d'un icosaèdre régulier aux permutations des racines de l'équation du 5e degré).

Dans le cas habituel où deux orientations seulement sont possibles pour chaque support donné, on voit ainsi apparaître un doublement de l'espace ponctuel qui se trouve recouvert deux fois.

On peut alors envisager une géométrie plus générale, pour laquelle il y ait dissociation des éléments géométriques, les figures orientées prenant vraiment leur individualité propre et se transformant indépendamment de la variété «opposée», le support ponctuel de la variété orientée initiale. On obtient ainsi des transformations (non ponctuelles), qui ne laissent plus invariante *l'opposition* de deux figures orientées: la notion d'orientation est donc beaucoup plus profonde et plus riche que la notion élémentaire de sens de parcours, puisqu'elle permet d'élargir le groupe fondamental.

Par exemple, en Géométrie plane, on peut plonger le groupe métrique dans le groupe de LAGUERRE, formé de transformations de contact qui changent un cercle en deux cercles différents selon le sens d'orientation, la notion d'éléments impropres, non susceptibles de dissociation par orientation (points) disparaissant dans la transformation. De même, en Géométrie de l'espace, on peut élargir le groupe anallagmatique en groupe LIE, par dissociation de la sphère en deux semi-sphères constituées par les génératrices de l'un et de l'autre système, à qui l'on permet de se transformer chacun pour son propre compte. On peut, de même, avec STUDY, considérer des transformations de droites orientées de l'espace pour lesquelles deux axes de même support se transforment en axes de support différent, sans que soit détruite la perpendicularité entre axes appartenant à deux couches différents; ces transformations sont précieuses dans la géométrie métrique des complexes linéaires et des torseurs.

Remarquons l'importance primordiale que présentent les éléments *impropres* (non susceptibles de dissociation par orientation) dans la théorie des figures orientées. Par exemple, si un élément impropre est caractérisé par une relation quadratique entre coordonnées non surabondantes d'une figure orientée, les transformations projectives de ces coordonnées conservant cette relation donnent une *géométrie orientée élémentaire,* qui conserve l'opposition de deux figures de même support (Exemple: géométrie annallagmatique du plan, qui transforme entre eux les cercles de rayon nul). Par contre, si les coordonnées *surabondantes* d'une figure orientée sont liées par une relation quadratique, les transformations projectives de ces coordonnées conservant la relation, donnent naissance à une *géométrie orientée* supérieure, dont le groupe élargit le précédent, en dissociant les figures orientées de même support.

La géométrie des figures orientées est plus riche et plus précise que celle des figures ordinaires. Le dédoublement qui s'est opéré permet en effet, d'obtenir des formules analytiques valables *sans ambigüité de signe.* D'ailleurs, la recherche des figures qui ne différent d'une figure donnée que par la détermination à attribuer à un radical peut donner des résultats intéressants: prenons, par exemple, l'icosaèdre régulier convexe; toutes ses dimensions se déduisant de l'une d'elles par des formules contenant le symbole $\sqrt{5}$, caractéristique de l'inscription dans le cercle du pentagone régulier: il suffit de remplacer formellement $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes ces formules pour avoir les propriétés d'un icosaèdre régulier étoilé, qui se déduit du convexe comme le pentacle (pentagone étoilé) se déduit du pentagone convexe, et posséde le même nombre d'éléments de nature analogue, à l'étoilement prés.

Ce *principe de conjugaison* sert avec succès dans l'étude des polyèdres semi-réguliers et des hyperpolyèdres réguliers étoilés. *(Continua)*

Sobre a definição de multiplicação no grupo aditivo dos números reais (1)

por **Luiz Neves Real**

Considere-se no conjunto dos números reais, a operação de *soma* como base da organização dêsse conjunto como espaço algébrico. É sabido que assim se obtém um grupo abeliano, uma vez que se verificam os axiomas: I — Quaisquer que sejam α e β existe a soma $\alpha+\beta$; II — A soma é associativa, $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$; III — É comutativa $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; IV — A equação $\alpha+\xi=\beta$ é sempre resolúvel em ξ.

Se tomarmos a relação« menor do que», $\alpha<\beta$ para base da ordenação dêste espaço algébrico, êle aparecer-nos-há como grupo abeliano ordenado; além dos quatro anteriores axiomas tem ainda logar a lei de monotonia V — Se $\alpha<\beta$, $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$, qualquer que seja γ.

(1) F. Bachmann — Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band I$_1$, Heft 2 — 3,23.

Se entre os elementos de um grupo se estabelece uma correspondência biunívoca de modo que, sendo α' e β' os elementos correspondentes respectivamente a α e β, a $\alpha+\beta$ corresponda $\alpha'+\beta'$ — diz-se que se definiu no grupo um *automorfismo*. Esta noção permite que se introduza no grupo aditivo dos números reais a operação de multiplicação, através da seguinte:

DEFINIÇÃO. *Produto — $\alpha \cdot \beta$ — de dois números reais α e β é o número real que corresponde a β naquele automorfismo do grupo aditivo dos números reais, em que o número* 1 *tem como correspondente o número α. Assim se encontra o sentido profundo e geral da definição: o produto obtem-se do multiplicando como o multiplicador se obteve da unidade* — pelo mesmo automorfismo.

A justificação dêste modo de definir encontra-se no seguinte:

TEOREMA. *Fazendo corresponder a todo o número real ξ o número real $\xi \cdot \alpha$ (resultado da multiplicacão de ξ por α) com $0<\alpha$ (com $\alpha<0$) estabelece-se no conjunto dos números reais, considerado como grupo aditivo ordenado, um automorfismo que conserva (inverte) a ordem do grupo. Inversamente, há um único automorfismo no grupo dos números reais, que faça corresponder ao número* 1 *o número α, conservando a ordem (invertendo, a ordem): é a multiplicação por α, com $0<\alpha$ (com $\alpha<0$).*

É a primeira parte do teorema consequência imediata das leis da multiplicação dos números reais (de fecho, de distributividade, de monotonia). Só a segunda carece de demonstração.

Represente-se por $\xi \leftrightarrow \gamma(\xi)$ o automorfismo no grupo ordenado e aditivo dos números reais, que, conservando a ordem faz corresponder ao número 1 o número positivo $\alpha : \gamma(1)=\alpha$. Como $2=1+1$ deverá ser $\gamma(2)=\gamma(1)+\gamma(1)=\alpha+\alpha=2 \cdot \alpha$ e para n inteiro e positivo $\gamma(n)=\underbrace{\gamma(1)+\cdots+\gamma(1)}_{n \text{ vezes}}=n \cdot \alpha$. Sendo $\gamma(0)=0$ pois 0 é a unidade do grupo, $\gamma(-1)=-1 \cdot \alpha$, visto que deve ser $\gamma(-1)+\gamma(1)=\gamma(-1)+\alpha=0$; e, anàlogamente, para n inteiro e positivo $\gamma(-n)=-n \cdot \alpha$. Por outro lado de $1=1/2+1/2$ segue-se $\alpha=\gamma(1/2)+\gamma(1/2)$ e $\gamma(1/2)=1/2 \cdot \alpha$. Dêste modo se vê que aos números reais da forma $k/2^m$, com $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$ e $m=1, 2, 3 \cdots$ correspondem os números $k/2^m \cdot \alpha$. Mas sabe-se que o conjunto $\{k/2^m\}$ de todos os números da forma $k/2^m$ é denso no conjunto dos números reais — sabemos que todo número real ξ se pode escrever, na base 2, como limite de uma sucessão de números desse conjunto. Esta propriedade vai ser utilizada para determinar o número $\gamma(\xi)$ correspondente a ξ. Representemos por $\{x_n\}$ uma sucessão de números da forma $k/2^m$ cujo limite seja $\xi : \xi=\lim_n x_n$. Como $\gamma(x_n)=x_n \cdot \alpha$, à sucessão convergente $\{x_n\}$ corresponde por automorfismo a sucessão $\{x_n \cdot \alpha\}$ igualmente convergente e tendo como limite $\xi \cdot \alpha$. Mostremos que se tem precisamente $\gamma(\xi)=\xi \cdot \alpha$. Seja δ um número real positivo qualquer; existe sempre m tal que $1/2^m \cdot \alpha<\delta$; e como $\xi=\lim_n x_n$ existe também N tal que $\xi-1/2^m<x_n<\xi+1/2^m$, se $n>N$. Sendo a ordem do grupo mantida pelo automorfismo, ter-se-á, por correspondência $\gamma(\xi)-\gamma(1/2^m)<\gamma(x_n)<\gamma(\xi)+\gamma(1/2^m)$, para $n>N$ ou $\gamma(\xi)-1/2^m \cdot \alpha<x_n \cdot \alpha<\gamma(\xi)+1/2^m \cdot \alpha$ e, por maioria de razão $\gamma(\xi)-\delta<x_n \cdot \alpha<\gamma(\xi)+\delta$, para $n>N$ condição para que $\gamma(\xi)=\lim_n (x_n \cdot \alpha)=\xi \cdot \alpha$, como desejávamos provar. Se o automorfismo γ invertesse a ordem do grupo e $\alpha<0$, determinaria m pela condição $1/2^m(-\alpha)<\delta$ e a desigualdade $\xi-1/2^m<x_n<\xi+1/2^m$ arrastaria semelhantemente $\gamma(\xi)-1/2^m \cdot \alpha>x_n \cdot \alpha>\gamma(\xi)+1/2^m \cdot \alpha$ ou $\gamma(\xi)+\delta>x_n \cdot \alpha>\gamma(\xi)-\delta$.

Inégalités (*)

par ***Jean Aczél***

Introduction. On connait bien l'inégalité

$$(1) \qquad (a+b)/2>\sqrt{ab}$$

qui lie la moyenne arithmétique $(a+b)/2$ et la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ de deux nombres positifs a, b $(a \neq b)$. Dans le cas oú $a=b$ les deux membres de (1) sont évidemment égaux.

Pour prouver (1) il faut montrer que la différence $(a+b)/2-\sqrt{ab}$ est positive. Mais ceci est immédiat d'après la relation $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, tenant compte du fait que le carré d'un nombre différent de zéro est toujours positif (aux sens strict).

Considérons tout de suite quelques applications de cette inégalité. Montrons que la somme d'un nombre positif et différent de 1 et de sa réciproque est toujours supérieure à 2, c'est à dire que pour $x>0$ $(x \neq 1)$ on a $x+1/x>2$. En effet, d'après l'inégalité (1) on a $\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big/2>\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=1$.

(*) Artigo destinado à publicação «KÖZEPISKOLAI MATEMATICAI LAPOK», jornal de Matemática para os alunos dos liceus húngaros.