Cette méthode de démonstration est due au grand mathématicien français Augustin Louis Cauchy].

Problème 24. Démontrons que si une fonction $y=f(x)$ vérifie l'inégalité (3), alors elle vérifie aussi les inégalités (8) et (9) avec des poids $q_1, q_2, \cdots q_k$ resp. $p_1, p_2, \cdots p_k$ *rationnels*.

Problème 25. Soient $q_1>0, q_2>0, \cdots, q_k>0$, $q_1+q_2+\cdots+q_k=1$. L'expression

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_k x_k$$

s'appelle la *moyenne arithmétique pondérée* des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_k$. D'une façon plus générale, pour ρ réel, l'expression

$$(11)\quad M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (q_1 x_1^\rho + q_2 x_2^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho}$$

s'appelle la *moyenne pondérée de n-ièmes puissances* des nombres $x_1>0, x_2>0, \cdots, x_k>0$. Pour $\rho=1$ ceci se réduit à la moyenne arithmétique, pour $\rho=-1$ à la moyenne harmonique. $M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ est par définition l'expression

$$M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_k^{q_k}$$

la *moyenne géométrique pondérée* des nombres $x_1>0$, $x_2>0, \cdots, x_k>0$. Démontrer que, si r et r' sont rationnels et si $r<r'$, alors $M_r < M_{r'}$ [généralisation de (6) et de (7)].

Problème 26. Désignons par $\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ le plus grand des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_k$ et par $\min(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ le plus petit de ces nombres. Démontrer que si $x_j = \mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ et si

$$M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k), \ (x_1>0, x_2>0, \cdots, x_k>0)$$

est défini par (11), alors pour $\rho<0$

$$\sqrt[\rho]{q_j}\ \mathrm{Max}(x_1, x_2 \cdots, x_k) \leqslant M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leqslant \leqslant \mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k).$$

En déduire que $M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ tend vers

$$\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

lorsque ρ tend vers $+\infty$. Etablir les théorèmes analogues pour $\min(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

Exercice 11. *a*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même surface (resp. même somme de longueur d'arrètes, resp. même diagonale), lequel a le plus grand volume? *b*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même volume, lequel a la plus petite surface (resp. la plus petite somme de longueur d'arrètes, resp. la plus petite diagonale)? *c*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même somme de longueur d'arrètes, lequel a la plus petite diagonale? *d*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même diagonale, lequel a la plus grande somme de longueur d'arrètes?

Exercice 12. Parmi tous les triangles ayant le même périmètre, lequel a la plus grande aire?

Exercice 13. Soient $a_1>0, a_2>0, \cdots, a_k>0$. Démontrer les inégalités

$$[a_2 a_3 \cdots a_k (a_2+a_3+\cdots+a_k) + a_1 a_3 \cdots a_k (a_1+a_3+ +\cdots+a_k) + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_1+a_2+ +\cdots+a_{k-1})] / k a_1 a_2 \cdots a_k \geqslant k-1$$

et

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_k) \geqslant k^2.$$

Exercice 14. Démontrer que si $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2 \leqslant 1$, alors $a_1+a_2+\cdots+a_k \leqslant \sqrt{k}$.

Exercice. 15. Comment faut-il choisir les nombres positifs a, b, c pour que, si $S=a+b+c$ est constant, ab^2c^3 soit aussi grand que possible? Comment faut-il choisir les nombres positifs a, b, c pour que, si ab^2c^3 est constant, $S=a+b+c$ soit aussi petit que possible?

Exercice 16. Démontrer que les fonctions $\log_a(1+a^x)$ et $\sqrt{1+x^2}$ sont convexes. Démontrer les inégalités

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} \geqslant 1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

et

$$\sqrt{k^2+(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2} \leqslant \sqrt{1+a_1^2} + + \sqrt{1+a_2^2} + \cdots + \sqrt{1+a_k^2}.$$

Exercice 17. Parmi tous les polygones à k sommets, inscrits au cercle, lequel a la plus grande aire (resp. le plus grand périmètre)? *(continua)*

Equação geral das escalas termométricas. Fórmulas e definições

por **Luís Freire** (Recife)

Seja x uma determinada *caracteristica* de um corpo termoscópico.

Sendo t a temperatura, temos: $x=f(t)$. Nos limites de temperatura que realizamos, a função x pode ser desenvolvida em série acentuadamente convergente.

Assim, aplicando a fórmula de MacLaurin, vem:

$$x_t = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \cdots = = f(0)\left[1 + \frac{f'(0)}{f(0)} t + \frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f(0)} t^2 + \cdots\right] = = x_0(1 + at + bt^2 + \cdots),$$

fazendo $\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0 = a$, etc. A expressão geral desses coeficientes é $\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right)_0$.

Para valores pequenos de t, podemos ficar no segundo termo do desenvolvimento de x, e então teremos:

(1) $$x_t = x_0(1 + at).$$

É nesta fórmula que se baseia a construção dos termómetros.

Vejamos a sua teoria geral.

A fórmula (1) permite escrever:

(2) $$t = A + Bx_t,$$

sendo A e B independentes de x_t.

Designemos por t' a temperatura do gelo fundente, por t'' a do vapor d'água em ebulição, ambos os casos se processando à pressão atmosférica normal; por x' e x'' os valores correspondentes da característica adoptada do corpo termoscópico.

Teremos então: $t' = A + Bx'$ e $t'' = A + Bx''$.

Daí:

$$t'' - t' = B(x'' - x'), \quad B = \frac{t''-t'}{x''-x'},$$

$$A = t' - \frac{t''-t'}{x''-x'}x' = \frac{t'x''-t''x'}{x''-x'}.$$

A expressão geral de t (2), tornar-se-á:

$$t = \frac{t'x''-t''x'}{x''-x'} + \frac{t''-t'}{x''-x'}x_t \quad \text{ou}$$

(3) $$t = \frac{t''-t'}{x''-x'}\left[x_t - \left(\frac{t''}{t''-t'}x' - \frac{t'}{t''-t'}x''\right)\right],$$

que é a *equação geral das escalas termométricas*.

A cada definição numérica, completa, do intervalo termométrico $t''-t'$, corresponde uma escala.

Para $t''-t' = 100$, sendo $t' = 0$, vem:

$$t = \frac{100}{x_{100}-x_0}(x_t - x_0),$$

que é a *equação da escala centígrada*.

Para $t''-t' = 80$, sendo $t' = 0$, vem:

$$t = \frac{80}{x_{80}-x_0}(x_t - x_0)$$

— *equação da escala Réaumur*.

Para $t''-t' = 180$, sendo $t' = 32$, vem:

$$t = \frac{180}{x_{212}-x_{32}}\left[x_t - \left(\frac{212}{180}x_{32} - \frac{32}{180}x_{212}\right)\right]$$

— *equação da escala Fahrenheit*.

Obtenhamos, partindo de (3), a definição *geral* do grau termométrico.

A expressão (3) pode ser posta sob a forma:

(4) $$t = \frac{1}{x''-x'}\left[t'(x''-x_t) + t''(x_t - x')\right].$$

Chamando de *grau* à variação de temperatura correspondente à passagem do valor t ao valor $t+1$, vem:

$$t + 1 - t = \frac{1}{x''-x'}\left[t'(x''-x_{t+1}) + t''(x_{t+1} - x') - \right.$$
$$\left. - t'(x''-x_t) - t''(x_t - x')\right] \quad \text{ou}$$
$$1 = \frac{1}{x''-x'}\left[t'(x_t - x_{t+1}) + t''(x_{t+1} + x_t)\right].$$

Daí:

$$x'' - x' = (x_{t+1} - x_t)(t'' - t') \quad \text{ou}$$
$$x_{t+1} - x_t = \frac{1}{t''-t'}(x''-x').$$

O grau termométrico definido por meio da equação geral, o grau termométrico *geral*, é, pois: *a variação de temperatura correspondente à variação da característica adoptada do corpo termoscópico empregado igual a $\frac{1}{t''-t'}$ da variação total que essa característica experimenta entre as temperaturas convencionais do gelo fundente e do vapor d'água em ebulição, sob a pressão atmosférica normal.*

Nos termómetros ordinários, a característica adoptada é o volume.

Tem-se, assim:

$v_{t+1} - v_t = \frac{1}{100}(v_{100} - v_0)$, que define o *grau centígrado*

$v_{t+1} - v_t = \frac{1}{80}(v_{80} - v_0)$, que define o *grau Réaumur*

$v_{t+1} - v_t = \frac{1}{180}(v_{212} - v_{32})$, que define o *grau Fahrenheit.*

Nos termómetros a gaz, que têm para padrão o *termómetro normal a hidrogénio* instalado em Sèvres no «Bureau International des Poids et Mesures», a característica adoptada é a pressão.

O «Comité International» adoptou para o grau desses termómetros o definido pelo termómetro normal de hidrogénio segundo a fórmula

$$p_{t+1} - p_t = \frac{1}{100}(p_{100} - p_0),$$

em que p_0 foi tomado igual a 100 cm. de mercúrio e p_{100} foi medido e obtido igual a 136,62 cm.

Coeficiente termométrico *geral*.

A expressão (4) pode ser posta sob a forma:

(5) $$t = \frac{(x_t - x')\left[t'' + \dfrac{t'(x''-x_t)}{x_t - x'}\right]}{x''-x'} =$$

$$= \frac{x_t - x'}{(x'' - x') \cdot \dfrac{x_t - x'}{t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)}} =$$

$$= \frac{x_t - x'}{\dfrac{(x'' - x')(x_t - x')}{x'[t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)]} \cdot x'} .$$

Desiguando por β a fracção do denominador que multiplica x', vem:

$$\beta = \frac{(x'' - x')(x_t - x')}{x'[t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)]} =$$

$$= \frac{x'' - x'}{(t'' - t')\,x' \cdot \dfrac{x_t - \left[\dfrac{t''}{t'' - t'}\,x' - \dfrac{t'}{t'' - t'}\,x''\right]}{x_t - x'}} .$$

É β a expressão *geral* do coeficiente termométrico. No caso centígrado, temos:

$$\beta = \frac{x_{100} - x_0}{100\,x_0} .$$

As fórmulas *gerais* de dilatação linear e cúbica, resultam da expressão (5).

Com efeito:

$$t = \frac{x_t - x'}{\beta\,x'} ; \text{ daí } x_t = x' + t\beta x' = x'(1 + \beta t) .$$

Quando a característica adoptada é o comprimento, temos: $l = l'(1 + \beta t)$, que é a fórmula *geral* de dilatação linear, sendo β o coeficiente correspondente.

No caso centígrado $\beta = \dfrac{l_{100} - l_0}{100\,l_0}$, $l_t = l_0(1 + \beta t)$.

Quando a característica adoptada é o volume, vem: $v_t = v'(1 + \beta t)$ — fórmula *geral* de dilatação cúbica, sendo β o coeficiente correspondente.

No caso centígrado $\beta = \dfrac{v_{100} - v_0}{100\,v_0}$, $v_t = v_0(1 + \beta t)$.

A expressão *geral* do coeficiente termométrico que designamos por β, só o é em relação à forma binomial de x_t donde partimos e que é $x_t = x_0(1 + at)$, forma restrita, como já vimos, de x_t.

Tomando a verdadeira expressão de x_t que é $x_t = x_0(1 + at + bt^2 + \cdots)$, a expressão *absolutamente geral* do coeficiente termométrico é $\dfrac{1}{n!}\,\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right)_0$.

Poder-se-à, então, denominar a β de coeficiente termométrico *geral escalar*, atendendo a que as escalas termométricas só encontram significação em

$$x_t = x_0(1 + at) .$$

A definição analítica de a que é $\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0$, encontra a sua correspondente escalar em β.

Observação. Sob forma diversa e menos completo já foi publicado este trabalho, no Brasil. A forma, porém, que ele agora reveste, acrescido das primeira e última partes, constituem a sua apresentação definitiva.

No artigo desta gazeta, Ano IX — N.os 37-38 intitulado «Os potenciais escalar e vectorial etc.», no ante-penúltimo período da pág. 12, onde se lê «o extremo do paradoxo de Peano», leia-se: *a extreme* do paradoxo de Peano.

Les géométries de figures orientées — II

par ***Paul Belgodère*** *(Attaché de Recherches C. N. R. S.)*

Orientation et Imaginaires

Dans le Chapître précédent, puisque nous étions en Géométrie Analytique, nous n'avons fait aucune hypothèse de réalité, et les résultats sont valables dans le domaine complexe. Pour certains domaines de réalité des variables initiales, le choix de la détermination pour une racine carrée prend un aspect particulier.

Par exemple, si la quantité sous radical est réelle et positive, l'orientation est liée au choix du signe + ou — devant la valeur arithmétique du radical: c'est la relation élémentaire entre sens et signe.

Par contre, si la quantité sous radical est négative, le radical est susceptible de deux déterminations $+iR$ et $-iR$, et la combinaison de ces symboles imaginaires avec des nombres réels permet d'associer conventionnellement à deux orientations opposées deux éléments complexes conjugués, mais dans le cas seulement où les variables initiales appartiennent à un certain *domaine de réalité* (réelles, imaginaires pures de module 1, ...)

Prenons par exemple la liaison des *foyers* d'un cercle réel de l'espace (centres des sphères de rayon nul passant par ce cercle) avec les sens de parcours possibles par ce cercle: cela revient à orienter l'axe du cercle en fonction du sens du cercle, puis à porter sur cet axe orienté la longueur $+iR$ à partir du centre O du cercle. Ceci nécessite deux conventions préalables, qui assurent l'unicité et la non contra-