Equação diferencial associada:

$$x_2\,dx_2 = (u^2-1)\,y\,dy \;\therefore\; x_2^2 = (u^2-1)\,y^2 + C\,(u)\,.$$

Integral da equação $Y=0$:

$$F\,(y \mid u \mid x_2) = x_2^2 + (1-u^2)\,y^2.$$

$F\,(0 \mid u \mid x_2) = x_2^2$ *não depende de* u, *portanto trata-se de um integral do sistema completo.*

Regresso às primitivas variáveis:

$$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

c) *Integral geral:*

$$f = \Theta\,(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)\,.$$

2883 — Um ponto pesado P move-se sem atrito sobre uma linha fixa de extremos nos pontos

$$O\,(0\,,0\,,0) \quad \text{e} \quad A\,(1\,,0\,,0)\,,$$

sob a acção de uma força *constante* normal ao plano Oxz.

Parte de O com velocidade nula e pretende-se determinar essa linha de modo a atingir A o mais ràpidamente possível.

Reduzir à determinação da trajectória de um ponto material livre num campo dado. R: *Tomemos*

$$U = m a y - m g z\,.$$

De

$$2T = 2\,(U+E) = 2\,(may - mgz + E)$$

resulta (*ponto* O) $E=0$.

$$\therefore\; v^2 = 2\,(ay-gz)\,.$$

$$t_{OA} = \int_{OA} \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2\,(ay-gz)}}\,, \quad \delta t_{OA} = 0\,.$$

Princípio da acção estacionária, para um ponto P' *de massa* $m'=1$:

$$A = \int \sqrt{2\,(U'+E')}\,ds \;\;(S=s)\,, \quad \delta A = 0\,.$$

Pondo de lado um factor numérico constante e fixando $E'=0$, *será*

$$U' = \frac{1}{ay-gz}\,.$$

Equações de movimento do ponto P':

$$x'' = \frac{\partial U'}{\partial x} = 0\,, \quad y'' = \frac{\partial U'}{\partial y} = -\frac{a}{(ay-gz)^2}\,,$$

$$z'' = \frac{\partial U'}{\partial z} = \frac{g}{(ay-gz)^2}\,.$$

Resultam imediatamente três integrais primários:

$$x' = \alpha\,, \quad gy' + az' = \beta\,,$$

e o integral da força viva, que tem a constante de integração fixada $(E'=0)$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2/(ay-gz)\,.$$

Só teremos de reter as equações das trajectórias que se obtêm eliminando t:

$$\left\{\begin{array}{lll} y' = \dfrac{dy}{dx}\cdot\alpha & \therefore & \alpha\left(g\dfrac{dy}{dx} + a\dfrac{dz}{dx}\right) = \beta \\[2ex] z' = \dfrac{dz}{dx}\cdot\alpha & & \alpha^2\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right] = \dfrac{2}{ay-gz} \end{array}\right.$$

$\alpha \neq 0$, *porque* x *não pode ser constante.*

A 1.ª equação integra-se imediatamente, vindo

$$gy + az = 0$$

depois de obrigar a trajectória a passar por O *e* A, *o que fixa* β *e a nova constante de integração.*

A última equação dá a outra equação da trajectória, mediante uma quadratura; ficam fixados α^2 *e a nova constante de integração.*

Enunciados e soluções dos n.os 2881 a 2883 de Manuel Gonçalves Miranda.

CRÍTICA DE LIVROS

LIÇÕES DE ÁLGEBRA SUPERIOR E GEOMETRIA ANALÍTICA, (Tomo I)

por **Arnaldo Madureira** (*Professor catedrático da Faculdade de Ciências do Porto*)

Durante largos anos a preparação dos estudantes das nossas Escolas Superiores, tanto para as aulas como para os exames, fez-se pela «sebenta».

Ùltimamente, porém, esta prática tem sido substituída pela publicação das lições, sob a imediata responsabilidade dos próprios professores.

Ora, é precisamente um livro deste tipo que neste momento nos cabe analisar e, sendo assim, o que interessa, acima de tudo, é esclarecer em que medida a Universidade atinge através dele o objectivo fundamental de fornecer aos estudantes de Álgebra um bom manual de trabalho e um valioso elemento de consulta, tudo isso avaliado à luz de um critério actual do que deve ser o ensino superior daquela disciplina.

Dentro desta orientação, destacaremos os três pontos seguintes: *prefácio, introdução e segunda parte.*

Prefácio. Diz-se nele, textualmente: «Ao publicarmos este trabalho, temos apenas em vista prestar um serviço aos nossos alunos, fornecendo-lhes um compêndio que lhes permita seguirem fàcilmente as nossas lições, sem precisarem de distrair a atenção na recolha de apontamentos nem *perderem* tempo na consulta de vários livros, em que decerto encontrariam tratados os mesmos assuntos».

E a reforçar esta afirmação, logo no período seguinte se acrescenta, à maneira de implicação: «Não se trata, portanto, de um livro com pretensão de originalidade, mas sim, como o título indica, de uma exposição das lições...».

Ora, se se pode admitir, até certo ponto, que um autor ligue a sua responsabilidade às afirmações que entender, já o mesmo não é legítimo quando essas afirmações envolvem, como é o caso neste livro o ensino numa Escola Superior.

Não se pode aceitar que uma Universidade subscreva a doutrina deste prefácio, onde a função do professor e do livro de texto aparecem reduzidos a um simples papel burocrático, do qual se baniram as preocupações de originalidade, o estudo de bons autores e a íntima colaboração de mestres e alunos na análise de verdadeiros problemas!

Introdução. O autor, depois de dar uma definição de *Álgebra Ordinária*, sem qualquer sentido, (pág. 7) esboça uma teoria dos números reais e complexos, que hoje ninguém pode justificar.

Efectivamente, pelo que respeita aos números reais, há três maneiras fundamentais (todas equivalentes) de proceder à sua construção lógica: 1) pelas sucessões convergentes (Cantor); 2) pelos cortes de Dedekind; 3) pelas sucessões de encaixe.

No entanto o que o autor diz sobre este assunto a págs. 9-12, longe de constituir uma exposição mesmo elementar de qualquer desses métodos, só pode servir para aumentar a confusão de um aluno de Álgebra a respeito da maneira de introduzir os números irracionais com base na noção de *corte* ou *cisão* (Dedekind).

Na verdade, diz-se assim: «chamando *contínuo* a um conjunto em que todas as cisões nele produzidas são feitas por elementos do próprio conjunto, diremos que o conjunto dos números racionais não é contínuo. Torna-se, porém, contínuo, desde que introduzamos nele uma nova entidade necessária, *o número irracional,* definido justamente pela cisão (A/B), em que A não tem máximo e B não tem mínimo».

Ora, a circunstância de se afirmar que o conjunto dos números racionais não é *contínuo*, passando no entanto a sê-lo mediante a introdução de uma nova entidade numérica, o *número irracional*, desperta no aluno, até pelo próprio significado corrente das palavras *contínuo* e *introduzir*, a idéia-imagem de uma lacuna no conjunto dos números racionais, lacuna que se pretende preencher com qualquer coisa de novo.

Mas o valor desta imagem, como elemento auxiliar de esclarecimento, logo se perde, quando a seguir se exige da sua inteligência, compreenda o que seja preencher uma lacuna com uma *entidade numérica definida pela cisão* (A/B).

No entanto, como o autor falou em *cisões*, no propósito, é evidente, de abordar uma das construções lógicas possíveis dos números irracionais, teria, ao menos, de enfrentar o problema com os meios de que hoje dispomos, tornando, então, compreensível a operação lógica de preencher lacunas do conjunto dos números racionais. Mostraria como é possível definir na família das cisões (A/B) as operações fundamentais de soma e produto de cisões e uma relação de ordem, tais que se verifiquem todas as propriedades já encontradas nos números racionais.

Acabaria por fazer compreender como se obteve, assim, uma verdadeira ampliação do corpo dos números racionais, pois nele está contida uma parte autêntica isomorfa daquele.

Em vez de o aluno partir a cabeça a tentar descobrir a maneira de introduzir novas entidades numéricas no conjunto dos números racionais, aprenderia a ampliar este no sentido atrás indicado, de modo a chegar, no final, a um *contínuo*.

E para atingir êsse objectivo bastaria utilizar a explêndida Biblioteca da Faculdade de Ciências do Porto e recorrer à colaboração de algumas das pessoas que mais se têm ocupado deste assunto entre nós — Prof. Almeida Costa, Assistente Andrade Guimarães e Lic. Neves Real. E desse modo teria prestado um grande serviço à sua escola e ao ensino.

Ao expor os números complexos cai o autor em deficiências análogas, escrevendo, por exemplo, pág. 12, «Números imaginários são os números de forma $a+bi$, em que $i=\sqrt{-1}$ e a e b são números reais.

Na expressão $a+ib$ estão incluidos os números reais para $b=0$, etc.»

Há aqui, no fundo, os mesmos erros de construção lógica que já referimos a respeito dos números irracionais, erros apontados já por Hamilton há um século, mas que hoje não é legítimo cometer num livro de ensino de Álgebra Superior. Hamilton [1] exprimia-se nestes termos: «In the Theorv of Simple Numbers, the Symbol $\sqrt{-1}$ is *absurd*, and denots an Impossible Extraction, or a merely Imaginary Number; but in the Theory of Couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is *significant*, and denotes a Possible Extraction, or a Real Couple, namely the *principal square-root of the couple* $(-1,0)$. In the later theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, ifwe choose, for any couple (a_1, a_2), whatever,

$$(a_1, a_2)=a_1+a_2\sqrt{-1}\,.»$$

Fazemos aqui estas transcrições, tiradas por sua vez de *Algebra's Debt to Hamilton by C. C. Mac Duffee* [1], pois contêm o ponto de vista actual sobre

(1) The Scripta Mathematica Studies, n.º 2, A Collection of Popers in mewores of Sir William Rowan Hamilton, 1945.

o verdadeiro significado do símbolo $a+bi$, ponto de vista que para o génio de Hamilton era já evidente em 1835!

Na segunda parte, encontramos defeitos idênticos como sejam a afirmação de que ∞ não é limite pròpriamente dito, acompanhada *da demonstração de que é absurdo escrever* $|u_n - \infty| < \delta$ e, a pág. 239, esta definição de função: «Consideremos duas variáveis z e u e uma sucessão arbitrária $z_1, z_2, \cdots z_n, \cdots$ de valores da primeira. Suponhamos que entre as duas variáveis existe uma relação tal que faça corresponder àqueles valores de z respectivamente os termos de sucessão $u_1, u_2 \cdots, u_n, \cdots$ Diz-se então que u é função de z e escreve-se $u=f(z)$» — definição que se não pode admitir e à qual dificilmente se poderá atribuir qualquer sentido. De facto, no conceito de função o que há de característico é uma correspondência entre dois conjuntos, domínios de z e u, e o que interessaria era exemplificar e não introduzir a sucessão $z_1 \cdots, z_n, \cdots$, não se sabe a que propósito.

Em resumo, livro que não constitui uma contribuição positiva para o ensino de Álgebra, antes persiste em expor alguns dos seus principais problemas de uma maneira incorrecta e antiquada, inadmissível num curso universitário.

Ruy Luis Gomes

ARITMÉTICA E LÓGICA (Edit. Giulio Einaudi, Torino 1947)

por **G. Frege**

1. L'opera classica: «*Die Grundlagen der Arithmetik*» del celebre logico tedesco, pubblicata a Breslavia nel 1884, appare per la prima volta tradotta in italiano e accuratamente annotata dal prof. *L. Geymonat*, incaricato di storia delle matematiche presso l'Universitá di Torino. Il volume raccoglie, oltre a quest'opera, anche le traduzioni, parziali o integrali, d'alcuni articoli dello stesso A., articoli che si connettono all'argomento ed anzi possono quasi considerarsene il seguito[1]. Termina con la traduzione d'alcune pagine salienti, ricavate dalla prefazione d'una seconda opera dell'A., pubblicata a Jena negli anni 1893 (I° vol.) e 1903 (II° vol.) col titolo: *Grundegsetze der Arithmetik*, opera di ben piú vasta mole e particolarmente interessante dal punto di vista matematico[2].

Quest'edizione dei *Grundlagen* non mancherà d'alimentare negli satudiosi italiani e, speriamo, anche in quelli di lingue portoghese e spagnola, l'interesse per un complesso di questioni filosofico-matematiche che, lungi dall'esser risolte, sembrano anzi attualmente coinvolte in una profonda crisi del pensiero scientifico. *Frege* è oggi più che mai discusso, riscuotendo ammirazione (anche superiore, crediamo, ai suoi meriti reali) da quelli che, pur metendo in luce l'innegabile aspetto contradittorio del suo pensiero, affermano d'aver proseguito la sua opera, applicando i suoi metodi fondamentali di ricerca e traendo dai suoi principi le ultime conseguenze.

2. Nella feconda collaborazione di matematici e filosofi, si puó dire che l'atteggiamento dialettico secondo cui i primi hanno la tendenza a separare il piú nettamente possibile la loro scienza da ogni influsso filosofico, mentre i secondi si reservano lo studio dei problemi relativi all'esistenza, al contenuto concettuale, al valore (nel quadro generale della conoscenza) degli enti posti a fondamento delle richerche matematiche, s'è andato accentuando a partire dalla fine del secolo scorso. Nel campo dell'aritmetica, piè precisamente della teoria dei numeri naturali, la tendenza matematica ha portato, com'è noto, a un risultato perfetto e definitivo con l'opera dell'italiano *G. Peano* (1858-1932), al quale è dovuta la scoperta della definizione assiomatica dei tre concetti: lo *zero*, il *numero*, il *successivo*.

Frege, coi suoi "*Grundlagen*", è l'iniziatore delle ricerche filosofiche moderne relative alla natura del concetto di *numero naturale* e delle leggi fondamentali dell'aritmetica. I "*Grundlagen*" constano d'un'introduzione, d'una breve premessa e di cinque capitoli, ciascuno dei quali è suddiviso in sezioni e paragrafi. I primi tre capitoli (e cioè più di metà dell'opera) hanno carattere prevalentemente critico: vi si discutono con notevole acutezza le opinioni dei più illustri matematici e filosofi, sulla natura delle proposizioni aritmetiche (cap. I), sul concetto di numero naturale (cap. II), sull'unità e sul numero uno (cap. III). Gli ultimi due capitoli costituiscono la parte più propriamente costruttiva dell'opera. L'A. attribuisce al concetto di numero naturale due caratteri essenziali: a *sovrasensibilità* e l'*oggettività* (p. 75). Egli non es-

[1] Gli articoli (alcuni solo parzialmente tradotti) hanno i seguenti titoli: *Ueber Begriff und Gegenstand* (Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie XVI, 1892, pp. 192-205); *Ueber das Trägheitsgesetz* (Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik XCVIII, 1890, pp. 145-161); *Ueber Sinn und Bedeutung* (Id. Id. C, 1892, pp. 25-50).

[2] Quest'opera trovasi ampiamente riassunta nel volume di *A. Natucci: Il concetto di numero e le sue estensioni* (Torino, Bocca 1923, cap. XXI pp. 320-333) e recensita da *G. Peano* nella *Rivista di Matematica* (vol. V, 1895, p. 122).

clude che l'esperienza sensibile o quella psicologica interna siano condizioni necessarie affinché *possa formarsi* nel nostro spirito il concetto di numero. Ma questo è problema che interessa, afferma l'A., esclusivamente la psicologia e la cui soluzione non getta in realtà alcuna luce sull'essenza del concetto di numero. L'A. infatti distingue il concetto del numero dalla *rappresentazione* di esso: questa, soltanto questa, interessa la psicologia, è soggettiva, personale. Si parla o si può parlare della *mia* rappresentazione del numero 2, della *tua*, della *sua*. Ma non si può parlare che d'un solo concetto del numero 2: e perciò s'adopera l'articolo indicativo, dicendo "*il*" numero 2. Se esistessero più numeri 2 (cioè più concetti del numero 2), potrebbe sorgere il dubbio che questi fossero diversi non solo da uomo a uomo, ma anche nel tempo e si potrebbe sospettare che il concetto del numero 2 avesse ad evolversi nei secoli, talchè per es. il prodotto 2×2 non divenisse un giorno, per avventura, uguale a 5 (pp. 23, 75). Ma contro la possibilità d'un'evoluzione storica sia del concetto di numero che delle leggi fondamentali dell'aritmetica, l'A. si pronuncia con estrema decisione: "Il metodo storico, che vuole affermare le cose nel loro divenire e scoprirne in questo modo l'essenza profonda, avrà senza dubbio la sua ragion d'essere ma ha pure i suoi limiti. Se nel flusso ininterrotto di tutte le cose non esistesse proprio nulla d'immobile, d'eterno, allora cesserebbe la conoscibilità del mondo e tutto precipiterebbe in grande confusione" (p. 24).

La prima parte dei "*Grundlagen*" è chiaramente ispirata a un idealismo platonico. L'A. insiste, con particolare efficacia, nel dimostrare che *il numero non è una proprietà degli oggetti* (p. 79). *Euclide*, nel libro VII degli *Elementi*, chiama *unità* "ciò secondo cui ogni cosa è detta uno". Sostanzialmente analoga è la definizione di *Leibniz*: "è uno tutto ciò che può venir colto per mezzo d'un atto del pensiero". Ma *Frege* obietta: "non è forse possibile cogliere anche il molteplice per mezzo d'un atto del pensiero?". E non è forse tautologica questa definizione di *Leibniz*, se non dice che cosa debba intendersi per *un* atto del pensiero? (pp. 80-81). In realtà, afferma l'A., i singoli oggetti non hanno affatto la proprietà d'esser ciascuno un'unità. Infatti si può dire che un certo oggetto possiede una certa proprietà, soltanto se qualche altro oggetto ne risulta privo". L'affermazione che Solone è saggio, acquista un senso esclusivamente per la possibilità che qualcuno non sia saggio; il contenuto d'un concetto diminuisce, se la sua estensione si amplia; se questa poi viene a comprendere tutto, il contenuto del concetto andrà completamente perso" (pp. 79-80). D'altra parte, prosegue l'A., non è certo possibile ricavare dall'esperienza il concetto del *numero uno*, perchè l'esperienza non ci può suggerire, relativamente a un determinato oggetto preso in esamo, che certi caratteri d'indivisibilità e di delimitatezza, caratteri convenzionali che in realtà sono una creazione del nostro pensiero. Per essere esatti, si dovrebbe dire: "la tal cosa viene *pensata* come indivisibile e delimitata", cioè vien pensata come in realtà *non è*. E allora: come sarebbe possibile, da un'affermazione falsa intorno a una certa cosa dedurne una vera, cioè l'affermazione che quella cosa costituise un'unità? "Noi riusciamo a cogliere l'idea dell'unità solo per mezzo delle alte capacità spirituali che ci distinguono dagli animali. E quindi le pure e semplici proprietà degli oggetti (come l'esser delimitati e il non esser divisi) che vengono percepite altrettanto bene dagli animali quanto dagli uomini, non possono constituire i caratteri essenziali del concetto d'unità" (p. 82). Analoghe osservazioni valgono per il concetto di numero in generale: si riescono a contare degli oggetti soltanto dopo che s'è riasciti a riunirli sotto uno stesso concetto, ciò che contiene maggior forza di connessione che non l'appercezione sintetica (propria degli animali) (p. 107). In conclusione:" il numero non può venir rappresentato, nè come oggetto a sè, nè come proprietà connessa a qualche oggetto esterno; esso non è nè qualcosa di sensoriale, nè una proprietà degli oggetti esterni" (pp. 120-121); "l'attribuzione d'un numero contiene sempre un'affermazione intorno ad un concetto" (p. 103).

3. Qual'è dunque l'origine del concetto di numero, se non l'esperienza sensibile? Cercando una risposta a questa domanda e facendo propria la classificazione di *Kant*, dei giudizi o concetti a priori e a posteriori[(3)], analitici e sintetici, l'A. comincia col dimostrare che il numero non è un concetto a posteriori e ciò gli riesce facile valendosi dei caratteri d'oggettività e di sovrasensibilità sopra accennati. Analogamente anche le leggi dell'aritmetica non sono giudizi a posteriori. Dunque il numero è un concetto a priori, ma è esso, analitico o sintetico?

Kant affermava la natura sintetica del concetto di numero. *Frege* lo nega, entrando in distinzioni molto sottili e, a nostro parere, non del tutto chiare e sicure. Ci sembra che, come matematici italiani, abituati allo stile cristalino, semplice, quasi scarno del *Peano*, a quello elegante e ricco dell'*Enriques*, non si possa fare a meno di provare, leggendo queste pagine, una certa impressione di prolissità e di confusione. Cerchiamo tuttavia di chiarire, nella sua intima essenza, il pensiero dell'A..

Ogni concetto, secondo *Kant*, ha il suo fondamento in un'intuizione. Ora noi possiamo certamente avere un'intuizione dei numeri piccoli $1, 2, 3, \cdots$, ma non la possiamo avere dei numeri grandi, per es. di $\left(1000^{1000^{1000}}\right)$ (p. 163). Perciò non possiamo considerare evidente di per sè stessa un'uguaglianza come per es. $135.664+37.863=173.527$. E sicomme la distinzione fra numeri grandi e numeri piccoli è soggettiva e quindi arbitraria, così non dobbiamo considerare evio intuitive neppure delle uguaglianze come $2+2=4$ o $2+1=3$ (p. 36). Qui l'A. si rifa sostanzialmente a *Leibniz*, del quale accetta la dimostrazione (opportunamente perfezionata) dell'uguaglianza $2+2=4$ (pp. 37-38). Questa dimostrazione si può generalizzare a proposito della somma $a+b$ di due numeri naturali qualunque, riconducendo l'operazione rappresentata dal simbolo $a+b$, a b sucessive addizioni d'un'unità, a partir dal numero a. Con ciò il problema si semplifica soltanto in apparenza, occorrendo spiegare la natura dell'operazione elementare indicata dal simbolo $a+1$.

Ma l'A. non è un platonico nel senso di *Leibniz*, il qual considerava il numero, per così dire, como una *figura metafisica ed incorporea* (p. 67). L'A. ritiene di dover dimostrare che $2+1=3$, appunto perchè il concetto del numero è analitico e non sintetico e perchè le leggi dell'aritmetica sono analitiche e non sin-

(3) Cfr.: *Critica della ragion pura*, introduz IV, V.

tetiche. Pura deduzione dunque? *Frege* recorre a delle immagini originali e suggestive. "In realtà, egli dice, tali conseguenza sono davvero contenute nelle definizioni: ma come la pianta nel seme, non come una trave nella casa" (p. 163). L'aggiunta d'un' unità ad un numero qualunque è sì un'operazione analitica, ma non deduttiva nel senso che il suo risultato possa farsi rientrare in una definizione di carattere generale, come per es. se si dicesse: il numero è ciò che s'ottiene proseguendo ad aumentare d'un'unità". Quasi che i numeri si distinguessero l'uno dall'altro, soltanto per il fatto d'esser l'uno più grande e l'altro più piccolo, e quindi dovessero considerarsi "modi semplici come quelli dello spazio" Già *Leibniz* aveva criticato un tale tentativo di difinizione, osservando che: "questo può venir detto del tempo e dei segmenti rettilinei[4], ma non delle figure e ancor meno dei numeri, i quali risultano non soltanto diversi fra loro per grandezza, ma pure dissimili. Infatti un numero pari è divisibile per due, mentre non lo è uno dispari; 3 e 6 sono numeri triangolari; 4 e 9 sono quadrati, 8 è un cubo, ecc.; e ciò ha luogo ancor più per i numeri che per le figure, dato che due figure disuguali possono essere totalmente simili, mentre ciò non accade mai per due numeri" (pp. 45-46). *Frege* precisa ed approfondisce in modo efficace quest'osservazione. "Nemmeno sarebbe lecito, egli dice, paragonare i numeri agli individui di una stessa especie animale; essi hanno infatti, per loro natura, un ordinamento fisso, ognuno è formato in un modo suo proprio e possiede le sue particolari caratteristiche... Il paragone più appropriato potrebbe essere il seguente. Supponiamo d'aver scavato un pozzo e d'aver osservato che, in esso, la temperatura cresce proporzionalmente alla profondità. Si siano inoltre incontrati, nello scavo, strati pietrosi assai diversi. In questa ipotesi è evidente che, dalle osservazioni finora compiute, è impossibile ricavare alcunchè circa le proprietà degli strati ulteriori e che resta indeciso se si conserverà acora, o no, la precendente regolarità nella distribuzione delle temperature. Senza dubbio, tanto quello che venne finora osservato, quanto ciò che giace più in fondo, cadono entrambi sotto il concetto generico di «ciò che s'incontra proseguendo lo scavo del pozzo»; una tal subordinazione logica giova però, nel nostro caso, assai poco... Qualcuno obietterà forse che fra i due casi (l'esempio del pozzo e l'esempio della successione dei numeri naturali) sussiste una notevole diversità: gli strati successivi del terreno vengono, nello scavo del pozzo, soltanto incontrati; i numeri invece vengono proprio criati e determinati in tutto il loro essere, dall'aggiunta di un'unità. Rispondiamo: questo può significare soltanto che è possibile dedurre tutte le proprietà d'un numero, per es. di 8, dal modo con cui esso è formato dall'aggiunta di successive unità" (p. 46).

Conseguentemente l'operazione indicata dalla formula $2+1=3$, non può significare semplicimente "*riunione*" d'un'unità al numero 2, cioè il segno + non può avere lo stesso valore della copula *e*. Il resultato dell'operazione indicata dal segno + è invece qualcosa d'essenzialmente nuovo, d'essenzialmente diverso dal numero 2 e cioè il numero 3 (p. 42).

4. A questo punto del ragionamento, avviene però una profonda fractura nel pensiero dell'A. Egli pone, a fondamento della sua ricerca, tre principi fondamentali o canoni, il più importante dei quali consiste nel "*cercare il significato delle parole, considerandole non isolatamente, ma nei loro nessi reciproci*" (p. 27). Dopo esser giunto, come s'è detto, alla conclusione che *il numero è un attributo d'un concetto e non d'un oggetto*, l'A. è indotto da questo canone a dare anzitutto un preciso significato ad una proposizione come questa: "il concetto F è *ugualmente numeroso* al concetto G" e cioè: una tale proposizione significa che "esiste la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca gli oggetti che cadono sotto G e quelli che cadono sotto F". Per es., con questa definizione, dobbiamo dire che: il concetto *numero complesso* ordinario è ugualmente numeroso al concetto *punto d'un piano cartesiano*, il concetto *punto d'una recta projettiva* è ugualmente numeroso al concetto *punto d'una circonferenza*, ecc. L'A. giunge così finalmente alla definizione del *numero naturale*, che spetta a un determinato concetto F: esso è l' *estensione* del concetto "*ugualmente numeroso ad F*" (p. 134). Questo è il punto cruciale di tutta l'opera e va esaminato con molta attenzione. L'A. compie sostanzialmente, con questa definizione, il tentativo di ricondurre l'aritmetica alla logica, tentativo che, come è noto, è stato poi ripreso con molto successo da *B. Russell* e dalla sua scuola. Ora si deve, a questo punto, fare un'obiezione di principio. Nelle pagine che contengono la definizione del numere or ora riportata, l'A. presuppone che si sappia che cos'è l'*estensione d'un concetto.* Ma poichè il significato di tale *estensione* non è in realtà dato e non può affatto dirsi di per sè evidente, o più evidente di quanto non lo sia il significato del termine *numero*, si può obiettare che la definizione d'un termine, ricorrendo ad un altro termine del quale non sia stata data a sua volta una definizione, non risolve nulla. Comprendiamo perfettamente la risposta che il *Geymonat* (nota a p. 135) dà a questa obiezione: "nel pensiero di *Frege*, è completamente fuori luogo porre il problema se un'idea risulti più o meno chiara dell'altra; l'importante è che l'idea d'estensione appartiene, senza possibilità di dubbio, al campo della logica". Rileviamo però l'intima contradizione che, proprio a questo punto, s'inserisce nel ragionamento dell'A.. Infatti, in termini sostanzialmente equivalenti, possiamo formulare l'obiezione dicendo che, in fondo, la teoria dell'A. diventa qui non meno formale di altre, non meno per es. di quella del *Peano*. Anche gli assiomi del *Peano* seguono il canone fondamentale di *Frege*: essi infatti spiegano il significato delle parole *numero, zero* e *successivo* non considerandole isolatamente, ma nei loro nessi reciproci. La diferenza fra *Peano* e *Frege* è soltanto questa: che il primo non valica i ben definiti confini dell'aritmetica il secondo invece definisce (o tenta di definire) i suddetti termini mediante altri termini presi in prestito dalla logica, ma questi ultimi definisce l'uno con l'altro, cioè appunto *nei loro nessi reciproci*. Ma è chiaro che ciò contradice alle idee platoniche espresse dall'A. nella prima parte del libro, spalancandosi ora le finestre a quel formalismo cui s'eran prima sbarrate le porte. Di questo formalismo l'A. è evidentemente consapevole, ma ciò non diminuisce l'aspetto contradittorio del suo ragionamento.

(4) Perchè i singoli istanti presentano fra di loro una certa uniformità, così i segmenti rettilinei, i punti, i piani, le rette ecc. Per es., dati due piani, uno dei due può portarsi a coincidere e cioè a *identificarsi* con l'altro, mediante un'operazione (movimento) che, in certo senso, non ne fa perdere i caratteri distintivi.

5. Il formalismo s'accentua nelle definizioni che s'incontrano nel seguito del libro: nella definizione dello zero, in quella d'un numero n che segue immediatamente ad un altro numero m, nella serie dei numeri naturali, infine in quella del numero 1.

Accenniamo per sommi capi. Per la prima di queste definizioni, zero è il numero naturale (cioé l'estensione) che spetta al concetto "diseguale da sè stesso" (p. 144). Per la seconda, s'afferma l'esistenza "d'un concetto F e d'un oggetto x che cade sotto F, per i quali valgono le seguenti proposizioni: n è il numero che spetta ad F, ed m è invece il numero che spetta al concetto «ciò che cade sotto F ma è diverso da x»" (p. 147). Per la terza definizione, "1 è il numero naturale che spetta al concetto «uguale a 0»" (p. 149).

Nel cap. IV l'A. dà anche le dimostrazioni, più o meno complete, dei più importanti teoremi deducibili dalle precedenti definizioni e cioè: "il numero spettante al concetto F è uguale al numero spettante al concetto G, se F e G sono fra loro ugualmente numerosi" (p. 142); "ad ogni numero ne segue un altro nella serie dei numeri naturali" (p. 155), ecc. Nello stesso cap. IV è anche la definizione del *numero infinito* che spetta al concetto "*numero naturale finito*" (p. 156) e sono esposte alcune osservazioni critiche sulla teoria dei numeri di *G. Cantor* (pp. 157-159).

Il cap. V contiene le conclusioni dell'opera, con considerazioni filosofiche profonde che ritornano ai concetti platonici dai quali l'A. aveva prese le mosse.

La contradizione cui abbiamo accennato sminuisce purtroppo il valore della profonda ricerca, ma induce forse ad esaltarne l'importanza, coloro che credono nell'avvenire del formalismo e vi contribuiscono coi loro studi: è lecito suporre che questi eccedano un poco nella loro ammirazione, interpretando la contradizione dell'insigne logico di Jena, come un'evidente dimostrazione dell'impossibilità di risolvere, esclusivamente sul terreno filosofico o almeno su quello idealistico platonico, i problemi da loro studiati.[5]

Tulio Viola

(5) Alludiamo, in particolare, ai neo-positivisti del «circolo viennese» e all'opera di *F. Waismann: Introduzione al pensiero matematico* (Edit. G. Einaudi, 1942).

SITUAÇÃO FINANCEIRA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

As contas da *Gazeta de Matemática* que o leitor poderá apreciar neste número da revista confirmam inteiramente as previsões e os comentários feitos no número anterior da Gazeta (N.º 37-38, pág. 42).

Assim, previu-se para 1948 um déficit da ordem da dezena de contos e ele é efectivamente de Esc. 14.131$80, importância na qual está contido o déficit resultante da publicação da 2.ª edição do ano I (N.º 1-4) que foi de Esc. 5.398$10.

O carácter permanente da situação deficitária da *Gazeta de Matemática* e a necessidade de urgente saneamento financeiro, para não comprometer totalmente a tarefa da revista, destacam-se referindo que o déficit no período 1946-47 (dois anos) foi de Esc. 6.859$15 e o déficit no período 1946-48 (três anos) foi de Esc. 18.306$70.

Fornecem uma razoável medida da compreensão dos assinantes da *Gazeta de Matemática* pela necessidade de elevar o preço da assinatura e do interesse despertado pelo apelo para a angariação de novos assinantes, os números que adiante se referem.

Novos assinantes inscritos depois da publicação do N.º 37-38: 117.

Números aproximados de assinantes e receita em:

	31-12-1947	31-12-1948	31-3-1949
Assinantes	700	670	496 ([a])
Receita de assinaturas	21.000$00	20.100$00	19.840$00 ([a])

([a]) A cobrança das assinaturas para 1949 ainda não está terminada.

	Conta de 1946-47	N.º 35	N.º 36	N.º 37-38	N.º 1-4	Total 1948	N.ºs 5 a 34	Total geral 1948
Despesa								
Composição, impressão, papel e cartolina	48.861.75	5.982.45	4.994.70	9.495.70	9.224.70	29.697.55	—	29.697.55
Despesas gerais...	22.547.55	1.992.60	1.992.60	3.985.15	115.40	8.085.75	1.30	8.087.05
Deficit de 1947 ...	—	—	—	—	—	—	6.859.15	6.859.15
Total....	71.409.30	7.975.05	6.987.30	13.480.85	9.340.10	37.783.30	6.860.45	44.643.75
Receita								
Assinaturas e venda avulsa	64.550.15	5.383.75	5.285.25	9.040.50	3.942.00	23.651.50	2.685.55	26.337.05
Deficit.......	6.859.15	2.501.50	1.702.05	4.440.35	5.398.10	14.131.80	4.174.90	18.306.70