Se entre os elementos de um grupo se estabelece uma correspondência biunívoca de modo que, sendo α' e β' os elementos correspondentes respectivamente a α e β, a $\alpha+\beta$ corresponda $\alpha'+\beta'$ — diz-se que se definiu no grupo um *automorfismo*. Esta noção permite que se introduza no grupo aditivo dos números reais a operação de multiplicação, através da seguinte:

DEFINIÇÃO. *Produto — $\alpha . \beta$ — de dois números reais α e β é o número real que corresponde a β naquele automorfismo do grupo aditivo dos números reais, em que o número* 1 *tem como correspondente o número α. Assim se encontra o sentido profundo e geral da definição: o produto obtem-se do multiplicando como o multiplicador se obteve da unidade* — pelo mesmo automorfismo.

A justificação dêste modo de definir encontra-se no seguinte:

TEOREMA. *Fazendo corresponder a todo o número real ξ o número real $\xi . \alpha$ (resultado da multiplicacão de ξ por α) com $0 < \alpha$ (com $\alpha < 0$) estabelece-se no conjunto dos números reais, considerado como grupo aditivo ordenado, um automorfismo que conserva (inverte) a ordem do grupo. Inversamente, há um único automorfismo no grupo dos números reais, que faça corresponder ao número* 1 *o número α, conservando a ordem (invertendo, a ordem): é a multiplicação por α, com $0 < \alpha$ (com $\alpha < 0$).*

É a primeira parte do teorema consequência imediata das leis da multiplicação dos números reais (de fecho, de distributividade, de monotonia). Só a segunda carece de demonstração.

Represente-se por $\xi \leftrightarrow \gamma(\xi)$ o automorfismo no grupo ordenado e aditivo dos números reais, que, conservando a ordem faz corresponder ao número 1 o número positivo $\alpha : \gamma(1) = \alpha$. Como $2 = 1+1$ deverá ser $\gamma(2) = \gamma(1) + \gamma(1) = \alpha + \alpha = 2 . \alpha$ e para n inteiro e positivo $\gamma(n) = \underbrace{\gamma(1) + \cdots + \gamma(1)}_{n \text{ vezes}} = n \cdot \alpha$. Sendo $\gamma(0) = 0$ pois 0 é a unidade do grupo, $\gamma(-1) = -1 \cdot \alpha$, visto que deve ser $\gamma(-1) + \gamma(1) = \gamma(-1) + \alpha = 0$; e, anàlogamente, para n inteiro e positivo $\gamma(-n) = -n \cdot \alpha$. Por outro lado de $1 = 1/2 + 1/2$ segue-se $\alpha = \gamma(1/2) + \gamma(1/2)$ e $\gamma(1/2) = 1/2 \cdot \alpha$. Dêste modo se vê que aos números reais da forma $k/2^m$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$ e $m = 1, 2, 3 \cdots$ correspondem os números $k/2^m \cdot \alpha$. Mas sabe-se que o conjunto $\{k/2^m\}$ de todos os números da forma $k/2^m$ é denso no conjunto dos números reais — sabemos que todo número real ξ se pode escrever, na base 2, como limite de uma sucessão de números desse conjunto. Esta propriedade vai ser utilizada para determinar o número $\gamma(\xi)$ correspondente a ξ. Representemos por $\{x_n\}$ uma sucessão de números da forma $k/2^m$ cujo limite seja $\xi : \xi = \lim_n x_n$. Como $\gamma(x_n) = x_n \cdot \alpha$, à sucessão convergente $\{x_n\}$ corresponde por automorfismo a sucessão $\{x_n \cdot \alpha\}$ igualmente convergente e tendo como limite $\xi \cdot \alpha$. Mostremos que se tem precisamente $\gamma(\xi) = \xi \cdot \alpha$. Seja δ um número real positivo qualquer; existe sempre m tal que $1/2^m \cdot \alpha < \delta$; e como $\xi = \lim_n x_n$ existe também N tal que $\xi - 1/2^m < x_n < \xi + 1/2^m$, se $n > N$. Sendo a ordem do grupo mantida pelo automorfismo, ter-se-á, por correspondência $\gamma(\xi) - \gamma(1/2^m) < \gamma(x_n) < \gamma(\xi) + \gamma(1/2^m)$, para $n > N$ ou $\gamma(\xi) - 1/2^m \cdot \alpha < x_n \cdot \alpha < \gamma(\xi) + 1/2^m \cdot \alpha$ e, por maioria de razão $\gamma(\xi) - \delta < x_n \cdot \alpha < \gamma(\xi) + \delta$, para $n > N$ condição para que $\gamma(\xi) = \lim_n (x_n \cdot \alpha) = \xi \cdot \alpha$, como desejávamos provar. Se o automorfismo γ invertesse a ordem do grupo e $\alpha < 0$, determinaria m pela condição $1/2^m(-\alpha) < \delta$ e a desigualdade $\xi - 1/2^m < x_n < \xi + 1/2^m$ arrastaria semelhantemente $\gamma(\xi) - 1/2^m \cdot \alpha > x_n \cdot \alpha > \gamma(\xi) + 1/2^m \cdot \alpha$ ou $\gamma(\xi) + \delta > x_n \cdot \alpha > \gamma(\xi) - \delta$.

Inégalités (*)

par Jean Aczél

Introduction. On connait bien l'inégalité

$$(1) \qquad (a+b)/2 > \sqrt{ab}$$

qui lie la moyenne arithmétique $(a+b)/2$ et la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ de deux nombres positifs a, b $(a \neq b)$. Dans le cas oú $a = b$ les deux membres de (1) sont évidemment égaux.

Pour prouver (1) il faut montrer que la différence $(a+b)/2 - \sqrt{ab}$ est positive. Mais ceci est immédiat d'après la relation $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, tenant compte du fait que le carré d'un nombre différent de zéro est toujours positif (aux sens strict).

Considérons tout de suite quelques applications de cette inégalité. Montrons que la somme d'un nombre positif et différent de 1 et de sa réciproque est toujours supérieure à 2, c'est à dire que pour $x > 0$ $(x \neq 1)$ on a $x + 1/x > 2$. En effet, d'après l'inégalité (1) on a $\left(x + \frac{1}{x}\right) / 2 > \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$.

(*) Artigo destinado à publicação «KÖZEPISKOLAI MATEMATICAI LAPOK», jornal de Matemática para os alunos dos liceus húngaros.

Comme deuxième application cherchons, parmi les rectangles de même périmètre, celui qui a la plus grande aire. Si nous désignons les cotés d'un rectangle par a et b, son périmètre sera égal à $2a+2b=k$, oú k est commun à tous les rectangles considérés. Or

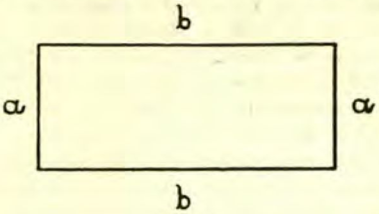

Fig. 1

l'aire A de ce rectangle a comme valeur ab, donc en vertu de (1) $\sqrt{A}<k/4$, sauf pour le cas où $a=b$, quand $\sqrt{A}=a=k/4$ On a donc le résultat que *parmi tous les rectangles de même périmètre le carré est celui qui a la plus grande aire.*

Exercice 1. Dans la figure 2. nous avons dessiné des rectangles ayant lc même périmètre, le même cen-

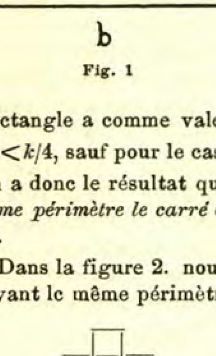

Fig. 2

tre et les cotés paralléles. Si on dessine *tous* ces rectangles ils recouvrent une partie du plan. Quelle est la forme de cette partie?

Exercice 2. Parmi tous les rectangles ayant la même aire, lequel a-t-il le plus petit périmètre?

Exercice 3. Si on dessine tous les rectangles ayant la même aire, le même centre et les cotés parallèles, quelle partie du plan vont-ils recouvrir?

Problème 1. Soit $A>B$. Démontrons qu'on a $A+D>B+D$ pour tout nombre réel D, $CA>CB$ pour C positif et $CA<CB$ pour C négatif.

Si A et B sont positifs, $A>B$ implique $A^n>B^n$ (n étant un entier positif), $1/A<1/B$, $1/A^n<1/B^n$ (n entier positif).

$A>B$ et $C>D$ impliquent $A+C>B+D$ et, si A, B, C, D sont tous positifs, aussi $AC>BD$.

Probleme 2. On appelle moyenne harmonique de deux nombres positifs a et b la valeur $2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Montrons que pour $a\neq b$, la moyenne harmonique est toujours inférieure à la moyenne géométrique, c'est à dire $2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<\sqrt{ab}$.

Exercice 4. Parmi tous les triangles rectangles ayant la même hauteur sur l'hypothénuse, quel est celui qui a la plus petite hipothénuse?

Exercice 5. Parmi tous les triangles rectangles ayant la même hypothénuse, quel est celui qui a la plus grande hauteur sur l'hypothénuse?

Voilà donc quelques applications de l'inégalité (1). Au cours de cet article nous allons étudier d'autres inégalités et nous allons les appliquer à divers problèmes. Nous laissons les démonstrations au soin du lecteur, mais dans les communications qui vont suivre nous indiquerons chaque fois les démonstrations de la communication précédente, afin que le lectenr puisse vérifier si son raisonement était correct.

Les inégalités dont nous allons parler sont connues depuis très logtemps. Le premier traitement systématique n'était donné cependant qu'en 1934 par Hardy, Littlewood et Polya dans leur livre célèbre, intitulé «Inequalities». Ils basent la théorie des inégalités sur la notion de fonction convexe. Nous allons suivre le même chemin dans le presente article. Outre ce livre nous nous sommes servis du premier volume du traité de Haupt, Aumann et Pauc: Differential-und Integralrechnung et des cours faits par M. Frédéric Riesz à l'Université de Budapest et par M. Tibor Gallai à l'Université libre de Budapest.

1. *Fonctions continue convexes.* Une fonction $y=f(x)$ est continue si son graphique ne présente pas des sauts. Cette notion intuitive peut être remplacée par une définition précise à partir de laquelle on peut démontrer d'une façon rigoureuse que la plupart des fonctions élémentaire (par exemple les fonctions $y=x$, $y=x^2$, $y=x^n$ (n entier), $y=a^x$, $y=\log x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ sont continues. Nous ne donnons pas ici cette définition précise, mais nous allons uti-

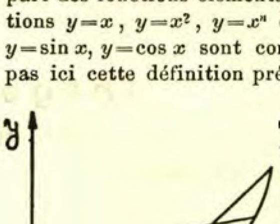

Fig. 3

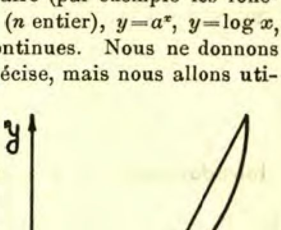

Fig. 4

liser cependant la continuité des fonctions mentionnées. Une des propriétés les plus importantes d'une fonction continue est la propriété de Darboux: si une fonction continue prend deux valeurs différentes $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$ $(x_1<x_2)$, alors elle prend toutes les valeurs comprises entre y_1 et y_2 dans l'intervalle $x_1<x<x_2$. Par exemple la fonction $y=\sin x$, dont nous avons signalé la continuité, est égale à 0 pour $x=0$ et à 1 pour $x=\pi/2$, on peut donc être sûr qu'elle prenda toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 dans l'intervalle $0<x<\pi/2$.

Une fontion sera dite *convexe* si une corde quelconque de son graphique laisse l'arc entre ses deux extrémités au-dessous d'elle (fig. 3.). Remarquons

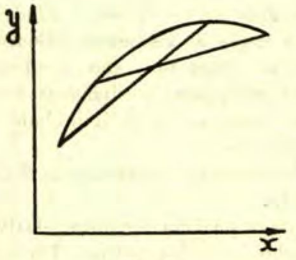

Fig. 5

qu'au delà des extrémités de la corde, la courbe est située au-dessus de la droite qui porte la corde. Nous dirons qu'une fonction est *convexe au sens large* si son graphique est constitué d'arcs convexes et de segments de droite (fig. 4.). Dans ce cas un arc de la courbe peut aussi coïncider avec la corde.

Une fonction sera dite *concave* si une corde quelconque de son graphique laisse au-dessus d'elle l'arc qu'elle soustend (fig. 5). On dèfinit la *concavité au sens large* d'une façon analogue à celle de la convexité au sens large.

Problème 3. Si la fonction $y=f(x)$ est convexe, alors la fonction $y=-f(x)$ est concave, et réciproquement.

Problème 4. Faisons le dessin des fonctions suivantes et déterminons à partir *de la figure* pour quelles valeurs de x sont-elles convexes ou concaves:

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=\sqrt[3]{x^2},\ y=\sqrt{x^3},\ y=1/x,\ y=1/x^3,$$
$$y=1/\sqrt{x^3},\ y=+\sqrt{x},\ y=-\sqrt{x},\ y=2^x,\ y=10^x,$$
$$y=\log x,\ y=\sin x,\ y=\operatorname{tg} x$$

(au points $x=\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$ cette dernière fonction ne sera pas continue !)

Problème 5. Quelle particularité ont-elles les fonctions de la forme $y=ax+b$ (a, b quelconques) au point de vue de la concavité et de la convexité?

(Continua)

Teoremas recíprocos nos casos de igualdade de triedos

por Maria Teodora

A reciprocidade em geometria tem maior extensão do que à primeira vista poderá parecer.

Os compêndios de geometria elementar, nacionais e estrangeiros que conheço e alguns deles da autoria de nomes notáveis na Metodologia e no domínio da

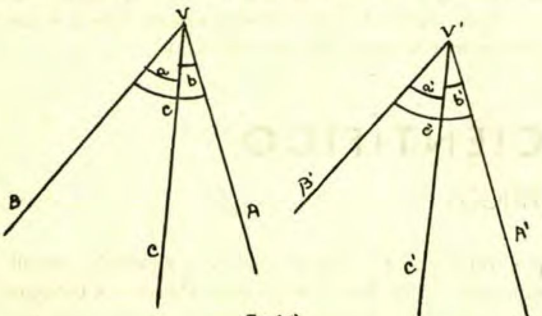

Fig (1)

investigação Matemática não põem em evidência essa extensão e generalidade.

Como se sabe, dado um teorema em que a hipótese e a tese são decomponíveis em hipóteses e teses parciais, se permutarmos, total ou parcialmente, as condições de relação da hipótese com as teses parciais, obtemos teoremas, verdadeiros ou falsos que se chamam teoremas recíprocos do teorema proposto.

Apliquemos esta doutrina ao teorema seguinte da igualdade de triedros: — Se dois triedros têm as faces iguais, cada uma a cada uma, e semelhantemente dispostos, esses triedros são iguais.

Sejam, a, b, c e a', b', c' as faces dos triedros; e $\widehat{VA}, \widehat{VB}, \widehat{VC}$; $\widehat{V'A'}, \widehat{V'B'}, \widehat{V'C'}$, os rectilíneos dos diedros correspondentes.

$$H: \left|\begin{array}{ll} a=a' & (H_1) \\ b=b' & (H_2) \\ c=c' & (H_3) \end{array}\right.$$

e semelhantemente dispostas

$$T: \left|\begin{array}{ll} \widehat{VA}=\widehat{V'A'} & (T_1) \\ \widehat{VB}=\widehat{V'B'} & (T_2) \\ \widehat{VC}=\widehat{V'C'} & (T_3) \end{array}\right.$$

Os teoremas recíprocos verdadeiros, são obtidos da seguinte maneira: