trie sphérique, comme on s'en rend compte en prenant pour modèle la géométrie métrique des droites non orientées issues d'un point fixe de l'espace euclidien à 3 dimensions. C'est ce que W. BLASCHKE et les géomètres japonais appelent *«géométrie doublement orientée»*, un même point géométrique donnant naissance à deux éléments considérés comme distincts.

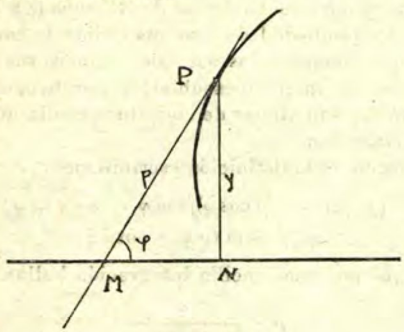
En résumé, la notion d'orientation constitue, malgré ses multiples aspects, une méthode précieuse de recherche et de découverte; elle explique et rend intuitives certaines propriétés d'apparence initiale mystérieuse: s'est cette coordination qui constitue l'élégance des méthodes géométriqees au sens de KLEIN.

Curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$

por *Ginés Nasano Oliva* (*)

Vamos a hacer un pequeño estudio de las curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$.

Designamos por p a la distancia comprendida entre un punto generico de la curva y el de corte de su tangente con un eje fijo. φ es el angulo que forma la tangente con esta recta.



Sistema de coordenadas que apesar de la bibliografia consultada no hemos encontrado ninguna referencia que nos indique hayan sido anteriormente estudiadas.

Cambio de coordenadas

Supongamos que el eje fijo sea el eje OX.

Entonces será:

(1) $$y=p\operatorname{sen}\varphi$$

El valor de la abscisa será arbitrário y dependerá de donde tomemos el eje Y.

Esto se ve inmediatamente al derivar con respecto de φ la igualdad (1)

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi;\quad \text{y como}\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi$$

(2) $$\frac{dx}{d\varphi}=(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi$$

por tanto

$$x=\int(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi+C$$

donde C es una constante de integración.

Expresión del radio de curvatura

Sabemos que $R=(1+y'^2)^{3/2}/y''$ en donde $y'=\operatorname{tg}\varphi$; obteniendo el valor de y'' derivando com respecto de φ el anterior valor de y' con lo que teniendo en cuenta (2) sale:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\cos^3\varphi}$$

y como $R=1/y''\cos^3\varphi$ así pues queda finalmente $R=(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Expresión de la diferencial del arco

Sabemos que $ds=R\,d\varphi$ y por la expresión anterior $ds=\dfrac{p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}d\varphi$.

Determinación de algunas curvas

Circunferencia de centro en el eje fijo. Si llamamos O el centro de la circunferência, P el punto generico de ella y M el punto donde la tangente en P corta a este eje, el triangulo OPM da $p=r\cot\varphi$. Analogamente si el centro no está en el eje sino en un punto de ordenada b se tendra $p=(b+r\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Tractriz

Su ecuación conforme a su definición será: $p=c$. *Punto* impropio segun una dirección será para $\varphi=c$.

Parabola

Si la parabola tiene su eje coincidiendo con nuestro eje es pues su ecuación $y^2=2bx$.

Sea P un punto generico y M el punto donde esta

(*) Alumno de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y aspirante a ingreso en la E. E. de Ingenieros de C. C. y P.