Caracterização dos espaços topológicos regulares e normais por meio de coberturas

por J. Abdelhay (Rio de Janeiro)

Espaço topológico é qualquer conjunto E sobre o qual se fixou uma família de subconjuntos A gozando das seguintes propriedades: 1) o conjunto vazio $\dot{O}$ e o conjunto E pertencem a A; 2) toda união de conjuntos de A é um conjunto de A, toda intersecção de um número finito de conjuntos de A é um conjunto de A. Cada conjunto da família A chama-se *conjunto aberto* do espaço topológico E. Cada conjunto aberto contendo um ponto $x \in E$ diz-se uma *vizinhança* de x.

Dois conjuntos C' e C'' de um espaço topológico E dizem-se *separados* se for possível encontrar dois conjuntos abertos e disjuntos A' e A'' tais que $C' \leqslant A'$ e $C'' \leqslant A''$.

O complementar de um conjunto aberto do espaço topológico E diz-se *conjunto fechado de* E. Quando cada ponto de um espaço topológico E é separado de cada conjunto fechado que não o contém então diz-se que o espaço topológico E é *regular*. Diz-se que E é *normal* se cada par de conjuntos fechados e disjuntos de E for também um par de conjuntos separados de E.

Cobertura de um espaço topológico E é qualquer família C de conjuntos abertos de E tal que cada ponto de E pertence a algum membro do família C. Diz-se que uma cobertura C é *subordinada* a outra cobertura C' se cada membro de C estiver contido em algum membro da cobertura C'. [1]

Espaço pontualmente para compacto é um espaço topológico separado E satisfazendo à condição seguinte: para toda cobertura C de E e todo ponto x de E existem uma cobertura C' de E subordinada a C e uma vizinhança V de x tais que V só intercepta um número finito de membros de C'. [2] (Um espaço topológico E diz-se *separado* se e sòmente se dois pontos quaisquer do espaço E forem separados).

Espaço localmente para compacto: Seja E um espaço topológico separado e X um subconjunto de E. Diz-se que E é *para compacto em* X se para toda cobertura C de E tal que um dos membros contenha X existe uma cobertura C' de E subordinada a C e gozando da propriedade seguinte: para todo ponto x de X existe uma vizinhança de x que só intercepta um número finito de membros de C'. Um espaço topológico separado que seja para compacto em cada subconjunto fechado diz-se um *espaço localmente para compacto*.

Propriedades dos espaços regulares e normais: Seja X um subconjunto do espaço topológico E. Se cada vizinhança de x e o conjunto X tiverem uma intersecção não vazia diz-se que x é *ponto de aderência* para o conjunto X. O conjunto dos pontos de aderência para X chama-se *aderência de* X e para indicar este conjunto usa-se o símbolo $\overline{X}$. Demonstra-se que: (1) se E é separado e regular então para cada ponto $x \in E$ e cada vizinhança de x, V, existe uma vizinhança V' de x tal que $\overline{V'} \leqslant V$ (cfr. Topologie de Alexandroff e Hopf, pág. 70, n. 7, «Satz IV»). Demonstra-se também que: (2) se E é um espaço topológico separado e normal, então para cada conjunto fechado F de E e cada conjunto aberto A contendo F existe um conjunto aberto V contendo F e tal que $\overline{V} \leqslant A$ (cfr. Top. de Alexandroff e Hopf, pág. 71, «Satz V»).

Teorema 1: *A condição necessária e suficiente para que um espaço topológico separado seja regular é que ele seja pontualmente para compacto.*

Demonstração: (1) a condição é necessária; seja, com efeito, E um espaço topológico separado e regular e seja C uma cobertura de E. Seja x um ponto qualquer de E e indiquemos com A_λ os membros da cobertura C (λ varia num conjunto Λ de índices). Temos logo que o ponto x pertence a algum dos conjuntos A_λ, suponhamos, para fixar ideias, que x pertence a A_0. Sendo E regular, por hipótese, existe uma visinhança V de x tal que $\overline{V} \leqslant A_0$ (v. resultado (1) citado acima). Pois bem, consideremos o cobertura C' formada pelo conjunto A_0 e pelos conjuntos $A_\lambda \cap \complement \overline{V}$. [3] Esta cobertura é evidentemente subordi-

[1] Esta definição é de J. Dieudonné, vide «Une généralisation des espaces compacts», Journal de Mathematiques pures et appliquées.

[2] Esta bem como a definição de espaço localmente para compacto dada abaixo são noções diversas das que, com o mesmo nome, se encontram no trabalho de J. Dieudonné citado anteriormente.

[3] $A_\lambda \cap \complement \overline{V}$ significa a intersecção do conjunto A_λ com o complementar do conjunto $\overline{V}$.

nada a C e a visinhança V intercepta sòmente o elemento A_0 de C'.

(2) a condição é suficiente; seja, com efeito, E um espaço topológico separado e pontualmente para compacto. Seja F um conjunto fechado de E e y um ponto de E que não pertence a F. Para todo ponto $x \in F$ existe, pois que E é separado por hipótese, uma vizinhança V_x de x e uma vizinhança W_x de y, as quais não tem ponto comum. Consideremos a cobertura C de E formada por todas as vizinhanças V_x, quando x varia em F, e pelo complementar F' de F. Existe, pois que E é pontualmente para compacto por hipótese, uma cobertura C' subordinada a C e uma vizinhança W de y tal que W só encontra um número finito $A_1, \cdots, A_n$ dos conjuntos de C'. Chamemos de U a união dos conjuntos de C' que interceptam F; temos que U é um conjunto aberto contendo F. Vamos mostrar que existe uma vizinhança V de y que não intercepta U, o que provará a nossa proposição. Com efeito, cada um dos A_i que intercepta F está contido, por definição, em um V_{x_i} correspondente a um ponto $x_i \in F$. Se se toma para V a intersecção W com as vizinhanças W_{x_i} correspondentes a estes pontos, tem-se que V é uma vizinhança de y que não encontra nenhum dos A_i que interceptam F; portanto, a fortiori, V não intercepta U.[4]

Teorema 2: *A condição necessária e suficiente para que um espaço topológico separado seja normal é que ele seja localmente para compacto.*

Demonstração: (1) a condição é necessária: seja com efeito, E um espaço separado normal. Seja F um conjunto fechado de E e C uma cobertura de E tal que um de seus elementos contenha o conjunto F. Devemos mostrar que existe uma cobertura C' de E subordinada a C e tal que para cada ponto de F existe uma vizinhança que só intercepta um número finito de elementos de C'. De facto, suponhamos que por exemplo, o elemento A_0 de C contenha F. Existe, então, sendo E normal por hipótese, um conjunto aberto V contendo F tal que $\overline{V} \leqslant A_0$ (v. resultado (2) citado acima). Consideremos a cobertura C' formada por A_0 e pelos conjuntos $A_\lambda \cup \complement \overline{V}$ (indicamos com A_λ os elementos da cobertura C). Esta cobertura C' é obviamente subordinada a C e o conjunto aberto V contendo F só intercepta o elemento A_0 de C'. Mas V é vizinhança de cada ponto de F, logo, a proposição está demonstrada.

(2) a condição é suficiente: suponhamos que o espaço topológico E seja separado e localmente para compacto e sejam F e G dois conjuntos fechados e disjuntos de E. Para todo $x \in F$ existe uma vizinhança V_x de x e um conjunto aberto W_x contendo G, os quais são disjuntos pois, sendo E localmente para compacto por hipótese, E é obviamente pontualmente para compacto e por conseguinte, pelo teorema anterior, regular. Consideremos a cobertura C de E formada por todas as vizinhanças V_x que se obtêm quando x varia em F e pelo complementar F' de F. Sendo o espaço E localmente para compacto por hipótese, existe uma cobertura C' subordinada a C tal que para todo ponto $y \in G$ existe uma vizinhança T_λ de y que só intercepta um número finito $A_1, \cdots, A_n$ de membros de C'. A união U dos conjuntos de C' que interceptam F é um conjunto aberto contendo F. Vamos mostrar que existe um conjunto aberto contendo G — chamemo-lo V — o qual não intercepta U, o que termina a demonstração. De facto, cada um dos A_n que intercepta F está contido por definição em um V_{x_i} correspondente a um ponto $x_i \in F$. Seja S_λ a intersecção dos T_λ e dos W_{x_i} correspondentes a estes pontos; S_λ é uma vizinhança de y qne não intercepta U. Se V é a união dos S_λ que se obtêm quando y percorre G, V é um conjunto aberto que contém G e que não encontra o conjunto U.[5]

[4] Esta parte da demonstração (condição suficiente) é devida a J. Dieudonné, v. Memória citada em (1).

[5] Esta parte da demonstração (condição suficiente) é devida a J. Dieudonné, v. Memória citada em (1).

Conchoïdes de cercles et equations de Riccati

par **Gabriel Viguier** (Paris)

Canonisation géométrique de l'équation de Riccati

Nous considérons le cercle (M) de coordonnées paramétriques:

$$(1) \qquad (M) \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\cos t \sin t \end{cases}$$

k désignant une constante quelconque, nous associons à la courbe-base (M) la courbe-adjointe (L) dont les équations paramétriques s'écrivent

$$(2) \qquad (L) \begin{cases} F = \dfrac{2\cos t}{k}(a\cos t + k)^2 \\[2ex] G = -\dfrac{\cos 2t}{k\sin t}(a\cos t + k)^2. \end{cases}$$