trie sphérique, comme on s'en rend compte en prenant pour modèle la géométrie métrique des droites non orientées issues d'un point fixe de l'espace euclidien à 3 dimensions. C'est ce que W. BLASCHKE et les géomètres japonais appelent *«géométrie doublement orientée»*, un même point géométrique donnant naissance à deux éléments considérés comme distincts.

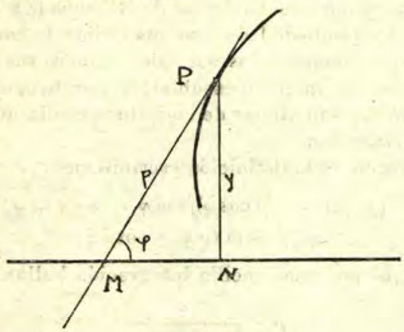
En résumé, la notion d'orientation constitue, malgré ses multiples aspects, une méthode précieuse de recherche et de découverte; elle explique et rend intuitives certaines propriétés d'apparence initiale mystérieuse: s'est cette coordination qui constitue l'élégance des méthodes géométriqees au sens de KLEIN.

Curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$

por *Ginés Nasano Oliva (*)*

Vamos a hacer un pequeño estudio de las curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$.

Designamos por p a la distancia comprendida entre un punto generico de la curva y el de corte de su tangente con un eje fijo. φ es el angulo que forma la tangente con esta recta.



Sistema de coordenadas que apesar de la bibliografia consultada no hemos encontrado ninguna referencia que nos indique hayan sido anteriormente estudiadas.

Cambio de coordenadas

Supongamos que el eje fijo sea el eje OX.

Entonces será:

$$y=p\operatorname{sen}\varphi \tag{1}$$

El valor de la abscisa será arbitrário y dependerá de donde tomemos el eje Y.

Esto se ve inmediatamente al derivar con respecto de φ la igualdad (1)

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi;\quad \text{y como}\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi \tag{2}$$

por tanto

$$x=\int(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi+C$$

donde C es una constante de integración.

Expresión del radio de curvatura

Sabemos que $R=(1+y'^2)^{3/2}/y''$ en donde $y'=\operatorname{tg}\varphi$; obteniendo el valor de y'' derivando com respecto de φ el anterior valor de y' con lo que teniendo en cuenta (2) sale:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\cos^3\varphi}$$

y como $R=1/y''\cos^3\varphi$ así pues queda finalmente $R=(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Expresión de la diferencial del arco

Sabemos que $ds=R\,d\varphi$ y por la expresión anterior $ds=\dfrac{p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}d\varphi$.

Determinación de algunas curvas

Circunferencia de centro en el eje fijo. Si llamamos O el centro de la circunferência, P el punto generico de ella y M el punto donde la tangente en P corta a este eje, el triangulo OPM da $p=r\cot\varphi$. Analogamente si el centro no está en el eje sino en un punto de ordenada b se tendra $p=(b+r\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Tractriz

Su ecuación conforme a su definición será: $p=c$. *Punto* impropio segun una dirección será para $\varphi=c$.

Parabola

Si la parabola tiene su eje coincidiendo con nuestro eje es pues su ecuación $y^2=2bx$.

Sea P un punto generico y M el punto donde esta

(*) Alumno de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y aspirante a ingreso en la E. E. de Ingenieros de C. C. y P.

tangente corta al eje y N la proyección de P sobre el eje perpendicularmente a este eje: $MP=p$, $p\cos\varphi=$ $=2x_1$ y como $x_1=y_1^2/2b$, $p\cos\varphi=y_1^2/b=p^2\operatorname{sen}^2\varphi/b$ por (1) $p=b\cos\varphi/\operatorname{sen}^2\varphi$.

Esta es pues la ecuación de la parabola de parametro b y de eje el eje fijo.

Catenaria

Sea la catenaria de ecuación $y=c\,(e^{x/c}+e^{-x/c})/2$; si derivamos con respecto de x, $y'=\sqrt{y^2-c^2}/c$ ecuación diferencial que verifica, de donde en nuestras coordenadas se deduce $p=2c/\operatorname{sen}2\varphi$.

Evoluta

La ecuación de la evoluta de una curva definida por una ecuación de este tipo admite una expresión inmediata.

Basta ver que si es N el trozo de normal comprendido entre el punto generico de la curva y el eje fijo y si llamamos p_E y φ_E a los correspondientes p y φ de la evoluta se verificara, $p_E=N\pm R\ \varphi_E=\pi/2+\varphi$, segun la concavidad de la curva.

Supongamos que la curva dada presenta la concavidad hacia las y positivas: $p_E=N+R$, $N=p\operatorname{tg}\varphi$ $p_E=(p'\operatorname{sen}2\varphi+2p)/\operatorname{sen}2\varphi$, $\varphi_E=\pi/2+\varphi$.

Teorema. *La evoluta de la tractriz es una catenaria.*

Como la tractriz tiene de ecuación $p=c$. Sustituyendo este valor en la expresión hallada de la evoluta viene $p=2c/\operatorname{sen}2\varphi$, ecuación de la catenaria que hemos obtenido anteriormente.

Cicloides

La cicloide como sabemos satisface a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-ay}{ay}} \quad \text{ó, llamando } \frac{1}{a}=c,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{c}{y}-1$$

y basandonos en esto hallamos inmediatamente su ecuación en nuestras coordenadas: $p=\dfrac{c\cdot\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$.

Teorema. *El radio de curvatura en un punto de la cicloide es dos veces el valor de la normal en este punto.*

La demostración sale enseguida de sustituir p y p' en la expresión que nos da el radio de curvatura, por los valores correspondientes a la cicloide. Así pues obtenemos

$$p'=-c\cdot\cos\varphi\,(1+\operatorname{sen}^2\varphi)/\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$R=c\cdot\cos\varphi\,(1-\cos2\varphi)/\operatorname{sen}^2\varphi=2c\cos\varphi$$

y como $N=p\operatorname{tg}\varphi=c\cos\varphi$, luego $R=2N$, proposición enunciada.

Curvas de Ribaucour

Se da el nombre de curvas de Ribaucour a las que poseen la propiedad de que sus radios de curvatura son proporcionales a las normales en todos sus puntos. Estas curvas fueron descubiertas por Ribaucour al estudiar las superficíes de curvatura media nula, llamadas elasoides.

Partiendo de la definición escribiremos:

$$(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi=m\cdot p\operatorname{tg}\varphi$$
$$p'/p=m\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{cotg}\varphi$$

de las que por una sencilla integración hallase:

$$p=\frac{c}{\cos^m\varphi\operatorname{sen}\varphi},$$

curvas pedidas en las que se observa que para: $m=1$ Catenaria; $m=-1$ Circunferencia; $m=-2$ Cicloide. La expresión del radio de curvatura en un punto de ella será $R=mp\operatorname{tg}\varphi$ ó sea $R=c/\cos^{m+1}\varphi$.

Uma aplicação do diagrama de Venn

por *Maria Teodora Alves*

Como é sabido, o diagrama de Venn permite interpretar graficamente as operações da Álgebra de Boole, aplicadas a duas e a três classes.

Uma ligeira modificação no diagrama de Venn permitirá também estudar e interpretar o teorema

(1) $$H\supset T$$

e os teoremas dele reduzidos.

Na figura seguinte:

O quadrado representa V (classe universal); o círculo de maior raio, H; o círculo de menor raio, T.

A região quadriculada do quadrado será representada por $\sim H$; a região tracejada a traços horizontais por $\sim T$; a região compreendida entre os círculos H e T, por $H\cap\sim T$.

A figura mostra que é sempre:

(2) $$\sim T\supset\sim H$$

que é o teorema contrapositivo de (1). Isto é, demonstrado um teorema, o seu contrapositivo é sempre verdadeiro.