

em Análise remonta a RIEMANN e a sua aplicação foi renovada por POINCARÉ nas suas pesquisas sobre as equações diferenciais e sobre os sistemas dinâmicos. Desde então, a aplicação dos métodos topológicos no Cálculo das variações por BIRKHOFF, MORSE, LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, na Teoria das equações diferen-

ciais e funcionais por BIRKHOFF, KELLOGG, SCHAUDER, em Geometria algébrica por LEFSCHETZ, SEVERI, VAN DER WAERDEN, em Geometria diferencial por diversos autores, constitui uma renovação de cada uma destas disciplinas matemáticas.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. P. — ALGEBRA SUPERIOR — Alguns problemas dos exercícios de revisão e 1.º exame de frequência.

2884 — Mostrar, a partir da definição, que, se existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n-1}, \text{ tem-se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n.$$

R: Se $|a_n/a_{n-1} - L| < \delta$ para $n > N(\delta)$ tem-se $|a_{n+1}/a_n - L| < \delta$, para $n > N(\delta) - 1$.

2885 — Mostrar, a partir da definição, que, se $\lim a_n = 2$, é $\lim 1/a_n = 1/2$. R: notar que $a_n > 1$ para $n > n_1$.

2886 — Estudar, sobre a circunferência de convergência, as séries:

a) $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$; b) $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$; c) $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} z^n$; d) $\sum_1^{\infty} n z^n$.

R: a) O raio de convergência é 1. Sobre a circunferência de convergência, $z = \cos \theta + i \sin \theta$, $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$;

$$\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} + i \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}.$$

Logo, a série abeliana converge sobre a circunferência. b) O raciocínio anterior a nada conduz. Aplicamos o resultado geral seguinte:

A série $\sum_1^{\infty} a_n \cos n\theta$ é convergente, desde que $a_n > 0$,

$\lim a_n = 0$, $\theta \neq 2k\pi$. Logo, sobre toda a circunferência, excepto no ponto $z=1$, a série de potências converge; para $z=1$, vemos que diverge. c) $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} z^n$. Como

$\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{2n+1}} = 2 / \lim \sqrt[n]{2n+1} = 2 / \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \right) = 2$, o raio de convergência é 1/2. Sobre a circunferência de convergência,

$$z = [\cos \theta + i \sin \theta]/2, z^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)/2^n.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} Z^n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos n\theta + i \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin n\theta.$$

A série dada converge, excepto para o ponto $z=1/2$, como directamente se vê.

2887 — Classificar as séries

a) $\sum_1^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ b) $\sum_1^{\infty} \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right)^n \frac{1}{n^k}$.

R: a) É convergente. Notar que o limite do cociente de 2 termos consecutivos não existe, existindo, no entanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$. b) Convergente ($k > 0$).

2888 — Relacionar a com b de modo que $(a+ib)^4$ seja real.

2889 — Mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$

não pode ser ortogonal, se a e a' forem reais.

2890 — Calcular a função simétrica $\sum \frac{1}{x_i^2 + x_1 - 1}$ das raízes da equação $x^3 + x^2 - x - 4 = 0$ R: $x_1^2 + x_1^2 - x_1 - 4 = 0$; $x_1(x_1^2 + x_1 - 1) = 4$ $x_1^2 + x_1 - 1 = 4/x_1$.

Logo, $\sum 1/(x_1^2 + x_1 - 1) = \sum x_1/4 = s_1/4 = -1/4$.

2891 — Transformar a equação $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ pela relação de 2.ª espécie $y_1 = 1/x_1^2 + 1/x_2^3 - 1/x_1^3$, reduzindo-a previamente a outra de 1.ª espécie.

2892 — Aplicando a continuidade da função «log x» mostrar que, se $\lim c_n = c$, $\lim a_n = a$, ($a \neq 0$) é $\lim a_n^{c_n} = a^c$.

R: Seja $\lim a_n^{c_n} = \lambda$; tomando logaritmos vem $\log \lim a_n^{c_n} = \lim \log a_n^{c_n} = \log \lambda = \lim (c_n \cdot \log a_n) = \lim c_n \cdot \lim \log a_n = c \cdot \log a = \log a^c$; logo, $\lambda = a^c$.

2893 — Sabendo que a equação $f(x) \equiv x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$, tem 2 raízes diferindo de 4, resolvê-la, aplicando a teoria da eliminação. R: $f(x) = 0$ e $f(x+4) = 0$ tem 1 raiz comum.

2894 — Supondo que a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tem as raízes em progressão aritmética resolver a equação. R: Raízes: $\alpha, \alpha+r, \alpha+2r, \alpha+3r$. (1) $S_1 = 4\alpha + 6r = -a$; $2 \sum x_1 x_2 = S_1^2 - S_2 = 2b$; (2) $a^2 -$

$-2b = 4a^2 + 14r^2 + 12ar$. Para resolver o sistema (1), (2), quadremos (1): $16a^2 + 36r^2 + 48ar = a^2$; multipliquemos (2) por 4: $16a^2 + 56r^2 + 48ar = 4a^2 - 8b$; por subtração ordenada, vem $20r^2 = 3a^2 - 8b$, que juntamente com (1) permite calcular r e a .

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. G. P. — CÁLCULO DAS PROBABILIDADES — Outubro de 1948.

2895 — Um dado tem as faces numeradas de 1 a 6, outro tem numeradas de 0 a 5.

Lançam-se esses dados ao acaso, somando-se os dois pontos obtidos; e tornam a lançar-se ao acaso, se essa soma for superior a 6.

a) Calcular a probabilidade de no 1.º lançamento, ou no 2.º, sair a soma 6.

b) Não se obteve essa soma. Calcular a probabilidade de terem sido lançados uma única vez os dados.

R: a) Probabilidade de num lançamento sair a soma 6:

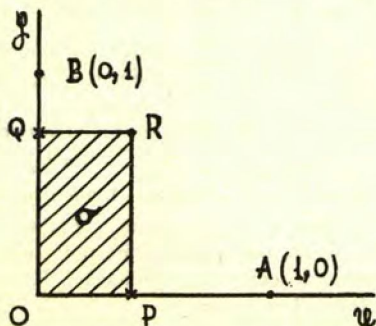
$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \text{ Probabilidade de num lançamento sair uma}$$

$$\text{soma superior a 6: } \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

$$(A) = 1/6 + 5/12 \cdot 1/6 = 17/72.$$

$$b) (B|\bar{A}) = \frac{(B\bar{A})}{(\bar{A})} = \frac{15}{36} : \left(1 - \frac{17}{72}\right) = \frac{15 \cdot 2}{55} = \frac{6}{11}.$$

2896 — Sobre os segmentos perpendiculares OA e OB são lançados ao acaso dois pontos P e Q .

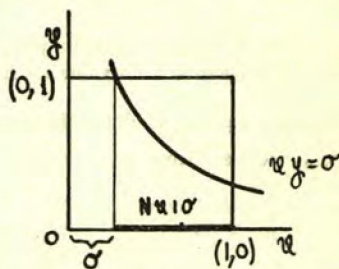


Seja σ a área do rectângulo $OPRQ$ por eles determinado. a) Calcular a taxa T_{σ} . b) Calcular o valor médio dessa área, sem utilizar o resultado anterior.

Nota: Este método de resolução é aplicável à equação de grau n , na hipótese feita: tal categoria de equações é portanto algébricamente resolúvel, qualquer que seja o seu grau.

Soluções dos n.ºs 2884 a 2894 de Andrade Guimarães

$$R: a) \begin{cases} x = x \\ \sigma = x \cdot y \end{cases} \therefore T_{x\sigma} = \frac{1}{x} \cdot T_{xy} = \frac{1}{x},$$



$$T_{\sigma} = \int_{N \times | \sigma}^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_{N \times | \sigma}^1 = [\log x]_{\sigma}^1 = -\log \sigma.$$

$$b) M(\sigma) = \iint_{N \times y} (x \cdot y) \cdot T_{xy} dx dy = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}.$$

2897 — Medições igualmente precisas dos cinco ângulos indicados deram

$$\alpha = 20^{\circ} 47' 15'',$$

$$\beta = 25^{\circ} 12' 50'',$$

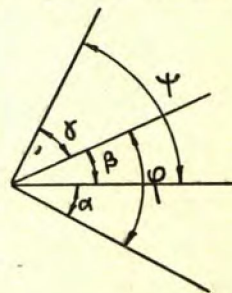
$$\gamma = 30^{\circ} 49' 10'',$$

$$\varphi = 46^{\circ} 0' 5'',$$

$$\psi = 56^{\circ} 2' 10''.$$

a) Calcular os valores mais plausíveis desses cinco ângulos, por compensação;

b) e avaliar os correspondentes erros. R:



$$\begin{cases} 2\lambda_1 = \alpha = 20^{\circ} 47' 15'' + \lambda_1 & \varphi = \alpha + \beta, \quad \psi = \beta + \gamma \\ 2\lambda_2 = \beta = 25^{\circ} 12' 50'' + \lambda_2 & \therefore \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_5 = 0 \end{cases} \\ 2\lambda_3 = \gamma = 30^{\circ} 49' 10'' + \lambda_3 & \\ 2\lambda_4 = \varphi = 46^{\circ} 0' 5'' + \lambda_4 & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 - 10'' = 0 \end{cases} \\ 2\lambda_5 = \psi = 56^{\circ} 2' 10'' + \lambda_5 & \text{(equações de condição)} \end{cases}$$

Enunciados e soluções dos n.ºs 2895 a 2897 de Manuel Gonçalves Miranda.