tangente corta al eje y N la proyección de P sobre el eje perpendicularmente a este eje: $MP=p$, $p\cos\varphi = 2x_1$ y como $x_1=y_1^2/2b$, $p\cos\varphi=y_1^2/b=p^2\operatorname{sen}^2\varphi/b$ por (1) $p=b\cos\varphi/\operatorname{sen}^2\varphi$.

Esta es pues la ecuación de la parabola de parametro b y de eje el eje fijo.

Catenaria

Sea la catenaria de ecuación $y=c\,(e^{x/c}+e^{-x/c})/2$; si derivamos con respecto de x, $y'=\sqrt{y^2-c^2}/c$ ecuación diferencial que verifica, de donde en nuestras coordenadas se deduce $p=2c/\operatorname{sen}2\varphi$.

Evoluta

La ecuación de la evoluta de una curva definida por una ecuación de este tipo admite una expresión inmediata.

Basta ver que si es N el trozo de normal comprendido entre el punto generico de la curva y el eje fijo y si llamamos p_E y φ_E a los correspondientes p y φ de la evoluta se verificara, $p_E=N\pm R$ $\varphi_E=\pi/2+\varphi$, segun la concavidad de la curva.

Supongamos que la curva dada presenta la concavidad hacia las y positivas: $p_E=N+R$, $N=p\operatorname{tg}\varphi$ $p_E=(p'\operatorname{sen}2\varphi+2p)/\operatorname{sen}2\varphi$, $\varphi_E=\pi/2+\varphi$.

Teorema. *La evoluta de la tractriz es una catenaria.*

Como la tractriz tiene de ecuación $p=c$. Sustituyendo este valor en la expresión hallada de la evoluta viene $p=2c/\operatorname{sen}2\varphi$, ecuación de la catenaria que hemos obtenido anteriormente.

Cicloides

La cicloide como sabemos satisface a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-ay}{ay}}$$ ó, llamando $\frac{1}{a}=c$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{c}{y}-1$ y basandonos en esto hallamos inmediatamente su ecuación en nuestras coordenadas: $p=\dfrac{c\cdot\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$.

Teorema. *El radio de curvatura en un punto de la cicloide es dos veces el valor de la normal en este punto.*

La demostración sale enseguida de sustituir p y p' en la expresión que nos da el radio de curvatura, por los valores correspondientes a la cicloide. Así pues obtenemos

$$p'=-c\cdot\cos\varphi\,(1+\operatorname{sen}^2\varphi)/\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$R=c\cdot\cos\varphi\,(1-\cos 2\varphi)/\operatorname{sen}^2\varphi=2c\cos\varphi$$

y como $N=p\operatorname{tg}\varphi=c\cos\varphi$, luego $R=2N$, proposición enunciada.

Curvas de Ribaucour

Se da el nombre de curvas de Ribaucour a las que poseen la propiedad de que sus radios de curvatura son proporcionales a las normales en todos sus puntos. Estas curvas fueron descubiertas por Ribaucour al estudiar las superficíes de curvatura media nula, llamadas elasoides.

Partiendo de la definición escribiremos:

$$(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi=m\cdot p\operatorname{tg}\varphi$$
$$p'/p=m\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{cotg}\varphi$$

de las que por una sencilla integración hallase:

$$p=\frac{c}{\cos^m\varphi\operatorname{sen}\varphi},$$

curvas pedidas en las que se observa que para: $m=1$ Catenaria; $m=-1$ Circunferencia; $m=-2$ Cicloide. La expresión del radio de curvatura en un punto de ella será $R=mp\operatorname{tg}\varphi$ ó sea $R=c/\cos^{m+1}\varphi$.

Uma aplicação do diagrama de Venn

por ***Maria Teodora Alves***

Como é sabido, o diagrama de Venn permite interpretar graficamente as operações da Álgebra de Boole, aplicadas a duas e a três classes.

Uma ligeira modificação no diagrama de Venn permitirá também estudar e interpretar o teorema

(1) $$H\supset T$$

e os teoremas dele reduzidos.

Na figura seguinte:

O quadrado representa V (classe universal); o círculo de maior raio, H; o círculo de menor raio, T.

A região quadriculada do quadrado será representada por $\sim H$; a região tracejada a traços horizontais por $\sim T$; a região compreendida entre os círculos H e T, por $H\cap\sim T$.

A figura mostra que é sempre:

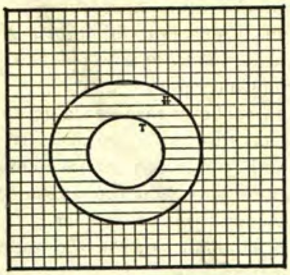
(2) $$\sim T\supset\sim H$$

que é o teorema contrapositivo de (1). Isto é, demonstrado um teorema, o seu contrapositivo é sempre verdadeiro.

A expressão de $\sim T$, como mostra a figura, é

(3) $$\sim T \equiv \sim H \cup (H \cap \sim T)\,.$$

Se H e T não forem classes vasias, o produto $H \cap \sim T$ só poderá ser nulo (H e $\sim T$ serão divisores



de zero) se H e $\sim T$ forem complementares uma da outra, o que implica

(4) $$H \equiv T$$

e (1) transformar-se-á, por substituição de equivalentes, em

$$T \supset H$$

que é o teorema recíproco de (1).

Também de (4), ou de H e $\sim T$ serem complementares, se deduz

$$\sim H \equiv \sim T$$

e, portanto, (2) transformar-se-á em

$$\sim H \supset \sim T$$

que é o teorema contràrio de (1).

Em resumo, demonstrado o teorema (1), o teorema contrapositivo é sempre verdadeiro, mas se

$$H \equiv T,$$

serão também verdadeiros o teorema recíproco e o teorema contrário.

Em vez de estabelecer que um teorema e o seu recíproco são simultaneamente verdadeiros quando se verifica a condição $H \equiv T$, poderiamos seguir um processo inverso e deduzir a condição $H \equiv T$ do facto de serem verdadeiros um teorema e o seu recíproco.

Com efeito uma das propriedades da teoria das classes é:

«Se $K \subset \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \supset K$, então é $K \equiv \mathcal{L}$[1]».

Se substituirmos K por T e $\mathcal{L}$ por H, vem:

Se $T \subset H$ e $H \supset T$, então é $H \equiv T$.

Podemos, pois, dizer que se um teorema e o seu recíproco são verdadeiros, H e T são identicos.

Estes resultados podem ser enuciados de outro modo.

No teorema

$$H \supset T$$

diz-se que H é condição suficiente para T, e que T é condição necessária para H.

Servindo-nos dos termos suficiente e necessário, podemos dizer que:

Se uma condição, que é suficiente, é também necessária, os dois teoremas, directo e recíproco, são verdadeiros; e recíprocamente, se são verdadeiros dois teoremas, um dos quais é recíproco do outro, há uma condição suficiente que é necessária.

No compêndio de geometria para o 7.º ano da autoria dos Snrs. Doutores A. Nicodemos e J. Calado, o estudo dos teoremas deduzidos de um dado teorema é feito pelo recurso a considerações de outra ordem, mas eu julgo que a interpretação gráfica dessa questão, como aqui foi apresentada, além de a esclarecer, ajudará também a fixá-la.

Eu sinto-me na obrigação de dizer que esta minha observação ao compêndio da autoria daqueles ilustres Professores, e outras que já tive oportunidade de fazer em nada vêm desmerecer o valor do compêndio, cuja leitura contribuiu para o ajustamento de algumas das minhas ideias e, sobretudo, fez despertar em mim o desejo de fazer o ajustamento de outras.

(1) Tarski — Introdution to Logic, pág. 75.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS

Paris, 17-22 de Outubro de 1949

Tema: *Ciência e Método.*

Presidentes de honra: Jacques Hadamard e André Lalande, membros do Instituto.

Presidentes: Émile Borel, membro do Instituto e Gaston Bachelard, professor da Sorbonne;

Organização: O congresso compreenderá as 11 secções seguintes de que se indicam os respectivos presidentes:

Lógica — Prof. René Poirier.

Filosofia Matemática — Prof. Arnaud Denjoy.