 x_1+p_2 x_2}{p_1+p_2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{p_1 x_1^2+p_2 x_2^2}{p_1+p_2}}$$

l'inégalité n'ayant lieu que si $x_1=x_2$. (Pour $p_1=p_2$ ces moyennes se réduisent aux moyennes *symétriques* et ainsi la première des deux inégalités généralise celle démontrée au problème 2.)

Exercice 6. Considérons tous les rectangles ayant une diagonale $d$ commune.

*a*) Lequel parmi ces rectangles a le plus grand périmètre ?

*b*) Lequel a la plus grande aire ?

Exercice 7. Considérons tous les rectangles ayant le même périmètre $k$ (resp. la même aire $A$). Lequel parmi ces rectangles a la plus petite diagonale ?

Si l'on pose dans l'inégalité (2) les valeurs $q_1=q_2=1/2$, on obtient le résultat que toute fonction convexe vérifie l'inégalité

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{3}$$

Réciproquement si l'inégalité (3) est satisfaite pour une fonction *continue*, alors la validité de l'inégalité (2) en résulte. En d'autres termes, si une fonction *continue* vérifie (3), quels que soient $x_1$ et $x_2$, alors elle est convexe.

Démontrons cette assertion ! L'inégalité (3) signifie géométriquement que le milieu de toute corde de la

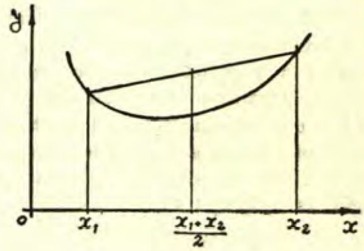

Fig. 6

courbe $y=f(x)$ est au dessus du point correspondant de l'aire qu'elle sous-tend (fig. 6). Il s'ensuit que toute corde est située entièrement au dessus de l'arc

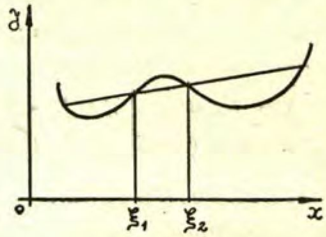

Fig. 7*a*

qu'elle sous-tend, ce qui est précisément la définition d'une fonction convexe donnée au nº 1. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un point de l'intervalle dans lequel la courbe serait située sur ou au dessus de la corde. Désignons l'équation de la corde par $y=l(x)$. D'après la propriété de Darboux (cf. nº 1) appliquée à la fonction *continue* $f(x)-l(x)$, il existeraient deux points $\xi_1$ et $\xi_2$ tels que $f(\xi_1)=$ $=l(\xi_1)$, $f(\xi_2)=l(\xi_2)$ et $f(x)>l(x)$ pour $\xi_1<x<\xi_2$ (fig. 7 *a*), ou bien un point $\xi$ tel que $f(\xi)=l(\xi)$ et $f(x)<l(x)$ pour $x\neq\xi$, mais suffisamment voisin de $\xi$

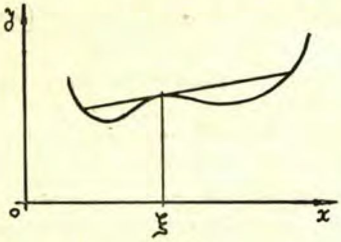

Fig. 7 *b*

(fig. 7 *b*). En aucun cas la relation (3) ne pourra être satisfaite pour $x_1$ et $x_2$ convenablement choisis.

Si l'on remplace dans (3) le symbole $<$ par $\leqslant$, resp. $>$, resp. $\geqslant$, alors on obtient une caractérisation des fonctions continues convexes au sens large, resp. concaves, resp. concaves au sens large. L'inégalité (3) est la forme *symétrique* de l'inégalité de Jensen.

Problème 12. Déterminer si les fonctions $y=10^x$, $y=\log_{10}x$ ou plus généralement les fonctions $y=a^x$, $y=\log_a x\ (a>0)$ sont convexes ou concaves. [On sait que ces fonctions sont continues].

Problème 13. Soient $x_1>0$, $x_2>0$, $q_1>0$, $q_2>0$ et $q_1+q_2=1$. Démontrer les inégalités

$$(4)\qquad 1\Big/\left(\frac{q_1}{x_1}+\frac{q_2}{x^2}\right)\leqslant x_1^{q_1}x_2^{q_2}\leqslant q_1x_1+q_2x_2\,,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $x_1=x_2$. L'expression $x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ est, par définition, la *moyenne géométrique pondérée* des deux nombres $x_1$ et $x_2$. La deuxième inégalité dans (4) généralise l'inégalité (1), à laquelle elle se réduit si l'on pose $q_1=q_2=1/2$.

Problème 14. Soit $h>-1$. On a $(1+h)^x>1+hx$ pour $x>1$ et pour $x<0$, et $(1+h)^x<1+hx$ pour $0<x<1$.

Exercice 8. Soient $a>0$, $b>0$, $r>0$, $s>0$, $1/r+1/s=1$; démontrer l'inégalité

$$ab\leqslant a^r/r+b^s/s\,.$$

Exercice 9. Soient $a>0, b>0$; démontrer l'inégalité $a^2b\leqslant 4\,((a+b)/3)^3$.

Problème 15. Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles les fonctions $y=\sin x$ et $y=\cos x$ sont convexes resp. concaves. [Utiliser les formules bien connues relatives à $\sin\alpha+\sin\beta$ et $\cos\alpha+\cos\beta$].

Problème 16. *a*) Soit $n$ un entier naturel. Démontrer l'inégalité

$$(5)\qquad \begin{aligned}&(x_1^n+x_2^n)^{n+1}/(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})^n<\\ &<(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})^n/(x_1^n+x_2^n)^{n-1}\,,\end{aligned}$$

oú $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1\neq x_2$.

*b*) Soit $n$ un entier positif ou négatif. L'expression

$$\sqrt[n]{(x_1^n+x_2^n)/2}$$

est dite *moyenne de n-ièmes puissances* des deux nombres $x_1$ et $x_2$. Démontrons que pour $x_1>0, x_2>0$ et $x_1\neq x_2$ les inégalités

$$\sqrt[n]{(x_1^n+x_2^n)/2}<\sqrt[n+1]{(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})/2}$$

ont lieu.

*c*) Soit $q_1>0, q_2>0$ et $q_1+q_2=1$. Nous appelons l'expression

$$\sqrt[n]{q_1\,x_1^n+q_2\,x_2^n}$$

la *moyenne pondérée de n-ièmes puissances* des deux nombres $x_1$ et $x_2$. Démontrons que pour $x_1>0, x_2>0$ et $x_1\neq x_2$, les inégalités

$$\sqrt[n]{q_1\,x_1^n+q_2\,x_2^n}<\sqrt[n+1]{q_1\,x_1^{n+1}+q_2\,x_2^{n+1}}$$

ont lieu.

Problème 17. Au cours de ce problème $r$ et $r'$ désignent toujours des nombres *rationnels*. Soient $q_1>0$, $q_2>0$, $q_1+q_2=1$. Démontrer que la fonction $y=x^r$ $(x>0)$ est convexe si $r>1$ ou si $r<0$ et qu'elle est concave si $0<r<1$. Démontrer que si $r<r'$, alors

$$(6)\qquad (q_1\,x_1^r+q_2\,x_2^r)^{1/r}<(q_1\,x_1^{r'}+q_2\,x_2^{r'})^{1/r'}$$

et que, si $r<0<r'$, alors

$$(7)\qquad (q_1\,x_1^r+q_2\,x_2^r)^{1/r}<x_1^{q_1}\,x_2^{q_2}<(q_1\,x_1^{r'}+q_2\,x_2^{r'})^{1/r'},$$

où $x_1>0, x_2>0, x_1\neq x_2$. (L'inégalité (7) généralise l'inégalité (4), à laquelle elle se réduit si l'on pose $r=-1, r'=1$. Remarquons que les énoncés de ce problème-ci restent exacts si l'on remplace le nombre rationnel $r$ par un nombre réel quelconque. (Nous verrons ceci plus tard).

Si on considère les couples de fonctions $f(x)=a^x$ et $f(x)=\log_a x$; $f(x)=x^n$ et $f(x)=\sqrt[n]{x}$; $f(x)=1/x^n$ et $f(x)=1/\sqrt[n]{x}$, on s'aperçoit qu'il y a une certaine relation entre les deux membres d'un tel couple. En quoi consiste cette relation ? On voit que si l'on pose $y=a^x$, on aura $x=\log_a y$, de même si $y=x^n$, alors $x=\sqrt[n]{y}$. On dit que deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ sont les *inverses* l'une de l'autre, si les relations $y=f(x)$ et $x=\varphi(y)$ sont équivalentes. Une fonction possède une inverse bien déterminée uniquement si elle est monotone au sens strict, c'est-à-dire si elle croît partout ou bien si elle décroît partout.

Problème 18. Soient $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$ deux fonctions, dont chacune est l'inverse de l'autre. Que signifie géométriquement cette relation ? Démontrer que si $y=f(x)$ est *croissante* et convexe, alors

$y=\varphi(x)$ est croissante et concave; si au contraire $y=f(x)$ est *décroissante* et convexe, alors $y=\varphi(x)$ est aussi décroissante et convexe.

Exercice 10. Démontrer que la fonction $y=a^{x^2}$ est convexe $(a>0)$.

Soient $y=\varphi(t)$ et $t=\psi(x)$ deux fonctions telles que $\varphi(t)$ soit définie pour toute valeur que $\psi(x)$ peut prendre. La fonction $y=\chi(x)=\varphi(\psi(x))$ s'appelle la fonction *composée* des deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(x)$. Par exemple la fonction $y=a^{x^2}$ est composée des deux fonctions $y=a^t$ et $t=x^2$.

Problème 19. Démontrer que si $y=\varphi(t)$ est une fonction *croissante* et convexe et que si $t=\psi(x)$ est une fonction convexe, alors la fonction composée $y=\chi(x)=\varphi(\psi(x))$ est une fonction convexe.

Les mots *poids*, *pondéré* nous rappellent des notions physiques. Nous allons voir maintenant la raison de cette terminologie. Considérons d'abord un système de deux poids (points de masses) $p_1$ et $p_2$ dans le plan. Plaçons le poids $p_1$ au point $(x_1,y_1)$ et le poids $p_2$ au point $(x_2,y_2)$ et déterminons le centre de gravité de ce système. Les coordonnées $x_0$ et $y_0$ du centre de gravité seront calculées en utilisant le fait que les composantes du moment du système par rapport à ce point sont égales à zéro, c'est-à-dire

$$p_1(x_0-x_1)=p_2(x_2-x_0)\,,\quad p_1(y_0-y_1)=p_2(y_2-y_0)\,,$$

d'où il vient que

$$x_0=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2},\quad y_0=\frac{p_1y_1+p_2y_2}{p_1+p_2}.$$

Maintenant on a l'interpretation suivante de l'inégalité de Jensen: Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si en plaçant deux poids sur sa courbe représentative, le centre de gravité de ces deux poids aura une ordonnée supérieure à celle du point correspondant (c. à d. ayant la même abscisse) de la courbe. On a évidemment des énoncés analogues pour les fonctions convexes au sens large, concaves, et concaves au sens large.

Problème 20. Plaçons les poids $p_1,p_2,\cdots,p_k$ aux points $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)$ du plan. Déterminons le centre de gravité en calculant d'abord le centre de gravité des deux premiers points; puis concentrons la masse $p_1+p_2$ au point ainsi obtenu et calculons le centre de gravité de ce nouveau point et du troisième point et continuons ainsi de suite. (Nous verrons au résultat qu'il est indépendant de l'ordre dans lequel on a pris les poids $p_1,p_2,\cdots,p_k$).

Problème 21. Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si l'inégalité

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_kx_k)<\\<q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_kf(x_k)\tag{8}$$

est vérifiée quelles que soient les valeurs $x_1,x_2,\cdots,x_k$ et les quantités positives $q_1,q_2,\cdots,q_k$ vérifiant $q_1+$ $+q_2+\cdots+q_k=1$. De même une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si l'inégalité

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\right)<\\<\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_kf(x_k)}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\tag{9}$$

est vérifiée quelles que soient les valeurs $x_1,x_2\cdots,x_k$ et les quantités positives $p_1,p_2,\cdots p_k$.

Les inégalités (8) et (9) sont nommées les *inégalités de Jensen pondérées à k termes.*

Problème 22. Si l'on pose $q_1=q_2=\cdots=q_k$ resp. $p_1=p_2=\cdots=p_k$ dans les inégalités (8) resp. (9), on obtient

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)<\\<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}.\tag{10}$$

Démontrons que cette inégalité est nécessaire et suffisante pour que la fonction $y=f(x)$ *continue* soit convexe.

L'inégalité (10) sera nommée *l'inégalité symétrique de Jensen à k termes.*

Nous avons vu que si la fonction $y=f(x)$ est *continue* alors les inégalités (8), (9) et (10) résultent de l'inégalité (3). Nous examinerons maintenant dans quelle mesure ceci subsiste si l'on supprime la condition que $y=f(x)$ est continue.

Problème 23. Démontrons que si une fonction $y=f(x)$ vérifie l'inégalité (3), alors elle vérifie aussi l'inégalité (10). [Démontrer d'abord (10) pour les $k$ ayant la forme $k=2^j$ $(j=1,2,3,\cdots)$ par récurrence sur $j$. Si maintenant $2^{j-1}<k<2^j$, on posera

$$x_{k+1}=\cdots=x_{2^j}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},$$

et on aura

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)=\\=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+\cdots+x_{2^j}}{2^j}\right)<\\<\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+\cdots+f(x_{2^j})}{2^j},$$

c'est-à-dire

$$\left(1-\frac{2^j-k}{2^j}\right)f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)<\\<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{2^j},$$

ce qui équivaut à la formule que l'on veut démontrer.

Cette méthode de démonstration est due au grand mathématicien français Augustin Louis Cauchy].

PROBLÈME 24. Démontrons que si une fonction $y=f(x)$ vérifie l'inégalité (3), alors elle vérifie aussi les inégalités (8) et (9) avec des poids $q_1, q_2, \cdots q_k$ resp. $p_1, p_2, \cdots p_k$ *rationnels*.

PROBLÈME 25. Soient $q_1>0, q_2>0, \cdots, q_k>0$, $q_1+q_2+\cdots+q_k=1$. L'expression

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_k x_k$$

s'appelle la *moyenne arithmétique pondérée* des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_k$. D'une façon plus générale, pour $\rho$ réel, l'expression

$$(11) \quad M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (q_1 x_1^\rho + q_2 x_2^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho}$$

s'appelle la *moyenne pondérée de n-ièmes puissances* des nombres $x_1>0, x_2>0, \cdots, x_k>0$. Pour $\rho=1$ ceci se réduit à la moyenne arithmétique, pour $\rho=-1$ à la moyenne harmonique. $M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ est par définition l'expression

$$M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_k^{q_k}$$

la *moyenne géométrique pondérée* des nombres $x_1>0$, $x_2>0, \cdots, x_k>0$. Démontrer que, si $r$ et $r'$ sont rationnels et si $r<r'$, alors $M_r<M_{r'}$ [généralisation de (6) et de (7)].

PROBLÈME 26. Désignons par Max $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ le plus grand des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_k$ et par min $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ le plus petit de ces nombres. Démontrer que si $x_j = \text{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ et si

$$M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k), \ (x_1>0, x_2>0, \cdots, x_k>0)$$

est défini par (11), alors pour $\rho<0$

$$\sqrt[\rho]{q_j}\ \text{Max}(x_1, x_2 \cdots, x_k) \leqslant M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leqslant \leqslant \text{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k).$$

En déduire que $M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ tend vers

$$\text{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

lorsque $\rho$ tend vers $+\infty$. Etablir les théorèmes analogues pour min $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

EXERCICE 11. *a*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même surface (resp. même somme de longueur d'arrètes, resp. même diagonale), lequel a le plus grand volume? *b*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même volume, lequel a la plus petite surface (resp. la plus petite somme de longueur d'arrètes, resp. la plus petite diagonale)? *c*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même somme de longueur d'arrètes, lequel a la plus petite diagonale? *d*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même diagonale, lequel a la plus grande somme de longueur d'arrètes?

EXERCICE 12. Parmi tous les triangles ayant le même périmètre, lequel a la plus grande aire?

EXERCICE 13. Soient $a_1>0, a_2>0, \cdots, a_k>0$. Démontrer les inégalités

$$[a_2 a_3 \cdots a_k (a_2+a_3+\cdots+a_k) + a_1 a_3 \cdots a_k (a_1+a_3+ +\cdots+a_k) + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_1+a_2+ +\cdots+a_{k-1})] / k a_1 a_2 \cdots a_k \geqslant k-1$$

et

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_k) \geqslant k^2.$$

EXERCICE 14. Démontrer que si $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2 \leqslant 1$, alors $a_1+a_2+\cdots+a_k \leqslant \sqrt{k}$.

EXERCICE. 15. Comment faut-il choisir les nombres positifs $a, b, c$ pour que, si $S=a+b+c$ est constant, $ab^2c^3$ soit aussi grand que possible? Comment faut-il choisir les nombres positifs $a, b, c$ pour que, si $ab^2c^3$ est constant, $S=a+b+c$ soit aussi petit que possible?

EXERCICE 16. Démontrer que les fonctions $\log_a(1+a^x)$ et $\sqrt{1+x^2}$ sont convexes. Démontrer les inégalités

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} \geqslant 1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

et

$$\sqrt{k^2+(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2} \leqslant \sqrt{1+a_1^2} + +\sqrt{1+a_2^2} + \cdots + \sqrt{1+a_k^2}.$$

EXERCICE 17. Parmi tous les polygones à $k$ sommets, inscrits au cercle, lequel a la plus grande aire (resp. le plus grand périmètre)? *(continua)*

# Equação geral das escalas termométricas. Fórmulas e definições

*por* **Luís Freire** *(Recife)*

Seja $x$ uma determinada *característica* de um corpo termoscópico.

Sendo $t$ a temperatura, temos: $x=f(t)$. Nos limites de temperatura que realizamos, a função $x$ pode ser desenvolvida em série acentuadamente convergente.

Assim, aplicando a fórmula de MacLaurin, vem:

$$x_t = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \cdots = = f(0)\left[1 + \frac{f'(0)}{f(0)} t + \frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f(0)} t^2 + \cdots\right] = = x_0(1 + at + bt^2 + \cdots),$$