$$= \frac{x_t - x'}{(x'' - x') \cdot \dfrac{x_t - x'}{t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)}} =$$

$$= \frac{x_t - x'}{\dfrac{(x'' - x')(x_t - x')}{x'[t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)]} \cdot x'} \,.$$

Desiguando por β a fracção do denominador que multiplica x', vem:

$$\beta = \frac{(x'' - x')(x_t - x')}{x'[t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)]} =$$

$$= \frac{x'' - x'}{(t'' - t')\, x' \cdot \dfrac{x_t - \left[\dfrac{t''}{t'' - t'}\, x' - \dfrac{t'}{t'' - t'}\, x''\right]}{x_t - x'}} \,.$$

É β a expressão *geral* do coeficiente termométrico. No caso centígrado, temos:

$$\beta = \frac{x_{100} - x_0}{100\, x_0} \,.$$

As fórmulas *gerais* de dilatação linear e cúbica, resultam da expressão (5).

Com efeito:

$$t = \frac{x_t - x'}{\beta\, x'} \,;\ \text{daí}\ x_t = x' + t\beta x' = x'(1 + \beta t) \,.$$

Quando a característica adoptada é o comprimento, temos: $l = l'(1 + \beta t)$, que é a fórmula *geral* de dilatação linear, sendo β o coeficiente correspondente.

No caso centígrado $\beta = \dfrac{l_{100} - l_0}{100\, l_0}$, $l_t = l_0(1 + \beta t)$.

Quando a característica adoptada é o volume, vem: $v_t = v'(1 + \beta t)$ — fórmula *geral* de dilatação cúbica, sendo β o coeficiente correspondente.

No caso centígrado $\beta = \dfrac{v_{100} - v_0}{100\, v_0}$, $v_t = v_0(1 + \beta t)$.

A expressão *geral* do coeficiente termométrico que designamos por β, só o é em relação à forma binomial de x_t donde partimos e que é $x_t = x_0(1 + at)$, forma restrita, como já vimos, de x_t.

Tomando a verdadeira expressão de x_t que é $x_t = x_0(1 + at + bt^2 + \cdots)$, a expressão *absolutamente geral* do coeficiente termométrico é $\dfrac{1}{n!}\,\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right)_0$.

Poder-se-à, então, denominar a β de coeficiente termométrico *geral escalar*, atendendo a que as escalas termométricas só encontram significação em

$$x_t = x_0(1 + at) \,.$$

A definição analítica de a que é $\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0$, encontra a sua correspondente escalar em β.

Observação. Sob forma diversa e menos completo já foi publicado este trabalho, no Brasil. A forma, porém, que ele agora reveste, acrescido das primeira e última partes, constituem a sua apresentação definitiva.

No artigo desta gazeta, Ano IX — N.os 37-38 intitulado «Os potenciais escalar e vectorial etc.», no ante-penúltimo período da pág. 12, onde se lê «o extremo do paradoxo de Peano», leia-se: *a extreme* do paradoxo de Peano.

Les géométries de figures orientées — II

par **Paul Belgodère** (Attaché de Recherches C. N. R. S.)

Orientation et Imaginaires

Dans le Chapître précédent, puisque nous étions en Géométrie Analytique, nous n'avons fait aucune hypothèse de réalité, et les résultats sont valables dans le domaine complexe. Pour certains domaines de réalité des variables initiales, le choix de la détermination pour une racine carrée prend un aspect particulier.

Par exemple, si la quantité sous radical est réelle et positive, l'orientation est liée au choix du signe + ou — devant la valeur arithmétique du radical: c'est la relation élémentaire entre sens et signe.

Par contre, si la quantité sous radical est négative, le radical est susceptible de deux déterminations $+iR$ et $-iR$, et la combinaison de ces symboles imaginaires avec des nombres réels permet d'associer conventionnellement à deux orientations opposées deux éléments complexes conjugués, mais dans le cas seulement où les variables initiales appartiennent à un certain *domaine de réalité* (réelles, imaginaires pures de module 1, ...)

Prenons par exemple la liaison des *foyers* d'un cercle réel de l'espace (centres des sphères de rayon nul passant par ce cercle) avec les sens de parcours possibles par ce cercle: cela revient à orienter l'axe du cercle en fonction du sens du cercle, puis à porter sur cet axe orienté la longueur $+iR$ à partir du centre O du cercle. Ceci nécessite deux conventions préalables, qui assurent l'unicité et la non contradiction des opérations à effectuer; une orientation préalable de l'espace par la donnée d'un trièdre de référence, et le choix entre les deux points complexes d'un axe de référence à qui on attribuera *arbitrairement* les abscisses $+i$ et $-i$: la double orientation au point de vue réel et complexe de l'espace tout entier s'en déduit par continuité. Mais une convention initiale est indispensable et, de même qu'un mathématicien et son image dans un miroir traitent tous leurs problèmes avec des sens d'orientation qu'ils ne peuvent amener en coincidence, un mathématicien supposé non purement réel (capable par exemple de dessiner sur un axe d'équation réelle, le point d'abcisse $+i$) se trouverait constamment en désaccord avec le mathématicien conjugué lorsqu'il leur faudrait travailler dans le même espace.

Quoique liée à une convention préalable, mais à cause de son invariance par continuité, l'association d'éléments imaginaires à des éléments réels orientés constitue un moyen de recherche et de démonstration. Evidemment, le sens dans lequel une spirale logarithmique tourne en s'éloignant de son pôle est indépendant d'un choix possible entre les isotropes qui en sont issus (la spirale ne passe pas par un point cyclique avant de passer par l'autre); mais ces deux choix (orientation du plan, distinction des points cycliques) sont covariants par les transformations anallagmatiques, qui les altèrent ou conservent en même temps; les isotropes qui sont des éléments géométriques très expressifs et très maniables, permettent de préciser, sans calcul, les notions d'orientation.

Représentations impropres

Toute représentation paramétrique impropre, constituant par exemple une correspondance (1, 2) entre deux espaces, peut être considérée comme une orientation, les éléments critiques de la correspondance apparaissant comme non orientables. Par exemple, la représentation paramétrique impropre d'une droite par une fonction du second degré, revient à considérer les points de la droite comme perspective des points d'une conique sur la polaire du point de vue, après avoir installé sur la conique une représentation paramétrique unicursale.

Réciproquement, on peut chercher un paramétrage impropre (souvent par *l'intermédiaire* de fonctions transcendantes telles que les lignes trigonométriques) qui permette l'extraction rationnelle d'une racine carrée liée à une orientation. Soit, par exemple, à montrer que toute courbe parallèle à la parabole est unicursale: pour représenter, paramétriquement la parabole ou l'hypocycloïde à 3 rebroussements, ou toute courbe ayant une tangente et une seule parallèle à une direction non orientée donnée, il y a intérêt à prendre pour paramètre la pente t de la normale à la courbe, ou plutôt un paramètre impropre u dont t soit fonction du second degré, les valeurs critiques de t qui correspondent à une seule valeur de u étant $+i$ et $-i$, qui donnent des tangentes isotropes pouvant à priori correspondre à une particularité de la courbe parallèle. Ces conditions sont les plus aptes à fournir si c'est possible, un paramètrage unicursal de la courbe parallèle, se traduisant sur la courbe initiale par un paramétrage impropre. Posons donc $\frac{t-i}{t+i}=\left(\frac{u-i}{u+i}\right)^2$ d'où $t=\frac{u^2-1}{2u}$ ce qui revient à paramétrer la courbe initiale par la tangente du demi-angle que fait une normale variable avec l'axe, en fonction de laquelle on peut exprimer rationnellement les cosinus directeurs de la normale, donc les coordonnées d'un point de la courbe parallèle.

Voici un autre exemple: soit à étudier le birapport de droites joignant deux points d'une conique (C) à un point O n'appartenant pas à la conique, avec les tangentes issues de O. Soit (D) la polaire de O. Un paramètre unicursal t de (C) dans lequel les points de contact I, J avec les tangentes issues de O ont pour paramètres respectifs 0 et ∞ induit sur (D) par perspective à partir de O, un paramétrage impropre pour lequel t^2 est paramètre propre; à deux valeurs opposées de t correspondent deux points de (C) en involution, conjugués harmoniques par rapport aux points doubles I et J, la droite de jonction passant donc par O: à toute valeur de t^2 correspond donc un seul point de (D) et réciproquement. Donc le birapport de deux points de (C) avec les deux points doubles a pour carré le birapport de leurs perspectives: si (C) est un cercle de centre O, on retrouve la propriété de l'angle inscrit, moitié de l'angle au centre. De même, sur une droite, le milieu des points divisant un segment AB dans le rapport $a, -a$, est représenté par le paramètre propre a^2 et divise donc AB dans le rapport a^2 puisqu'il en est ainsi pour les points A, B, ∞.

La notion d'orientation permet d'éclaircir certaines propriétés d'Analysis situs liées à la Géométrie considérée, dont elle permet un dédoublement. Par exemple, le plan de la Géométrie Cayleyenne elliptique doit être considérée comme unilatère; la séparation d'un point géométrique en deux éléments (points analytiques normés) selon la détermination à donner à la racine carrée de la puissance du point par rapport à la conique absolue revient à distinguer les deux faces du plan, le raccordement de l'une à l'autre se faisant «au travers» de la conique absolue, avec une singularité apparente sur la droite de l'infini, la géométrie elliptique ainsi orientée devient identique à la géométrie sphérique, comme on s'en rend compte en prenant pour modèle la géométrie métrique des droites non orientées issues d'un point fixe de l'espace euclidien à 3 dimensions. C'est ce que W. BLASCHKE et les géomètres japonais appelent *«géométrie doublement orientée»*, un même point géométrique donnant naissance à deux éléments considérés comme distincts.

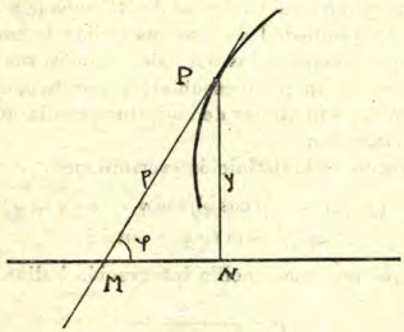
En résumé, la notion d'orientation constitue, malgré ses multiples aspects, une méthode précieuse de recherche et de découverte; elle explique et rend intuitives certaines propriétés d'apparence initiale mystérieuse: s'est cette coordination qui constitue l'élégance des méthodes géométriqees au sens de KLEIN.

Curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$

por **Ginés Nasano Oliva (*)**

Vamos a hacer un pequeño estudio de las curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$.

Designamos por p a la distancia comprendida entre un punto generico de la curva y el de corte de su tangente con un eje fijo. φ es el angulo que forma la tangente con esta recta.



Sistema de coordenadas que apesar de la bibliografia consultada no hemos encontrado ninguna referencia que nos indique hayan sido anteriormente estudiadas.

Cambio de coordenadas

Supongamos que el eje fijo sea el eje OX.

Entonces será:

$$y=p \operatorname{sen} \varphi \tag{1}$$

El valor de la abscisa será arbitrário y dependerá de donde tomemos el eje Y.

Esto se ve inmediatamente al derivar con respecto de φ la igualdad (1)

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=p' \operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi; \quad \text{y como} \quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=(p' \operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi \tag{2}$$

por tanto

$$x=\int(p' \operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi+C$$

donde C es una constante de integración.

Expresión del radio de curvatura

Sabemos que $R=(1+y'^2)^{3/2}/y''$ en donde $y'=\operatorname{tg}\varphi$; obteniendo el valor de y'' derivando com respecto de φ el anterior valor de y' con lo que teniendo en cuenta (2) sale:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{(p' \operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\cos^3\varphi}$$

y como $R=1/y''\cos^3\varphi$ así pues queda finalmente $R=(p' \operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Expresión de la diferencial del arco

Sabemos que $ds=R\,d\varphi$ y por la expresión anterior $ds=\dfrac{p' \operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}d\varphi$.

Determinación de algunas curvas

Circunferencia de centro en el eje fijo. Si llamamos O el centro de la circunferência, P el punto generico de ella y M el punto donde la tangente en P corta a este eje, el triangulo OPM da $p=r\cot\varphi$. Analogamente si el centro no está en el eje sino en un punto de ordenada b se tendra $p=(b+r\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Tractriz

Su ecuación conforme a su definición será: $p=c$. *Punto* impropio segun una dirección será para $\varphi=c$.

Parabola

Si la parabola tiene su eje coincidiendo con nuestro eje es pues su ecuación $y^2=2bx$.

Sea P un punto generico y M el punto donde esta

(*) Alumno de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y aspirante a ingreso en la E. E. de Ingenieros de C. C. y P.