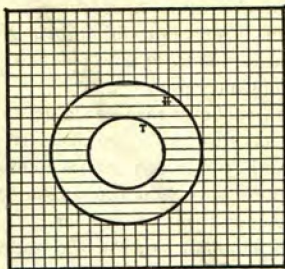


A expressão de  $\sim T$ , como mostra a figura, é

$$(3) \quad \sim T \equiv \sim H \cup (H \cap \sim T).$$

Se  $H$  e  $T$  não forem classes vazias, o produto  $H \cap \sim T$  só poderá ser nulo ( $H$  e  $\sim T$  serão divisores



de zero) se  $H$  e  $\sim T$  forem complementares uma da outra, o que implica

$$(4) \quad H \equiv T$$

e (1) transformar-se-á, por substituição de equivalentes, em

$$T \supset H$$

que é o teorema recíproco de (1).

Também de (4), ou de  $H$  e  $\sim T$  serem complementares, se deduz

$$\sim H \equiv \sim T$$

e, portanto, (2) transformar-se-á em

$$\sim H \supset \sim T$$

que é o teorema contrário de (1).

Em resumo, demonstrado o teorema (1), o teorema contrapositivo é sempre verdadeiro, mas se

$$H \equiv T,$$

serão também verdadeiros o teorema recíproco e o teorema contrário.

Em vez de estabelecer que um teorema e o seu recíproco são simultaneamente verdadeiros quando se verifica a condição  $H \equiv T$ , poderíamos seguir um

processo inverso e deduzir a condição  $H \equiv T$  do facto de serem verdadeiros um teorema e o seu recíproco.

Com efeito uma das propriedades da teoria das classes é:

«Se  $K \subset L$  e  $L \supset K$ , então é  $K \equiv L$ ».

Se substituirmos  $K$  por  $T$  e  $L$  por  $H$ , vem:

Se  $T \subset H$  e  $H \supset T$ , então é  $H \equiv T$ .

Podemos, pois, dizer que se um teorema e o seu recíproco são verdadeiros,  $H$  e  $T$  são idênticos.

Estes resultados podem ser enunciados de outro modo. No teorema

$$H \supset T$$

diz-se que  $H$  é condição suficiente para  $T$ , e que  $T$  é condição necessária para  $H$ .

Servindo-nos dos termos suficiente e necessário, podemos dizer que:

Se uma condição, que é suficiente, é também necessária, os dois teoremas, directo e recíproco, são verdadeiros; e reciprocamente, se são verdadeiros dois teoremas, um dos quais é recíproco do outro, há uma condição suficiente que é necessária.

No compêndio de geometria para o 7.º ano da autoria dos Srs. Doutores A. Nicodemos e J. Calado, o estudo dos teoremas deduzidos de um dado teorema é feito pelo recurso a considerações de outra ordem, mas eu julgo que a interpretação gráfica dessa questão, como aqui foi apresentada, além de a esclarecer, ajudará também a fixá-la.

Eu sinto-me na obrigação de dizer que esta minha observação ao compêndio da autoria daqueles ilustres Professores, e outras que já tive oportunidade de fazer em nada vêm desmerecer o valor do compêndio, cuja leitura contribuiu para o ajustamento de algumas das minhas ideias e, sobretudo, fez despertar em mim o desejo de fazer o ajustamento de outras.

(1) Tarski — Introduction to Logic, pág. 75.

## MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS

Paris, 17-22 de Outubro de 1949

**Tema:** *Ciência e Método.*

**Presidentes de honra:** Jacques Hadamard e André Lalande, membros do Instituto.

**Presidentes:** Émile Borel, membro do Instituto e Gaston Bachelard, professor da Sorbonne;

**Organização:** O congresso compreenderá as 11 secções seguintes de que se indicam os respectivos presidentes:

*Lógica* — Prof. René Poirier.

*Filosofia Matemática* — Prof. Arnaud Denjoy.

*Cálculo das Probabilidades* — Prof. Maurice Fréchet.

*Mecânica e Astronomia* — Prof. Joseph Pérès.

*Física Teórica* — Prof. Louis de Broglie.

*Físico-Química* — Pierre Auger, Chefe da Secção das Ciências, UNESCO.

*Biologia* — Prof. Georges Teissier, Director do C. N. R. S.

*Ciências da Terra* — Prof. Jean Piveteau.

*Epistemologia* — Prof. Gaston Bachelard.

*História das Ciências* — Pierre Sergescu, presidente da Academia Internacional de História das Ciências.

*Pedagogia das Ciências* — Prof. Albert Chatelet, Director da Faculdade de Ciências de Paris.

Cada secção organizará um Colóquio compreendendo a exposição de comunicações, que serão *solici-tadas individualmente por cada presidente*, e a discussão das exposições entre os especialistas que para tal tiverem sido convidados.

*Síntese Geral das Ciências* — Prof. Raymond Bayer.

O final do Congresso será dedicado à Síntese Geral das Ciências: cada secção apresentará um relatório sobre o conjunto dos trabalhos e dos resultados obtidos, numa ou várias secções plenárias que o Instituto

Internacional de Filosofia se encarregará de organizar, de acordo com cada Presidente de Colóquio e com o Prof. R. Bayer, Administrador permanente do Instituto.

Haverá 3 categorias de *participantes* :

1.º *Convidados* que apresentarão *comunicações*. (Prevê-se uma dezena por Colóquio). 2.º *Convidados* que participarão nas *discussões*; 3.º *Ouvintes* que se inscreverão no Congresso.

Cada comunicação durará cerca de 45 minutos e as intervenções nas discussões serão de 10 minutos.

Cada Colóquio publicará em fascículo separado as suas actas que compreenderão o resumo das comunicações e o essencial das discussões.

Os congressistas convidados não pagam inscrição e os ouvintes 500 francos.

A inscrição não dá direito às actas mas sim o de assistir a todas as sessões dos diferentes Colóquios e de participar em todas as manifestações que venham a ser organizadas por ocasião do Congresso.

Toda a correspondência deve ser dirigida a: *Organização Geral do Congresso* — Mlle. Delorme, Secretariado do Instituto Internacional de Filosofia, 61, rue du Mont-Cenis, Paris, 18e.

## NOTICIÁRIO

### JUBILEU CIENTÍFICO DO PROFESSOR FRÉCHET

Atinge no próximo ano lectivo a idade de aposentação o Prof. Fréchet. Os seus amigos, colegas e alunos testemunhando a sua admiração, dedicação e reconhecimento associaram-se para celebrar o seu Jubileu Científico. Esta manifestação será caracterizada por uma grande simplicidade para corresponder ao desejo expresso pelo homenageado.

No princípio do ano de 1950 serão atribuídos um ou dois prémios ao autor ou autores dum trabalho inédito sobre Análise Geral. A Comissão encarregada do exame dos trabalhos apresentados e atribuição dos prémios será nomeada pela Sociedade Matemática de França, que publicará no seu Boletim os nomes dos premiados. Publicamos seguidamente o

*Regulamento do Concurso*: Os manuscritos em lingua estrangeira devem ser acompanhados dum resumo em francês e devem ser endereçados ao Presidente da Sociedade Matemática de França, Instituto Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e. O prazo de recepção termina em 28 de Fevereiro de 1950. Os manuscritos devem tratar de Análise Geral (teoria dos espaços abstractos, transformações de elementos abstractos em elementos abstractos) ou das suas aplicações. Os manuscritos devem indicar o nome e di-

recção do autor. Os autores que desejem eventualmente conservar-se anónimos poderão inscrever em epigrafe do manuscrito uma frase reproduzida em envelope fechado contendo o seu nome e direcção. Os envelopes que corresponderem às memórias não aceites serão destruídos sem serem abertos.

Todas as subscrições para a homenagem a prestar devem ser enviadas a: Prof. Daniel Dugué, 52, rue d'Authie, Caen, Calvados, France (Compte de Chèques postaux: Rouen, 131-147).

### PRÉMIO EINSTEIN

Celebrando o 70º aniversário do ilustre matemático e físico a Universidade de Princeton instituiu o prémio Einstein, prémio de 15.000 dólares que será atribuído todos os triénios ao sábio cujos trabalhos forem considerados como a mais importante contribuição aos conhecimentos humanos no domínio das ciências matemáticas ou físicas.

### OS MÉTODOS TENSORIAIS DA MECÂNICA ANALÍTICA

Em Março e Abril de 1949 o Prof. A. Liechnérowicz da Universidade de Strasbourg, realizou no Instituto

de Astrofísica de Paris (C. N. R. S.) uma série de lições sobre *Os métodos tensoriais na Mecânica Analítica*. Mostrou primeiro que as equações canónicas da Mecânica Analítica tomam uma forma simples utilizando o Cálculo Tensorial nos espaços de configuração dos sistemas, e tratou depois sobretudo das métricas de Riemann que podem ser impostas às variedades de configuração para reduzir as equações das trajectórias dos pontos figurativos dos estados dos sistemas à forma geodésica.

## CONFERÊNCIAS DO PALÁCIO DA DESCOBERTA

Dentre as variadas e numerosas conferências realizadas no Palácio da Descoberta destacaremos: *Les mathématiques et les sciences sociales* pelo Prof. M. Fréchet da Faculdade de Ciências de Paris, em 19 de Março, e *La topologie* por Sainte-Lague, professor do Conservatoire National des Arts et Métiers, em 30 de Abril deste ano.

M. Z.

## MOVIMENTO MATEMÁTICO EM ESPANHA

No Conselho Superior de Investigações Científicas e na Faculdade de Ciências Matemáticas de Madrid durante Fevereiro e Março deste ano o Prof. H. Wold, director do Instituto de Estatística da Universidade de Upsala, fez um curso sobre «Processos estocásticos» e quatro conferências sobre «Econometria» (Análise de regressão). Estas lições redigidas pelo Prof. A. Guiraum de Granada serão em breve publicadas.

No Instituto Jorge Juan de Matemática o Prof. C. Gini, director da Faculdade de Ciências Económicas e Estatísticas de Roma, tratou da «Metodologia Estatística».

No Instituto Nacional de Técnica Aeronautica o Prof. J. Kampé de Fériet, director do Instituto de Aerodinâmica da Universidade de Lille (França) fez um curso sobre «Processos estocásticos e aplicações à teoria da turbulência».

O Prof. Gaston Julia, da Faculdade de Ciências de Paris, fez no Seminário Matemático da Universidade

de Barcelona um curso sobre «Operadores no espaço de Hilbert» e no Instituto Nac. de Técnica Aeronautica três lições sobre «Representação conforme».

O Prof. Severi de Roma fez várias conferências sobre «Geometria Algébrica» na R. Academia de Ciências e no Instituto Jorge Juan de Matemáticas.

Também o grande matemático holandês Brouwer realizou uma conferência de 3 horas sobre a «Influencia da Matematica na Lógica».

O Prof. M. Picone de Roma fez uma palestra sobre «As actividades do Instituto Para As Aplicações do Cálculo» de que é o director.

No Instituto Nac. de Técnica Aeronautica tiveram também lugar um curso sobre «Equações às derivadas parciais de tipo parabólico e as suas aplicações aos vãos ultrasónicos» feito pelo Prof. Rey Pastor, e várias conferências sobre «As aplicações da teoria das funções a problemas de aerodinâmica» pelo Prof. Eng. Milne-Thomson.

S. R.

## SEMINÁRIOS DA UNIVERSIDADE DE PARIS

### SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA

Sob a direcção do Professor Louis de Broglie realizaram-se durante o ano lectivo as reuniões deste Seminário da Faculdade de Ciências Paris onde foram expostos e discutidos os seguintes temas:

Nov. 23 — Mme. Tonnelat — Rapport sur le Congrès Solvay.

Nov. 30 — M. Daudel — Applications des fonctions d'onde moléculaires.

Déc. 7 — M. D. Massignon — Sur la théorie des liquides de Max Born et de H. S. Green.

Déc. 14 — M. Valatin — Quantités invariantes relativistes et couplage des électrons de Dirac.

Déc. 21 — M. Durand — Sur la diffraction des ondes.

Janv. 4 — M. Magnan — La mesure des sections

efficaces d'absorption des neutrons avec une file à oscillateurs.

Janv. 11 — M. Costa de Beauregard — Sur le premier mémoire de Schwinger.

Janv. 18 — M. Slansky — Spin et vitesse.

Janv. 25 — M. Bass — La densité de probabilité de Wigner en mécanique ondulatoire.

Fév. 1 — M. Causse — La notion de masse et ses conditions en relativité cinématique.

Fév. 8 — M. d'Espagnat — Sur la théorie du méson.

Fév. 15 — M. Bass — Application hydrodynamique de la densité de probabilité de Wigner.

Fév. 22 — M. Colombo — Les principes de la similitude électrodynamique.

Mars 8 — M. Potier — Sur la théorie relativiste des particules à spin.

Mars 15 — Mme. Tonnelat — Rapport sur le Congrès Solvay.

Mars 22 — M. Kahan — La propagation des ondes électromagnétiques au dessus du sol. Solution du problème de l'onde de surface.

Avril 5 — M. A. Gião — Les équations de Codazzi et les rapports entre gravitation et électromagnétisme.

Avril 26 — M. Colombo — La théorie analytique du signal.

## SEMINÁRIO DE CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

Como complemento à pequena notícia do número anterior sobre a actividade deste seminário da Faculdade de Ciências de Paris damos seguidamente a indicação das exposições de trabalhos originais ou de análises de memórias e livros feitos a partir de Fevereiro deste ano:

Fév. 4 — Quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques — D. Dugué.

Fév. 11 — Valeurs typiques d'ordres zéro ou infini — Fréchet.

Fév. 18 — Les sondages d'opinion publique (J. Stoczel) — Mlle. Duhamel.

Fév. 25 — La Cybernétique: quelques extraits du livre de N. Wiener — Le Cam.

Mars 4 — Une classe de «statistiques» à distribution asymptotiquement laplacienne (Hoeffding) — R. Féron.

Mars 11 — Sur une généralisation des polynômes de Legendre suggérée par un problème de Calcul des Probabilités — Pollaczek.

Mars 18 — Sur des tests d'hypothèses — Mlle. C. Rothschild.

Mars 25 — Variétés sur des questions de Statistique — Dumas.

Avril 1 — Problèmes de probabilités suscités par la théorie des télécommunications — Fortet.

Avril 8 — Variétés sur des questions de Statistique (suite) — Dumas.

Avril 29 — Une classe de «statistiques» à distribution asymptotiquement laplacienne (Hoeffding) — R. Féron.

Mai 13 — Retard dans l'atterrissage des avions (T. Pearcey) — R. Risser.

Mai 27 — Sur les théorèmes limites de Kolmogorov-Smirnov relatifs aux distributions empiriques (Feller) — R. Féron.

Jun 3 — Sur un test non paramétrique de normalité — D. Dugué.

Jun 10 — Le système de courbes de Pearson et le schéma d'urne de Polya (A. Bricas) — M. elle J. Duhamel.

Jun 17 — Applications de la théorie des ensembles statistiques renouvelés — R. Féron.

Jun 24 — Sur les lois de probabilité à priori des paramètres d'une loi laplacienne ou binomiale — E. Baticle.

M. Z.

## SEMINÁRIO DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

No segundo semestre as sessões do seminário foram quase exclusivamente preenchidas por conferências do Professor Henri Cartan que expôs, em alguns capítulos, ideias originais. Eis os títulos dessas conferências, no seguimento daquelas que indicámos no número anterior:

8 e 9 — Operadores de homotopia (continuação): subdivisão baricêntrica, deformações; homologia singular dum complexo simplicial, por H. Cartan. 10 — Coeficientes locais, por Frenkel. 11 — Produtos tensoriais, por J. Serre. 12 — Feixes e carapaças (Definições e exemplos). 13 — Feixes (continuação): estudo local. 14 — Feixes finos. 15 — Produtos tensoriais de feixes. 16 — Teoremas fundamentais da teoria dos feixes. As conferências 12-16 foram feitas pelo Prof. H. Cartan.

## SEMINÁRIO DE ÁLGEBRA SUPERIOR

A partir do mês de Março, este seminário ocupou-se das aplicações da Álgebra Moderna à Geometria, tendo o Prof. P. Dubreil efectuado uma série de conferências sobre *Varietades Algébricas*, detinadas a um auditório não especializado.

## SEMINÁRIO BOURBAKI

A segunda reunião do seminário teve lugar nos dias 12, 13 e 14 de Março com os seguintes assuntos:

1 — Continuação da exposição dos trabalhos de Koszul, por H. Cartan. 2 — Continuação da exposição sobre a demonstração por Weil da hipótese de Riemann, por C. Chevalley. 3 — Continuação da exposição de P. Samuel sobre a teoria das correspondências birracionais, por Gauthier. 4 — Os recentes resultados de Brauer na teoria dos Grupos, por Krasner. 5 — A demonstração de Wielandt da hipótese da torre dos automorfismos, por Braconier. 6 — Os trabalhos de Petrowski sobre as equações de derivadas parciais não lineares, por L. Schwartz.

A terceira reunião do seminário efectuou-se em 28, 29 e 30 de Maio, sendo feitas as seguintes conferências:

1 — Os trabalhos de Koszul, 3.<sup>a</sup> exposição por H. Cartan. 2 — Sobre o Teorema de Koszul, por C. Chevalley. 3 — Sobre o problema de Cauchy para sistemas de equações de derivadas parciais (segundo uma memória de Petrowsky, Recueil Math. (Sbornik), 1937, t. 2 (44), p. 815-868)), por L. Schwartz. 4 — Teoremas fundamentais da teoria das funções téta (segundo memórias de Poincaré e Frobenius), por A. Weil. 5 — Continuação da exposição sobre os trabalhos recentes de R. Brauer na teoria dos grupos (Brauer:

«On Artin's L-series with general group characters», Ann. of. Math. (2) 48 (1947), p. 502-514), por Krasner. 6. — Trabalhos de Heins sobre diversas majorações do crescimento de funções analíticas de sub-harmónicas, por M<sup>me</sup> M. H. Schwartz.

Para o ano de 1949-1950 estão previstas três reuniões do seminário (em Dezembro, Março e Maio). Alguns dos assuntos que serão tratados encontram-se já afixados.

P. G.

## NOTAS DE MATEMÁTICA

### NOTA I

Na *Gazeta de Matemática* n.ºs 37-38, de Agosto-Dezembro 1948, o Sr. Mauricio Matos Peixoto publica uma demonstração da desigualdade

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S-x_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

( $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_{n+1} > 0$  e  $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ).

Afigura-se-nos essa demonstração escusadamente complicada de tal modo que ficam escondidas as razões do facto que se procura esclarecer. Mais simples será notar que desejamos provar

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{(n-1)x_i}{S-x_i} - 1 \right) \geq 0,$$

isto é:

$$\sum_{i=1}^n \frac{nx_i - S}{S-x_i} \geq 0.$$

E que, se for  $j$  o menor dos índices para o qual  $nx_j - S \geq 0$ , se tem não só

$$\sum_{i=j}^n \frac{nx_i - S}{S-x_i} \geq \sum_{i=j}^n \frac{nx_i - S}{S-x_i},$$

mas ainda (para  $j > 1$ )

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{nx_i - S}{S-x_i} \geq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{nx_i - S}{S-x_j}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \frac{nx_i - S}{S-x_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^n nx_i - nS}{S-x_j} = 0$$

Berkeley

HUGO RIBEIRO

### NOTA II

**Sobre a desigualdade**  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S-x_i} \geq \frac{n}{n-1}$   
estabelecida pelo Prof. M. Matos Peixoto

A relação entre números positivos

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S-x_i} \geq \frac{n}{n-1},$$

onde  $S = \sum_{i=1}^n x_i$ , é um caso particular de uma desigualdade deduzida da relação de Jensen:

$$(2) \quad f \left[ \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right] < < \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

no qual  $f(x)$  é função *convexa* de  $x$  definida em um intervalo fechado  $[a, b]$  e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontos pertencentes ao mesmo.

Com efeito.

Consideremos  $f(x) = x(k-x)^{-1}$ ,  $x > 0$  variando em  $[a, b]$  e  $k > b > 0$ .

A função  $f(x)$ , assim definida, é convexa; pois  $f''(x) > 0$  e o critério de convexidade é verificado.

Substituindo a expressão de  $f(x)$  em (2), virá:

$$\frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left[ k - \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right]^{-1} < < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{k+x_i}$$

ou

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{k-x_i} \geq S \left( k - \frac{S}{n} \right)^{-1}$$

Fazendo-se  $k=S$ , esta desigualdade geral fornece a relação (1):

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S-x_i} \geq \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} = \frac{n-1}{n}.$$

Rio de Janeiro

GASPAR S. M. RODRIGUES PEREIRA