(tercero de la dinastia) nació el 27 de enero de 1695; fué profesor de derecho en Berna y luego de Matemática en San Peterburgo, donde murió el 9 de agosto de de 1726; Ana Catalina (nacida el 10 de febrero de 1697 y fallecida el 27 de mayo del mismo año); Ana Catalina (nacida el 29 de octubre de 1698; casó en primeras nupcias con Juan Dollfust y en segundas con Pedro Hanner; murió en octubre de 1780); Daniel, nació el 29 de enero de 1700; doctor en Medicina; professor de Quimica y de Matemàtica en San Peterburgo, luego profesor de Anatomía y de Botánica en Basilea y, por último, de Física en la misma ciudad, en donde falleció el 17 de marzo de 1782; Dorotea (1704-1800), contrajo matrimonio con Rodolfo Bafliser, profesor de Hebreo en Basilea; Margarita, (1706-1707); Juan II, (nacido el 18 de mayo de 1710, profesor de elocuencia y despues de matemática en Basilea; murió el 17 de julio de 1790); Jacobo, (1712-1769; se dedicó a los negocios y fué músico distinguido) y Manuel (1721-1761), tambien fué comerciante y protector de las bellas artes.

Cuando falleció Juan I, en Basilea, el 1.º de enero de 1748, sus amigos y discípulos, que lo consideraban como un nuevo Arquimedes, hubieron podido suscribir — excepto, quizá el segundo verso — los conocidos elogios a él dedicados màs tarde por Voltaire:

«Son esprit vit la verité
Et son coeur connut la justice
Il a fait l'honneur de la Suisse
Et celui de l'humanité».

Les géométries de figures orientées

par ***Paul Belgodère,*** *(Attaché de Recherches C. N. R. S.)*

Résumé :

Lorsqu'un groupe de transformations n'est pas connexe, on peut orienter certaines figures, en les distinguant de figures analogues, inaccessibles par continuité.Dans des cas usueles, le choix d'une orientation possible peut s'obtenir par l'introduction d'un paramètre surabondant, lié par une relation quadratique aux paramètres anciens, les éléments singuliers (non susceptibles d'orientation) jouent alors un rôle fondamental dans le dédoublement obtenu. De même, on peut, dans certains cas, associer conventionnellement dans éléments imaginaires à des figures réelles orientées. Les représentations impropres (non biunivoques) peuvent être considérées comme des orientations.

Les géométries des figures erientées

En Géométrie élementaire, l'idée d'orientation est en général liée aux choix d'un sens de parcours sur une ligne. et d'un sens de rotation autour d'un point ou d'un axe dans le plan ou l'espace.

En Géométrie analytique, où l'on a en particulier à manipuler des éléments complexes, ces notions deviennent insuffisantes et doivent être remplacées, dans chaque cas, par une définition précise.

Deux problèmes se posent, en quelque sorte inverses l'un de l'autre, selon que l'on eherche à définir si une figure complètement donnée peut être considérée comme« *orientée»* par rapport à l'ensemble des figures analogues, ou si une figure connue peut servir de support à un ensemble discret de figures nouvelles.

Signature

Le premier problème cherche à décomposer un ensemble de figures analogues en classes partielles, à l'intérieur desquelles les figures considérées peuvent se déduire l'une de l'autre *par continuité*, sans rencontrer de dégénérescence, par les opérations d'un groupe déterminé.

Si cette décomposition est possible, on peut atribuer à chaque figure non dégénérée une *signature* (généralement le signe + ou —) indiquant à quelle classe de l'ensemble total elle appartient.

Exemples :

— Sens d'un segment non nul (groupe affine de la droite).

— Segments enchevêtrés ou non, non adjacents (groupe projectif de la droite).

— Trièdres positifs et négatifs, non aplatis (groupe affine de l'espace).

— Sens de parcours d'un cercle de rayon non nul (groupe métrique du plan).

— Nombre de carrés positifs et négatifs dans l'équation d'une quadrique sans point double (groupe projectif de l'espace).

— Nature elliptique ou hyperbolique (à points limits ou à points de base) d'un faisceau de cercles non tangents (groupe anallagmatique du plan).

Cette décomposition est ici essentiellement liée à un domaine de réalité, et l'on peut passer d'une figure à une figure analogue de signature opposée, sans rencontrer de singularité, à condition de passer par des intermédiaires imaginaires: la notion de signature disparaît dans le domaine complexe.

D'une manière générale, cette notion d'orientation peut disparaître à l'intérieur d'un sur-groupe du groupe initial: la distinction entre figures directement et inversement égales dans un espace à nombre impair de dimensions disparait avec l'introduction des homothéties imaginaires de module 1, ou d'une dimension supplémentaire. La séparation du plan en deux régions par une droite réelle orientée disparaît ellemême en géometrie projective réelle plane, où le plan se conduit comme une surface unilatère, sur laquelle on ne peut définir qu'une orientation locale. Signalons en passant que le passage par continuité d'une valeur d'une variable à la valeur opposée, par multiplication par un nombre complexe de module 1 et d'argument variable, permet souvent des généralisations: c'est par une telle méthode que l'on peut passer d'une surface minima à la surface adjointe puis à la symétrique, par l'intermédiaire continu des surfaces associées.

Analytiquement, on obtient une signature, caractérisée par le signe + ou —, chaque fois que, avec les «coordonnées» de la figure, on peut former un invariant par rapport au groupe envisagé.

Le signe de l'invariant donne la signature, et l'annulation de l'invariant entraîne une dégénérescence de la figure: dans le domaine complexe, on peut faire varier par continuité cet invariant d'une valeur positive à une valeur négative, sans traverser la valeur zéro.

Il existe d'ailleurs des signatures plus compliquées, pouvant par exemple prendre plus de deux valeurs, ou conserver leur sens dans le domaine complexe. C'est le cas pour les génératrices d'une quadrique, qui restent toujours séparées en deux systèmes différents: ici l'invariance analytique correspond à la condition de rencontre de deux droites; selon que deux génératrices sont ou non de systèmes différents, on peut former avec leurs coordonnées un invariant nul ou non, condition qui garde évidemment un sens dans le domaine complexe.

Choix de figures orientées portées par une même figure existante.

Etant donnée une figure dont le sous-groupe d'invariance à l'intérieur d'un groupe déterminée est formé de plusieurs parties continues, on peut attacher à chaque partie continue de ce sous-groupe un sens possible pour la figure initiale [1], ce qui est facilité par le fait que cette figure et l'espace ambiant ne peuvent rester invariants point par point que par l'identité. Cela permet de considérer plusieurs «figures» pour un même support pontuel.

Analytiquement, ce genre d'orientation est le plus souvent lié à l'extraction d'une racine carrée, et la distinction entre deux éléments orientés de même support revient simplement aux choix d'une détermination pour la valeur du radical.

Exemples en géométrie analytique plane:

— détermination des cosinus directeurs d'une direction de paramètres directeurs a, b

$$\cos\Omega = a/\pm\sqrt{\ }(a^2+b^2)\,.$$

— distance d'un point à une droite $ux+uy+w=0$

$$d=(vx+vy+w)/\pm\sqrt{\ }(u^2+v^2)$$

—rayon d'un cercle $x^2+y^2-2\,ax-2\,by+c=0$

$$R=\pm\sqrt{\ }(a^2+b^2-c)$$

Une méthode générale d'étude des figures orientées consiste alors à prendre pour variable suplémentaire la valeur ainsi choisie pour la racine carrée et à la considérer comme une *coordonnée surabondante* pour la figure, l'ensemble total des coordonnées étant lié par une relation, souvent quadratique. Dans certains cas, l'une des variables initiales peut se calculer linéairement en fonction des autres et de la variable nouvelle, ce qui permet de ne plus garder que des variables indépendantes, le signe de la dernière imposant l'orientation (exemple: cercle a, b. R). D'aprés la conception de PLUCKER de géometries abstraites à n dimensions comme figuration des éléments à n paramètres de l'espace ordinaire, on peut appliquer aux figures, même orientées, les résultats de la géométrie ponctuelle des espaces supérieurs.

Une relation quadratique entre variables surabondantes est, lorsqu'elle existe, la source de propriétés fondamentales, à cause de l'importance de la *forme polaire*, dont l'annulation indique que les 2 figures considérées sont conjuguées par rapport aux figures spécialisées de leur faisceau (pour une figure spécialisée, les deux orientations possibles sont vennues se confondre). Les relations quadratiques entre coordonnées surabondantes des figures orientées peuvent évidemment être spécialisées, c'est-à-dire comporter mions de carrés que n'en permet le nombre de variables (Géométrie de LAGUERRE des cercles orientés, par exemple).

On peut dire, en généralisant, que le choix d'une racine d'une équation algébrique d'ordre n est un phénomène d'orientation où une figure est susceptible de n orientations différentes. Plus loin encore, une permutation, un arrangement ou une combinaison entre les racines d'une équation algébrique est un phénomène d'orientation qui disséque le groupe de recouvrement d'une figure. (Félix KLEIN a, dans ses «*Leçons sur l'icosaèdre*», fait correspondre les positions

[1] Voir E. CARTAN: La notion d'orientation dans les différentes géométries. *Bull. Soc. Math. France*, tome 69 (1941), p. 47-70.

d'un icosaèdre régulier aux permutations des racines de l'équation du 5e degré).

Dans le cas habituel où deux orientations seulement sont possibles pour chaque support donné, on voit ainsi apparaître un doublement de l'espace ponctuel qui se trouve recouvert deux fois.

On peut alors envisager une géométrie plus générale, pour laquelle il y ait dissociation des éléments géométriques, les figures orientées prenant vraiment leur individualité propre et se transformant indépendamment de la variété «opposée», le support ponctuel de la variété orientée initiale. On obtient ainsi des transformations (non ponctuelles), qui ne laissent plus invariante *l'opposition* de deux figures orientées: la notion d'orientation est donc beaucoup plus profonde et plus riche que la notion élémentaire de sens de parcours, puisqu'elle permet d'élargir le groupe fondamental.

Par exemple, en Géométrie plane, on peut plonger le groupe métrique dans le groupe de LAGUERRE, formé de transformations de contact qui changent un cercle en deux cercles différents selon le sens d'orientation, la notion d'éléments impropres, non susceptibles de dissociation par orientation (points) disparaissant dans la transformation. De même, en Géométrie de l'espace, on peut élargir le groupe anallagmatique en groupe LIE, par dissociation de la sphère en deux semi-sphères constituées par les génératrices de l'un et de l'autre système, à qui l'on permet de se transformer chacun pour son propre compte. On peut, de même, avec STUDY, considérer des transformations de droites orientées de l'espace pour lesquelles deux axes de même support se transforment en axes de support différent, sans que soit détruite la perpendicularité entre axes appartenant à deux couches différents; ces transformations sont précieuses dans la géométrie métrique des complexes linéaires et des torseurs.

Remarquons l'importance primordiale que présentent les éléments *impropres* (non susceptibles de dissociation par orientation) dans la théorie des figures orientées. Par exemple, si un élément impropre est caractérisé par une relation quadratique entre coordonnées non surabondantes d'une figure orientée, les transformations projectives de ces coordonnées conservant cette relation donnent une *géométrie orientée élémentaire,* qui conserve l'opposition de deux figures de même support (Exemple: géométrie anallagmatique du plan, qui transforme entre eux les cercles de rayon nul). Par contre, si les coordonnées *surabondantes* d'une figure orientée sont liées par une relation quadratique, les transformations projectives de ces coordonnées conservant la relation, donnent naissance à une *géométrie orientée* supérieure, dont le groupe élargit le précédent, en dissociant les figures orientées de même support.

La géométrie des figures orientées est plus riche et plus précise que celle des figures ordinaires. Le dédoublement qui s'est opéré permet en effet, d'obtenir des formules analytiques valables *sans ambigüité de signe.* D'ailleurs, la recherche des figures qui ne diffèrent d'une figure donnée que par la détermination à attribuer à un radical peut donner des résultats intéressants: prenons, par exemple, l'icosaèdre régulier convexe; toutes ses dimensions se déduisant de l'une d'elles par des formules contenant le symbole $\sqrt{5}$, caractéristique de l'inscription dans le cercle du pentagone régulier: il suffit de remplacer formellement $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes ces formules pour avoir les propriétés d'un icosaèdre régulier étoilé, qui se déduit du convexe comme le pentacle (pentagone étoilé) se déduit du pentagone convexe, et posséde le même nombre d'éléments de nature analogue, à l'étoilement prés.

Ce *principe de conjugaison* sert avec succès dans l'étude des polyèdres semi-réguliers et des hyperpolyèdres réguliers étoilés. *(Continua)*

Sobre a definição de multiplicação no grupo aditivo dos números reais [1]

por **Luiz Neves Real**

Considere-se no conjunto dos números reais, a operação de *soma* como base da organização dêsse conjunto como espaço algébrico. É sabido que assim se obtém um grupo abeliano, uma vez que se verificam os axiomas: I — Quaisquer que sejam α e β existe a soma $\alpha+\beta$; II — A soma é associativa, $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$; III — É comutativa $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; IV — A equação $\alpha+\xi=\beta$ é sempre resolúvel em ξ.

Se tomarmos a relação« menor do que», $\alpha<\beta$ para base da ordenação dêste espaço algébrico, êle aparecer-nos-há como grupo abeliano ordenado; além dos quatro anteriores axiomas tem ainda logar a lei de monotonia V — Se $\alpha<\beta$, $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$, qualquer que seja γ.

---

(1) F. Bachmann — Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band I₁, Heft 2 — 3,23.