ANTOLOGIA

O DESENVOLVIMENTO DA TOPOLOGIA *

*por **Maurice Fréchet e Ky Fan***

Na história do desenvolvimento das ciências geométricas, a topologia é um ramo relativamente recente. Basta citar os termos seguintes, empregados por Gauss em 1833 para definir o estado da topologia nesta época: «Da geometria de situação, que Leibniz presentiu e sobre a qual foi reservado unicamente a dois geómetras, Euler e Vandermonde, lançar um ligeiro golpe de vista, pouco mais do que nada sabemos e adquirimos um século e meio depois».

É Riemann quem, procurando as relações profundas entre o estudo das superfícies e a teoria das funções, fez em 1851 as primeiras aplicações da topologia às matemáticas clássicas. Com os trabalhos de Riemann, os de Möbius, Jordan, Schälfli, Dyck, Betti, Kronecker vieram constituir os primeiros resultados da topologia combinatória. Mas estes geómetras não foram senão os percursores desta ciência, que deve os seu mais notáveis progressos a H. Poincaré. As cinco memórias que publicou sobre esta ciência foram o ponto de partida dum grande número de pesquisas de diversos autores, entre os quais podemos citar Brouwer, Lebesgue, Veblen, Alexander, Lefschetz, Alexandroff, Hopf. Com Poincaré, começou em 1895 a teoria sistemática da topologia combinatória como hoje é considerada. Pode afirmar-se que o ilustre geómetra foi o promotor da topologia combinatória.

Por outro lado, independentemente da topologia combinatória, G. Cantor fundou em 1879 a topologia dos conjuntos com a teoria dos conjuntos. Foi ele o primeiro a definir as noções topológicas fundamentais no espaço cartesiano a n dimensões e obteve os resultados essenciais sobre a estrutura topológica da recta e do plano. A teoria de Cantor foi em breve utilizada e largamente difundida pela escola francesa da teoria das funções. À medida que estas ideias se espalhavam, começava a pensar-se na sua possível aplicação aos conjuntos, não já de pontos mas de curvas ou de funções. Esta ideia devida a Ascoli, Volterra, Hadamard, surgia em 1884 e estava estreitamente ligada à creação do cálculo funcional por Volterra em 1887. Mas mais tarde, tomou-se consciência de que o conhecimento da natureza dos elementos do conjunto (pontos, curvas, funções, etc.) pouco importava e que o essencial era a estrutura topológica entre os elementos do conjunto. Assim, libertando-se do que há de comum às propriedades dos conjuntos de pontos e de funções, tinha-se sido levado a generalizar o conceito de espaço e introduzia-se a topologia dos espaços abstractos, espaços cujos pontos são elementos abstractos de natureza qualquer. As primeiras tentativas nesta via foram feitas por um de nós dois em 1904. Desde então, a topologia dos conjuntos teve um desenvolvimento novo para se tornar o que se poderia com mais propriedade descrever sob o nome de *topologia abstracta* ou *togologia geral* [1].

Uma boa parte das recentes investigações topológicas é consagrada à fusão da topologia combinatória e da topologia dos conjuntos. Este objectivo foi atingido no mais alto grau nestes últimos anos. Toda a teoria de Poincaré se encontra hoje generalizada a conjuntos muito gerais. Este progresso exerceu uma penetrante influência sobre toda a topologia contemporânea.

O desenvolvimento considerável da Topologia contemporânea provém de ser actualmente impossível o conceber uma teoria de Análise que não assente num estudo topológico prévio. Os factos topológicos estão, apesar de aparentemente vagos, estreitamente ligados aos mais precisos factos matemáticos. Em quase todos os ramos da Análise ou da Geometria, considerações topológicas conduzem frequentemente a impulsos dos mais fecundos. A introdução dos métodos topológicos

---

* De «*Introduction à la Topologie Combinatoire*» — I — Initiation, por M. Fréchet e Ky Fan, (Lib. Vuibert, Paris, 1946). Cap. I — Generalidades sobre a Topologia, § 10.

(1) Para ter uma ideia geral sobre a topologia consultar: F. Severi, *Topologia*, págs. 152–159, (Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales, Serie B, Publicación n.º 9), Buenos Aires, 1931. Para um estudo aprofundado deste ramo da topologia, o leitor poderá utilizar: M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1928; N. Bourbaki, *Eléments de mathématique: Livre III, Topologie générale (Actual. scient. et industr.*, n.º 858), Paris, Hermann, 1940; W. Sierpinski, *Introduction to general topology*, Toronto, The Univ. of Toronto Press, 1934; P. Alexandroff e H. Hopf, *Topologie* I, págs. 23–124, Berlin, Julius Springer, 1935; G. T. Whyburn, *Analytic topology (Amer. Math. Soc. Colloq. Publications*, n.º 28), New-York, 1942.

em Análise remonta a RIEMANN e a sua aplicação foi renovada por POINCARÉ nas suas pesquisas sobre as equações diferenciais e sobre os sistemas dinâmicos. Desde então, a aplicação dos métodos topológicos no Cálculo das variações por BIKHKOFF, MORSE, LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, na Teoria das equações diferenciais e funcionais por BIRKHOFF, KELLOGG, SCHAUDER, em Geometria algébrica por LEFSCHETZ, SEVERI, VAN DER WAERDEN, em Geometria diferencial por diversos autores, constitue uma renovação de cada uma destas disciplinas matemáticas.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. P. — ALGEBRA SUPERIOR — Alguns problemas dos exercícios de revisão e 1.º exame de frequência.

2884 — Mostrar, a partir da definição, que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$.

R: *Se* $|a_n/a_{n-1} - L| < \delta$ *para* $n > N(\delta)$ *tem-se* $|a_{n+1}/a_n - L| < \delta$, *para* $n > N(\delta) - 1$.

2885 — Mostrar, a partir da definição, que, se $\lim a_n = 2$, é $\lim 1/a_n = 1/2$. R: *notar que* $a_n > 1$ *para* $n > n_1$.

2886 — Estudar, sobre a *circunferência de convergência*, as séries:

$$a)\ \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2};\quad b)\ \sum_1^\infty \frac{z^n}{n};\quad c)\ \sum_1^\infty \frac{2^n}{2n+1} z^n;\quad d)\ \sum_1^\infty n z^n.$$

R: a) *O raio de convergencia é* 1. *Sobre a circunferência de convergência*, $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$;

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2} = \sum_1^\infty \frac{\cos n\theta}{n^2} + i \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}.$$

Logo, a série abeliana converge sobre a circunferência. b) *O raciocínio anterior a nada conduz. Aplicamos o resultado geral seguinte:*

A série $\sum\limits_1^\infty a_n \cos n\theta$ *é convergente, desde que* $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$, $\theta \neq 2k\pi$. *Logo, sobre toda a circunferência, excepto no ponto* $z = 1$, *a série de potências converge; para* $z = 1$, *vemos que diverge.* c) $\sum\limits_1^\infty \frac{2^n}{2n+1} z^n$. *Como*

$$\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{2n+1}} = 2/\lim \sqrt[n]{2n+1} = 2\Big/\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2,$$

o raio de convergência é $1/2$. *Sobre a circunferência de convergência,*

$$z = [\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]/2,\ z^n = (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)/2^n.$$

$$\sum_1^\infty \frac{2^n}{2n+1} Z^n = \sum_1^\infty \frac{1}{2n+1} \cos n\theta + i \sum_1^\infty \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} n\theta.$$

A série dada converge, excepto para o ponto $z = 1/2$, *como directamente se vê.*

2887 — Classificar as séries

$$a)\ \sum_1^\infty 2^{-n-(-1)^n}\quad b)\ \sum_1^\infty \left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)^n \frac{1}{n^k}.$$

R: a) *É convergente. Notar que o limite do cociente de* 2 *termos consecutivos não existe, existindo, no entanto* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. b) *Convergente* $(k > 0)$.

2888 — Relacionar a com b de modo que $(a+ib)^4$ seja *real*.

2889 — Mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$ não pode ser ortogonal, se a e a' forem reais.

2890 — Calcular a função simétrica $\sum \frac{1}{x_1^2 + x_1 - 1}$ das raízes da equação $x^3 + x^2 - x - 4 = 0$ R: $x_1^3 + x_1^2 - x_1 - 4 = 0$; $x_1(x_1^2 + x_1 - 1) = 4$ $x_1^2 + x_1 - 1 = 4/x_1$.

Logo, $\sum 1/(x_1^2 + x_1 - 1) = \sum x_1/4 = s_1/4 = -1/4$.

2891 — Transformar a equação $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ pela relação de 2.ª espécie $y_1 = 1/x_2^3 + 1/x_3^3 - 1/x_1^3$, reduzindo-a prèviamente a outra de 1.ª espécie.

2892 — Aplicando a continuidade da função «$\log x$» mostrar que, se $\lim c_n = c$, $\lim a_n = a$, $(a \neq 0)$ é $\lim a_n^{c_n} = a^c$.

R: *Seja* $\lim a_n^{c_n} = \lambda$; *tomando logaritmos vem* $\log \lim a_n^{c_n} = \lim \cdot \log a^{c_n} = \log \lambda = \lim (c_n \cdot \log a_n) = \lim c_n \cdot \lim \log a_n = c \cdot \log a = \log a^c$; logo, $\lambda = a^c$.

2893 — Sabendo que a equação $f(x) \equiv x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$, tem 2 raízes diferindo de 4, resolvê-la, aplicando a teoria da eliminação. R: $f(x) = 0$ *e* $f(x+4) = 0$ *tem 1 raíz comum.*

2894 — Supondo que a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tem as raízes em progressão aritmética resolver a equação. R: *Raízes:* $\alpha, \alpha + r, \alpha + 2r, \alpha + 3r$. (1) $S_1 = 4\alpha + 6r = -a$; $2\Sigma x_1 x_2 = S_1^2 - S_2 = 2b$; (2) $a^2 -$