em Análise remonta a RIEMANN e a sua aplicação foi renovada por POINCARÉ nas suas pesquisas sobre as equações diferenciais e sobre os sistemas dinâmicos. Desde então, a aplicação dos métodos topológicos no Cálculo das variações por BIKHKOFF, MORSE, LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, na Teoria das equações diferenciais e funcionais por BIRKHOFF, KELLOGG, SCHAUDER, em Geometria algébrica por LEFSCHETZ, SEVERI, VAN DER WAERDEN, em Geometria diferencial por diversos autores, constitue uma renovação de cada uma destas disciplinas matemáticas.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. P. — ALGEBRA SUPERIOR — **Alguns problemas dos exercícios de revisão e 1.º exame de frequência.**

2884 — Mostrar, a partir da definição, que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$.

R: *Se* $|a_n/a_{n-1} - L| < \delta$ *para* $n > N(\delta)$ *tem-se* $|a_{n+1}/a_n - L| < \delta$, *para* $n > N(\delta) - 1$.

2885 — Mostrar, a partir da definição, que, se $\lim a_n = 2$, é $\lim 1/a_n = 1/2$. R: *notar que* $a_n > 1$ *para* $n > n_1$.

2886 — Estudar, sobre a *circunferência de convergência*, as séries:

$$a)\ \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2};\quad b)\ \sum_1^\infty \frac{z^n}{n};\quad c)\ \sum_1^\infty \frac{2^n}{2n+1} z^n;\quad d)\ \sum_1^\infty n z^n.$$

R: a) *O raio de convergencia é* 1. *Sobre a circunferência de convergência*, $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$;

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2} = \sum_1^\infty \frac{\cos n\theta}{n^2} + i\ \sum_1^\infty \frac{\mathrm{sen}\,n\theta}{n^2}.$$

Logo, a série abeliana converge sobre a circunferência. b) *O raciocínio anterior a nada conduz. Aplicamos o resultado geral seguinte:*

A série $\sum\limits_1^\infty a_n \cos n\theta$ *é convergente, desde que* $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$, $\theta \neq 2k\pi$. *Logo, sobre toda a circunferência, excepto no ponto* $z = 1$, *a série de potências converge; para* $z = 1$, *vemos que diverge.* c) $\sum\limits_1^\infty \frac{2^n}{2n+1} z^n$. *Como*

$$\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{2n+1}} = 2/\lim \sqrt[n]{2n+1} = 2\Big/\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2,$$

o raio de convergência é $1/2$. *Sobre a circunferência de convergência,*

$$z = [\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta]/2,\ z^n = (\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)/2^n.$$

$$\sum_1^\infty \frac{2^n}{2n+1} Z^n = \sum_1^\infty \frac{1}{2n+1}\cos n\theta + i\sum_1^\infty \frac{1}{2n+1}\,\mathrm{sen}\,n\theta.$$

A série dada converge, excepto para o ponto $z = 1/2$, *como directamente se vê.*

2887 — Classificar as séries

$$a)\ \sum_1^\infty 2^{-n-(-1)^n}\quad b)\ \sum_1^\infty \left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^n \frac{1}{n^k}.$$

R: a) *É convergente. Notar que o limite do cociente de 2 termos consecutivos não existe, existindo, no entanto* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. b) *Convergente* $(k > 0)$.

2888 — Relacionar a com b de modo que $(a+ib)^4$ seja *real*.

2889 — Mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$ não pode ser ortogonal, se a e a' forem reais.

2890 — Calcular a função simétrica $\sum \frac{1}{x_1^2 + x_1 - 1}$ das raízes da equação $x^3 + x^2 - x - 4 = 0$ R: $x_1^3 + x_1^2 - x_1 - 4 = 0$; $x_1(x_1^2 + x_1 - 1) = 4$ $x_1^2 + x_1 - 1 = 4/x_1$.
Logo, $\sum 1/(x_1^2 + x_1 - 1) = \sum x_1/4 = s_1/4 = -1/4$.

2891 — Transformar a equação $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ pela relação de 2.ª espécie $y_1 = 1/x_2^3 + 1/x_3^3 - 1/x_1^3$, reduzindo-a prèviamente a outra de 1.ª espécie.

2892 — Aplicando a continuidade da função «$\log x$» mostrar que, se $\lim c_n = c$, $\lim a_n = a$, $(a \neq 0)$ é $\lim a_n^{c_n} = a^c$.

R: *Seja* $\lim\limits_n a^{c_n} = \lambda$; *tomando logaritmos vem* $\log \lim\limits_n a^{c_n} = \lim \cdot \log a^{c_n} = \log\lambda = \lim (c_n \cdot \log a_n) = \lim c_n \cdot \lim \log a_n = c \cdot \log a = \log a^c$; logo, $\lambda = a^c$.

2893 — Sabendo que a equação $f(x) \equiv x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$, tem 2 raízes diferindo de 4, resolvê-la, aplicando a teoria da eliminação. R: $f(x) = 0$ *e* $f(x+4) = 0$ *tem* 1 *raiz comum.*

2894 — Supondo que a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tem as raízes em progressão aritmética resolver a equação. R: *Raízes:* $\alpha, \alpha+r, \alpha+2r, \alpha+3r$. (1) $S_1 = 4\alpha + 6r = -a$; $2\Sigma x_1 x_2 = S_1^2 - S_2 = 2b$; (2) $a^2 -$