

O método dos limites ⁽¹⁾

por Bento Caraça

1. Dificuldades antigas

O leitor que tenha acompanhado a exposição feita nos capítulos anteriores (volume I e II) deve estar recordado do que representou, na história da Filosofia e da Ciência, a crítica desenvolvida no século V a. C. pela Escola de Elea contra as proposições da *Escola Pitagórica*. A ruína desta Escola representou a *primeira grande crise da História da Matemática*, crise cujas características essenciais procurámos traçar no capítulo IV do volume I e que o leitor deve ter agora bem presentes para a compreensão do que vai seguir-se

O principal objectivo da crítica eleática — objectivo diga-se de passagem, realizado plenamente — foi mostrar que a teoria pitagórica das *mónadas*, que aspirava a ser a matriz duma interpretação geral do Universo, era inadequada a tal fim e era uma fonte de incapacidade e contradições. *Zenão de Elea*, numa crítica impiedosa de que nos foram conservados por *Aristóteles* os seus célebres *quatro argumentos*, verdadeiros modelos de vigor e de clareza na argumentação, provava com efeito:

1.º — que a afirmação da *Escola Pitagórica* de que *todas as coisas têm um número* era inconsistente em face da teoria das *mónadas*;

2.º — que a mesma teoria não fornecia base suficiente para a compreensão do movimento.

Estes são os dois aspectos fundamentais da *crise*. Do primeiro, adicionado à verificação, já anterior, do fenómeno da *incomensurabilidade*, resultou o eclipse, durante séculos, daquela grandiosa aspiração numa *ordenação matemática do cosmos*, de que a Escola Pitagórica nos fornecera uma primeira realização. Dele nos ocupámos, com algum pormenor, nos volumes I e II, mostrando como foram forçados, embora só muito tarde, dois instrumentos necessários à solução da crise — uma teoria satisfatória dos *números irracionais* e o conceito de *função*.

O segundo aspecto vai ser agora objecto do nosso estudo. Vamos recordar em que consiste a dificuldade, ver os desenvolvimentos a que deu origem a solução

encontrada, e lançar uma vista de olhos sobre as perspectivas que essa solução permitiu abrir.

2. A argumentação de Zenão de Elea

Expusemos no volume I ⁽⁴⁾, com alguma minúcia, os argumentos de Zenão tradicionalmente designados por *argumentos contra o movimento* mas que melhor será designar por *argumentos contra a compreensão do movimento*. Deles resulta que, em face da teoria pitagórica das *mónadas* e, por consequência, considerado o movimento como uma *sucessão de estados dum móvel* ⁽²⁾ ele é igualmente incompreensível, quer essa sucessão seja finita (argumento da flecha — não se percebe o que se passa entre um estado e o seu sucessivo), quer seja infinita (argumento de Aquiles e a Tartaruga — não se percebe como aquele alcança esta desde que ela parta com um avanço por mínimo que seja).

3. A essência da dificuldade

Qualquer que tenha sido o objectivo efectivo e inicial de Zenão (nós não possuímos mais do que o breve testemunho de *Aristóteles* que é de quase dois séculos posterior), a sua argumentação ficou na História da Ciência com este valor inestimável — mostrar-nos que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considerá-lo assim, equivale a abordar o seu estudo por um *método estático* que traz consigo o germen da infecundidade e da incompreensão — não é, já de si, o abordar o estudo do movimento por um *método estático* qualquer coisa de paradoxal?

Na verdade, a essência do movimento é tal que quando vamos a querer fixar a posição dum móvel, em determinado instante, num ponto da sua trajetória, já ele aí se não encontra — entre dois instantes, por mais aproximados que sejam um do outro, o mó-

(1) A págs. 96-99, cuja leitura é neste momento recomendada para o entendimento do que se segue.

(2) Efectivamente, a teoria das *mónadas*, oposta à continuidade eleática, implica que o movimento dum móvel é uma sucessão de estados — passagens de *mónadas* a *mónadas* sucessivas.

(1) Constitui este artigo parte do Capítulo I do Volume III dos «Conceitos Fundamentais da Matemática» ainda inédito e que aparecerá brevemente.

vel percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos. Deste fenómeno se pode dizer, como *Leonardo da Vinci* disse da chama — *olha para a chama e considera a sua beleza; fecha os olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já o não encontras.*

Reconhecemos aí um permanente compromisso entre *o ser e o não ser* — a cada instante, o móvel *está e não está* em determinado ponto: e entre ponto e ponto, por mais próximos, há uma infinidade de pontos. Tudo isto é inabordável pelo *método estático* que considera o movimento como uma sucessão de estados (posições) do móvel.

4. Novos tempos, novos problemas, novas atitudes

E eis o dilema posto em toda a sua creuza simples — ou renunciamos a compreender o movimento, a integrá-lo num quadro racional interpretativo dos fenómenos naturais, ou temos que ir para o seu estudo numa atitude de espírito diferente.

Entendamo-nos bem sobre o que queremos dizer quando escrevemos — *ir para o seu estudo.* Com isto queremos significar: *procurar obter uma teoria quantitativa, da qual resultem métodos de cálculo que nos permitam fazer previsões, sujeitas ao test da experiência e da observação.*

Se o objectivo é diferente, por exemplo, especular de feição metafísica, sobre a quinta essência do movimento, a atitude de espírito pode ser diferente, pode mesmo ser qualquer: daí não resultará provavelmente grande mal para o mundo, mas também, decerto, não um muito grande bem — a Física de Aristóteles ofereceu-nos disso o primeiro grande exemplo. .

Mas cada época, com a sua particular compleição social, tem os seus problemas dominantes. E a partir do século XVI, a técnica pôs problemas para cuja resolução se tornou indispensável a criação duma *teoria quantitativa.* Um desses problemas, sem dúvida um dos mais importantes, foi o do estudo dos movimentos dos astros, tornado indispensável pelas necessidades da navegação de alto mar. Foi preciso para esse efeito efectuar um duplo trabalho — realizar uma grande massa de observações; procurar integrar esses dados num quadro interpretativo racional, um conjunto de leis.

Sabe-se como a primeira parte dessa tarefa foi realizada por *Tycho-Brahe* e a segunda por *Kepler* e terminada na obra magistral de *Newton.*

A obra de *Kepler* representa um grande marco na História da Ciência e pode dizer-se que marca o início palpável, duma grande viragem na atitude dos pensadores, e que interessa neste momento registar. Como

vimos no capítulo IV do volume I, posteriormente a grande crise a que já acima fizemos referência, a mentalidade grega encerrou-se numa atitude *finitista* de que encontramos uma das manifestações mais acentuadas na cosmogonia que ficou sendo geralmente aceite⁽¹⁾ — um mundo finito, geocêntrico, formado por uma sucessão de esferas centradas sobre a Terra, esferas nas quais todos os astros se deslocavam em movimentos circulares. O *círculo* era a figura que convinha a uma tal concepção finitista — com efeito o movimento circular fecha-se sobre si mesmo, completa-se, o plano em que ele se dá pode rodar de qualquer ângulo sobre si mesmo sem que a trajectória circular se altere; era, por isso, considerado como o movimento perfeito, o *movimento natural.*

Kepler, estabelecendo em 1609 a sua primeira lei — *as órbitas planetárias são elipses das quais o Sol ocupa um dos focos* — deu a primeira machadada nesta *supremacia do círculo*⁽²⁾ que assim se viu demitido da situação proeminente de *lugar do movimento natural*⁽³⁾. Uma das consequências imediatas desse facto foi que se pôs naturalmente ao espírito dos pensadores esta pergunta — qual é a força responsável por que os planetas sem movam em órbitas elípticas? (tal pergunta não se punha enquanto os planetas eram considerados como movendo-se de *movimento natural*). Assim se instalou no primeiro plano das preocupações dos pensadores este problema da *causa física* do movimento⁽⁴⁾.

Para abordar o estudo deste problema em condições que permitam êxito, é preciso tomar esta atitude do espírito — o movimento é um *dado* e não uma *coisa a explicar*, um fenómeno que se trata de estudar nas suas manifestações observadas, fisicamente e não metafisicamente, o objectivo é encontrar uma lei ou conjunto de leis, que englobando os dados observados, permita prever resultados a confirmar, ou não, pela experiência. Nenhum preconceito devemos portanto levar que nos incline, por pouco que seja, a pretender explicar a natureza íntima do fenómeno dentro de quadros racionais pre-estabelecidos; tal atitude seria mortal para o êxito da empreza.

(1) Apesar das vozes discordantes, pelo menos, quanto ao geocentrismo a de *Aristarco de Samos.*

(2) Que a revolução copernicana, com toda a sua importância, deixara, no entanto, intacta.

(3) A segunda foi dada por *Galileu* com o *princípio de inércia* o lugar do movimento natural passou a ser *recta.* Será preciso acentuar o que este facto representa na passagem duma atitude finitista para uma infinitista?

(4) Sobre este problema e a sua importância na criação duma determinada *atitude científica*, nos cientistas post-renascimento, ver *H. T. Pledge, Science since 1500; the Philosophical Library, 1947.*