— «Equações envolvendo logaritmos ou qualquer outro tipo de problemas teóricos são inteiramente banidos» (Notas ao programa do 5.º ano);

— «As equações trigonométricas a considerar são as que se podem reduzir a equações algébricas dos programas do 6.º e 7.º anos, quando se toma para incógnita $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{tg} x/2$» (Notas ao programa do 7.º ano);

Para documentarmos a afirmação feita relativa a um criterioso encadeamento dos vários assuntos vamo-nos servir sobretudo dos programas do 3.º ciclo, onde a própria natureza das matérias tratadas impunha um maior respeito por aquela norma.

Só no 7.º ano se estuda a noção de derivada e suas aplicações. Parece fora de dúvida que a altura própria para abordar este assunto seria imediatamente a seguir ao estudo dos infinitésimos, tanto mais que é precisamente no 6.º ano que o programa de Física mais necessita dos elementos de cálculo diferencial.

Ainda no programa do 6.º ano, no capítulo relativo a «indeterminações» seria conveniente aludir expressamente à continuidade de funções, para evitar um tratamento incorrecto daquele problema; tanto mais que o precedente está aberto por alguns dos livros actualmente seguidos.

Cabe aqui mais um exemplo de incorrecção de linguagem. Efectivamente, a designação de «verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada» é ao mesmo tempo errada e imprecisa: a palavra «expressão» aparece no sentido de «função» e o designativo de «verdadeiro valor», embora consagrado, implicava naturalmente a definição da função no ponto em que ela é indeterminada.

Uma deficiência do género daquelas que vimos apontando é a exclusão do programa de Trigonometria de 6.º ano da resolução de triângulos rectângulos quando este problema devia ali ser tratado como aplicação imediata das noções dadas sobre funções trigonométricas. Também não compreendemos as razões que levaram os autores dos programas a deixar o uso das tábuas de funções trigonométricas para o 7.º ano, uma vez que no ano anterior já se alude a valores particulares das funções.

A excessiva extensão do programa de 6.º ano poderia então ser corrigida deixando para o ano seguinte o estudo das funções circulares inversas.

O programa de Geometria Analítica do 7.º ano tem um aspecto extremamente confuso, em virtude da inexplicável repetição de tópicos que o caracteriza. Assim, não poderão todas as cónicas ser apresentadas como «lugares geométricos muito simples»? E para que se faz no fim uma referência especial às equações cartesianas destas curvas se essas mesmas equações foram anteriormente estabelecidas com base no conceito de lugar geométrico?

Um exemplo da mesma natureza, nos programas do 2.º ciclo, é a inclusão do estudo de progressões apenas no fim do programa de Álgebra do 5.º ano, quando estava naturalmente indicado apresentá-las como casos particulares de sucessões. O capítulo relativo a sucessões (incluindo o estudo de progressões) poderia ser tratado no 4.º ano ou, o que nos parece preferível, no 5.º. Neste caso impunha-se o deslocamento do capítulo sobre equações do 2.º grau para o 4.º ano. De qualquer modo, parece-nos que o estudo das progressões deveria preceder o dos logaritmos.

Conforme dissemos de início, as considerações que acabamos de apresentar só parcialmente correspondem ao que a *Gazeta de Matemática* se propõe fazer nos aspectos de análise, discussão e crítica sobre os novos programas para o ensino secundário.

Na nossa opinião impõe-se um estudo detalhado dos programas dos diferentes anos, da sua sequência, suas relações com os programas de outras disciplinas, etc.

Para realizar este objectivo conta a Gazeta de Matemática com a colaboração de todos os professores que a lêem. Só essa colaboração dará a este debate o interesse e a utilidade que ele pode e deve ter.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO CURSO COMPLEMENTAR DE CIÊNCIAS DOS LICEUS

Liceu Pedro Nunes — DESENHO — **Exercício de apuramento, 6.º ano — Dezembro de 1948.**

2841 — Determinar as projecções da parte visível da recta definida por dois dos seus pontos, A e B, cujas coordenadas são:

A — Cota: 5 cm; Afastamento: $-1{,}5$ cm
B — Cota: -2 cm; Afastamento: 6 cm.

2842 — Determinar os traços no β_{13} e no β_{24} da recta que une os pontos C e D cujas coordenadas são:

C — Cota: -6 cm; Afast.: $-2{,}5$ cm;
D — Cota: 8 cm; Afast.: 1,5 cm;

Distância entre as linhas de referência respectivas, 6,5 cm.

2843 — Determine a verdadeira grandeza do segmento de recta EF existente num plano de perfil cujas coordenadas dos pontos extremos são:

E — cota: 3,5; afast.: 4 cm.
F — cota: 0,8; afast.: 6 cm.

2844 — Dado um pentágono regular de 2,5 cm. de raio existente num plano projectante horizontal, determine as suas projecções, sabendo que o centro do polígono dista 4 cm. do plano horizontal, que o plano projectante faz um ângulo de 60 graus com o P. V. e que um dos lados do polígono é de nível.

Nota — Rebata o plano sobre PH.

Enunciados dos n.º 2841 a 2844 de Lacerda Ferreira

Liceus de Lisboa — Curso complementar de ciências — 1.ª Chamada — Julho de 1948.

ÁLGEBRA

2845 — Determinar os valores de k para os quais é positiva a raiz da equação $(k^2-2k+2)\,x-k^2+2k\sqrt{2}+1=0$. R: *Como é*

$$x=(k^2-2k\sqrt{2}-1):(k^2-2k+2)$$

e como os zeros do 1.º trinómio são $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *e os do 2.º são* $1+i$ *e* $1-i$, *para que* x *seja positivo basta que seja* $k<\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *ou* $k>\sqrt{2}+\sqrt{3}$, *por o 2.º trinómio ser positivo para qualquer valor real de* k.

2846 — Um comerciante pagou 428 escudos pela compra de lapiseiras a 24 escudos e canetas a 44 escudos. Quantas eram as lapiseiras e as canetas? R: *Se for* x *o número de lapiseiras e* y *o número de canetas será:* $24x+44y=428$ ou $6x+11y=107$; *esta última equação tem a solução* $x_0=16, y_0=1$, *como é fácil ver. As soluções gerais são então dadas pelas expressões* $x=16-11m, y=1+6m$; *e como os valores de* x *e* y *têm de ser inteiros e positivos* m *só pode ter os valores* 0 *e* 1. *O problema tem então duas soluções* $x=16, y=1$ *ou* $x=5, y=7$.

2847 — Formar a equação biquadrada que tem duas raizes iguais aos termos médios do desenvolvimento de $(1/\sqrt{2}+1/\sqrt{5})^5$. R: *Os termos médios do desenvolvimento são* ${}^5C_2\,(1/\sqrt{2})^3\cdot(1/\sqrt{5})^2$ *e* ${}^5C_3\,(1/\sqrt{2})^2\cdot(1/\sqrt{5})^3$ *ou seja* $1/\sqrt{2}$ *e* $1/\sqrt{5}$; *as outras raizes serão* $-1/\sqrt{2}$ *e* $-1/\sqrt{5}$ *e a equação pedida* $10x^4-7x^2+1=0$.

ARITMÉTICA

2848 — *a*) Determinar o resto da divisão por 23 de $E=(46h+5)^2\,(230k+30)+(92m+55)$. *b*) Enuncie os teoremas que empregou na resolução do problema anterior. R: $E\equiv 5^2\cdot 30+55\equiv 2\cdot 7+9\equiv 23\equiv 0$ (*módulo* 23). *Isto é, o resto da divisão de* E *por* 23 *é zero.*

2849 — Demonstre o seguinte teorema: «Se um número divide um produto de dois factores e é primo com um deles, divide o outro».

Liceus de Lisboa — Curso complementar de ciências — 2.ª Chamada — Julho de 1948.

ÁLGEBRA

2850 — Forme a equação de Diofanto que admite as soluções $x=1, y=1$ e $x=3, y=8$. R: *Seja* $ax+by=c$ *a equação pedida. Pelo enunciado deve ser* $a+b=c$ *e* $3a+8b=c$ *ou, por subtracção ordenada,* $2a+7b=0$. *Como* a *e* b *devem ser primos entre si e não nulos só pode ser* $a=7$ *e* $b=-2$ *o que dá* $c=5$. *Então a equação pedida é* $7x-2y=5$.

2851 — Dados os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, diga quantos produtos distintos se podem formar tomando três pelo menos daqueles números como factores e não figurando em cada produto dois factores iguais. R: ${}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6=20+15+6+1=42$.

2852 — Determine m de forma que entre as raizes do trinómio $2x^2+(m-2)\,x+3m+5$ fiquem compreendidas as do trinómio $x^2-7x+10$. R: *As raizes do segundo trinómio são* $x_1=2, x_2=5$. *As raizes do primeiro trinómio devem ser reais, para o que deve ser* $(m-2)^2-8\,(3m+5)\geqslant 0$, *ou seja,* $m^2-28m-36\geqslant 0$, *quer dizer, deve ser ou* $m\geqslant 14+\sqrt{242}$ *ou* $m\leqslant 14-\sqrt{232}$. *Por outro lado, como* 2 *e* 5 *são exteriores ao intervalo das raizes deve-se ter* $2\cdot 2^2+(m-2)\cdot 2+3m+5<0$ *o que dá* $m<-9/5$, *e* $2\cdot 5^2+(m-2)\cdot 5+3m+5<0$ *o que dá* $m<-5/2$. *Destas desigualdades conclui-se que é* $m<-5/2$.

ARITMÉTICA

2853 — Demonstre o seguinte teorema:

«Se dividirmos vários números pelo mesmo divisor, a soma dos números dados e a soma dos restos, divididos por esse divisor dão restos iguais. R: *Seja* d *o divisor,* a *e* b *dois números cujos restos na divisão por* d *são* r_1 *e* r_2, *isto é, seja* $a=d\cdot m_1+r_1$, $r_1<d$ *e* $b=d\cdot m_2+r_2$, $r_2<d$. *Então* $a+b=d\,(m_1+m_2)+r_1+r_2$ *ou* $(a+b)-(r_1+r_2)=d\cdot(m_1+m_2)$ *o que mostra serem iguais os restos das divisões de* $(a+b)$ *e* (r_1+r_2) *por* d. *Se considerarmos agora verdadeiro o teorema para* n *números, por indução se demonstra que o teorema é válido para um número qualquer de números, demonstrando que êle é válido para* $n+1$ *números.*

2854 — Determine dois números que tenham o máximo divisor comum e o menor múltiplo comum respectivamente iguais a $2\times 3\times h^2$ e $2^2\times 3^2\times 5\times h^2$. R: $N_1=2\cdot 3\times h^2$ *e* $N_2=2^2\times 3^2\times 5\times h^2$ *são dois números que satisfazem ao enunciado.*

Liceus de Lisboa — Curso Complementar de Ciências — Setembro de 1948.

ÁLGEBRA

2855 — Determine os valores inteiros e positivos dos parâmetros k e m que tornam igual a -2 a raiz da equação $m\,(1-3x)-k\,(3x+1)=84$, R: *Se* -2 *é* *raiz da equação será* $7\,m+5\,k=84$; *como* $84=7\times 12$ *uma solução em números inteiros daquela equação é o par* $m_0=12$, $k_0=0$ *e as soluções gerais serão dadas pelas expressões* $m=12-5p$ $k=7p$ *onde* p *é um inteiro qualquer. Determinando* p *de modo que* $12-5p>0$ *e* $7p>0$ *vê-se que é* $p=1$ *ou* $p=2$ *donde* $m=2$, $k=2$ *ou* $m=7$, $k=1$.

2856 — Determine os valores do parâmetro real k para os quais a equação $k\,x^2\,(x^2-1)+5\,x^4-2\,x^2+1=0$ admite quatro raizes imaginárias puras. R: *A equação pode escrever-se sob a forma* $(k+5)\,x^4-(k+2)x^2+$ $+1-0$. *Para que as raizes sejam imaginários puros é necessário que as raizes da resolvente sejam ambas negativas para o que é necessário ser* $\triangle\geqslant 0$ $S<0$ $P>0$; *ou seja* $(k+2)^2-4\,(k+5)\geqslant 0$; $(k+2:(k+5)<0$ *e* $1:(k+5)>0$. *A primeira desigualdade dá* $k>4$ *ou* $k<-4$; *a segunda dá* $-5<k<-2$ *e a terceira* $k>-5$. *Em resumo terá que ser* $-5<k<-4$.

2857 — Torne irredutível a fracção:

$$(A_p^n-A_{p-1}^n)/A_p^{n-1}$$

R: *Notando que* $A_p^n=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+1)$ $A_{p-1}^n=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+2)$ *e* $A_p^{n-1}=(n-1)$ $(n-2)\cdots(n-p+2)\;(n-p+1)\;(n-p)$; *obtem-se, pondo em evidência o factor comum*

$$(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+2)$$

$$\frac{n\,(n-p+1)-n}{(n-p+1)\,(n-p)}=\frac{n}{n-p+1}.$$

Aritmética

2858 — Demonstre o teorema:

«Se um número é divisível separadamente por três números primos entre si dois a dois, é divisível pelo produto deles». R: *Seja* N *o número divisível por* a, b *e* c *primos entre si dois a dois. As decomposições em factores primos de* a *de* b *e de* c *existem inteiramente na decomposição de* N; *e como cada uma delas não contém qualquer factor primo que pertença a qualquer das outras, o produto* abc *está inteiramente contido na decomposicão de* N *que é assim divisível por êle.*

2859 — A soma de dois números é 240 e o seu máximo divisor comum é um número inferior a 30.

Calcule os números sabendo que têm *oito* divisores comuns. R: *O* m.d.c. *dos números pedidos deve ser um divisor de* 240. *Os divisores deste números menores que* 30 *são* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 20 *e* 24; *dêstes só* 24 *tem oito divisores e é êle, portanto, o* m.d.c. *dos números pedidos. Se forem* a *e* b *êsses números é* $a=24\,p$ *e* $b=24\,q$ *onde* p *e* q *são primos entre si*; *logo* $a+b=24.(p+q)$ *e por isso* $p+q=10$; *então só pode ser* $p=1$, $q=9$ *ou* $p=3$, $q=7$. *Donde as soluções do problema* $a=24$, $b=216$ *ou* $a=72$, $b=168$.

Soluções dos n.os 2845 a 2859 de J. da Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

MATEMÁTICAS GERAIS — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

I. S. C. E. F. — Matematicas Superiores — **1.ª cadeira, 2.ª época — Exame final, 2-10-1948.**

2860 — Em certo determinante de 3.ª ordem de valor 1, cada elemento a_i^k tem por menor complementar $(-1)^{i+k}\dfrac{i\cdot k}{i+k}$. Quais são os elementos da primeira linha? R: $\left\{\begin{array}{l} a_1^1\,A_1^1+a_1^2\,A_1^2+a_1^3\,A_1^3=1\\ a_1^1\,A_2^1+a_1^2\,A_2^2+a_1^3\,A_2^3=0\\ a_1^1\,A_3^1+a_1^2\,A_3^2+a_1^3\,A_3^3=0\end{array}\right.$ com

$$|A_i^k|=(-1)^{i+k}\,i\cdot k/(i+k)\quad\left\{\begin{array}{l} 1/2\,a_1^1+2/3\,a_1^2+3/4\,a_1^3=1\\ 2/3\,a_1^1+\,a_1^2+6/5\,a_1^3=0\\ 3/4\,a_1^1+6/5\,a_1^2+3/2\,a_1^3=0\end{array}\right.$$

e por condensação da matriz

$$\left\|\begin{array}{cccc}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ \frac{2}{3}&1&\frac{6}{5}&0\\ \frac{3}{4}&\frac{6}{5}&\frac{3}{2}&0\end{array}\right\|\rightarrow\left\|\begin{array}{cccc}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ 0&\frac{1}{9}&\frac{1}{5}&-\frac{4}{3}\\ 0&\frac{1}{5}&\frac{3}{8}&-\frac{3}{2}\end{array}\right\|\rightarrow\left\|\begin{array}{cccc}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ 0&\frac{1}{9}&\frac{1}{5}&-\frac{4}{3}\\ 0&0&\frac{3}{200}&\frac{9}{10}\end{array}\right\|$$

$$\frac{1}{2}a_1^1+\frac{2}{3}a_1^2+\frac{3}{4}a_1^3=1,\quad \frac{1}{9}a_1^2+\frac{1}{5}a_1^3=-\frac{4}{3},$$

$$\frac{3}{200}a_1^3=\frac{9}{10}\quad ou\quad a_1^1=72,\ a_1^2=-120,\ a_1^3=60.$$

2861 — Represente geomètricamente a função $y=(a-x)/[(x+a)^2+12\,ax]$ $(a>0)$. (Dispensa-se a determinação precisa das inflexões). R: Domínio: $(-\infty,-a\,[7+\sqrt{48}])$, $(-a\,[7+\sqrt{48}],-a\,[7-\sqrt{48}])$, $(-a\,[7-\sqrt{48}],+\infty)$. Traços nos eixos: $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$, $(a,0)$. Assíntotas: $x=-a\,[7\pm\sqrt{48}]$; $y=0$; *não há assintotas obliquas.* Máximos e mínimos: Máximo $\left(-3a,-\dfrac{1}{8a}\right)$; mínimo $\left(5a,-\dfrac{1}{24a}\right)$. Variação: $-\infty$, *crescente*, $-3a$, *decrescente*, $5a$, *crescente*. $+\infty$. Inflexões: $y''=-(x^3+22\,ax^2-118\,a^2x-419\,a^3)\,(x^2+14\,ax+a^2)^{-3}$, *limite excedente das raizes de* y'', $L=7a$; *existe uma inflexão entre* $5a$ *e* $7a$.