nada a C e a visinhança V intercepta sòmente o elemento A_0 de C'.

(2) a condição é suficiente; seja, com efeito, E um espaço topológico separado e pontualmente para compacto. Seja F um conjunto fechado de E e y um ponto de E que não pertence a F. Para todo ponto $x \in F$ existe, pois que E é separado por hipótese, uma vizinhança V_x de x e uma vizinhança W_x de y, as quais não tem ponto comum. Consideremos a cobertura C de E formada por todas as vizinhanças V_x, quando x varia em F, e pelo complementar F' de F. Existe, pois que E é pontualmente para compacto por hipótese, uma cobertura C' subordinada a C e uma vizinhança W de y tal que W só encontra um número finito $A_1, \cdots, A_n$ dos conjuntos de C'. Chamemos de U a união dos conjuntos de C' que interceptam F; temos que U é um conjunto aberto contendo F. Vamos mostrar que existe uma vizinhança V de y que não intercepta U, o que provará a nossa proposição. Com efeito, cada um dos A_i que intercepta F está contido, por definição, em um V_{x_i} correspondente a um ponto $x_i \in F$. Se se toma para V a intersecção W com as vizinhanças W_{x_i} correspondentes a estes pontos, tem-se que V é uma vizinhança de y que não encontra nenhum dos A_i que interceptam F; portanto, a fortiori, V não intercepta U. [4]

TEOREMA 2: *A condição necessária e suficiente para que um espaço topológico separado seja normal é que ele seja localmente para compacto.*

Demonstração: (1) a condição é necessária: seja com efeito, E um espaço separado normal. Seja F um conjunto fechado de E e C uma cobertura de E tal que um de seus elementos contenha o conjunto F. Devemos mostrar que existe uma cobertura C' de E subordinada a C e tal que para cada ponto de F existe uma vizinhança que só intercepta um número finito de elementos de C'. De facto, suponhamos que por exemplo, o elemento A_0 de C contenha F. Existe, então, sendo E normal por hipótese, um conjunto aberto V contendo F tal que $\overline{V} \leqslant A_0$ (v. resultado (2) citado acima). Consideremos a cobertura C' formada por A_0 e pelos conjuntos $A_\lambda \cup \complement \overline{V}$ (indicamos com A_λ os elementos da cobertura C). Esta cobertura C' é obviamente subordinada a C e o conjunto aberto V contendo F só intercepta o elemento A_0 de C'. Mas V é vizinhança de cada ponto de F, logo, a proposição está demonstrada.

(2) a condição é suficiente: suponhamos que o espaço topológico E seja separado e localmente para compacto e sejam F e G dois conjuntos fechados e disjuntos de E. Para todo $x \in F$ existe uma vizinhança V_x de x e um conjunto aberto W_x contendo G, os quais são disjuntos pois, sendo E localmente para compacto por hipótese, E é obviamente pontualmente para compacto e por conseguinte, pelo teorema anterior, regular. Consideremos a cobertura C de E formada por todas as vizinhanças V_x que se obtêm quando x varia em F e pelo complementar F' de F. Sendo o espaço E localmente para compacto por hipótese, existe uma cobertura C' subordinada a C tal que para todo ponto $y \in G$ existe uma vizinhança T_λ de y que só intercepta um número finito $A_1, \cdots, A_n$ de membros de C'. A união U dos conjuntos de C' que interceptam F é um conjunto aberto contendo F. Vamos mostrar que existe um conjunto aberto contendo G — chamemo-lo V — o qual não intercepta U, o que termina a demonstração. De facto, cada um dos A_n que intercepta F está contido por definição em um V_{x_i} correspondente a um ponto $x_i \in F$. Seja S_λ a intersecção dos T_λ e dos W_{x_i} correspondentes a estes pontos; S_λ é uma vizinhança de y qne não intercepta U. Se V é a união dos S_λ que se obtêm quando y percorre G, V é um conjunto aberto que contém G e que não encontra o conjunto U. [5]

[4] Esta parte da demonstração (condição suficiente) é devida a J. DIEUDONNÉ, v. Memória citada em (1).

[5] Esta parte da demonstração (condição suficiente) é devida a J. DIEUDONNÉ, v. Memória citada em (1).

Conchoïdes de cercles et equations de Riccati

par Gabriel Viguier (Paris)

Canonisation géométrique de l'équation de Riccati

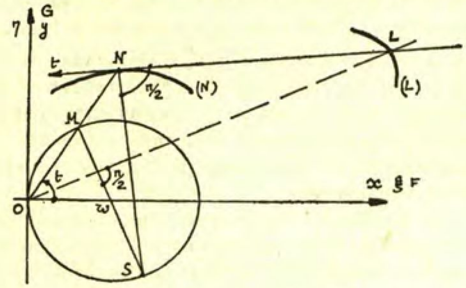
Nous considérons le cercle (M) de coordonnées paramétriques:

$$(1) \qquad (M) \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\cos t \sin t \end{cases}$$

k désignant une constante quelconque, nous associons à la courbe-base (M) la courbe-adjointe (L) dont les équations paramétriques s'écrivent

$$(2) \qquad (L) \begin{cases} F = \dfrac{2\cos t}{k}(a\cos t + k)^2 \\[2ex] G = -\dfrac{\cos 2t}{k\sin t}(a\cos t + k)^2 . \end{cases}$$

Les points M et L correspondent à une même valeur du paramètre t. Sur le rayon vecteur OM, nous portons la longueur $\overline{MN} = \tau(t)$. La courbe (N), lieu du



point N que nous envisageons d'étudier, doit avoir sa tangente qui passe par le point L, correspondant de la courbe-adjointe.

Les coordonnées de N sont alors

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = a\cos^2 t + \tau(t)\cdot\cos t \\ \eta = a\cos t\cdot\sin t + \tau(t)\cdot\sin t\,. \end{cases}$$

Exprimant que la tangente $\overrightarrow{Nt}$ passe par le point L, nous obtenons la relation:

$$(4) \qquad \frac{\frac{2}{k}\cos t\,(a\cos t + k)^2 - (a\cos + \tau)\cos t}{\tau'\cos \mathrm{t} - (2a\cos t + \tau)\sin t} = \frac{-\frac{\cos 2t}{k\sin t}(a\cos t + k)^2 - (a\cos t + \tau)\sin t}{\tau'\sin t + a\cos 2t + \tau\cos t}\,.$$

Les termes en $\tau\tau'$ disparaissant, il reste l'équation de Riccati:

$$(5) \qquad \tau' - \frac{k\,\mathrm{tg}\,t}{(a\cos t + k)^2}(\tau^2 + a^2\cos^2 t) + \left[\mathrm{tg}\,t - \frac{2a\,k\sin t}{(a\cos t + k)^2}\right]\tau = 0\,.$$

On n'obtient donc pas une seule courbe (N), mais toute une famille à propriétés anharmoniques.

Cas des conchoïdes de cercle

L'équation différentielle (5) du problème admet la solution particulière

$$(6) \qquad \tau = k = \mathrm{c.^{te}}.$$

La longueur $\overline{MN}$ étant constante, on trouve les conchoïdes du cercle (M) qu'illustrent les figures 1, 2 et 3, correspondant aux cas $k \gtrless a$.

Nous notons dans ces cas de figures particuliers, une propriété géométrique simple attachée aux points N et L: S étant diamétralement opposé au point M sur le cercle-base (M) de centre ω, la tangente en N à la courbe (N) est normale à la droite SN; le point L se trouve d'une part sur la perpendiculaire à SM issue de l'origine 0 et d'autre part, sur la tangente Nt à la courbe (N).

La figure 1 correspond au cas où $k = a$; la courbe (N) est la cardioïde d'équations

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi = a\cos t\,(1 + \cos t) \\ \eta = a\sin t\,(1 + \cos t) \end{cases}$$

la courbe adjointe étant donnée par:

$$(8) \qquad \begin{cases} F = 2a\cos t\,(1 + \cos t)^2 \\ G = -\dfrac{a\cos 2t}{\sin t}(1 + \cos t)^2 \end{cases}$$

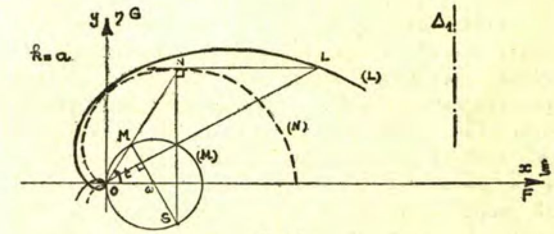


Fig. 1

admet une asymptote verticale Δ_1 dont l'équation est

$$(9) \qquad F = 8a\,.$$

La figure 2 correspond au cas $k > a$, la courbe adjointe (L) admettant les deux asymptotes verticales:

$$(10) \qquad (\Delta_2)\ F = 2/k\cdot(a+k)^2\,; \quad (\Delta_2')\ F = -2/k\cdot(a-k)^2\,.$$

Enfin le cas $k < a$ est envisagé sur le figure 3.

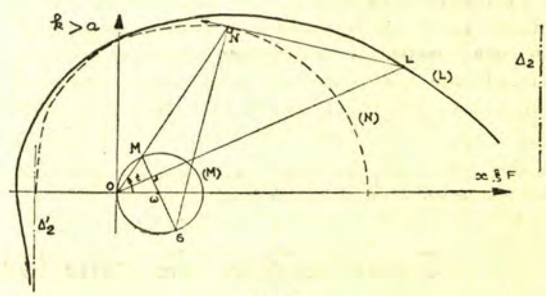


Fig. 2

Si nous reprenons la solution particulière (6), nous voyons qu'il est possible de calculer l'intégrale générale de (5) qui doit de ramener à une quadrature.

Nous avons en effet:

$$(11) \qquad \tau = k + \frac{(a\cos t + k)^2}{C_1\cos t - k} = \frac{a^2\cos t + k\,(2a + C_1)}{C_1\cos t - k}\cos t\,.$$

Remarquons que les conchoïdes du cercle (M) corres-

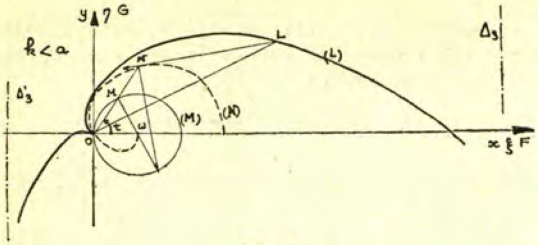


Fig. 3

pondent à la valeur infinie de la constante C_1.

Pour $C_1 = a$, nous trouvons $\tau = -a\cos t$; la courbe (N) se réduit à l'origine 0 qui joue le rôle de cercle-point.

Enfin, pour $C_1 = 0$, la courbe (N) du sixième degré admet pour équation cartésienne la relation:

$$(\xi^2+\eta^2)^4\,(\xi^2+\eta^2+2a\,\xi)+a^2\,\xi^2\,(\xi^2+\eta^2-\frac{a^2}{k^2}\,\xi^2)=0 .$$

Ainsi, nous voyons que les conchoïdes de cercle et avec elles, la plus simple, la cardioïde, se placent parmi les dégénérescences des courbes integrales de l'équation de Riccati. Elles s'ajoutent aux coniques et cubiques circulaires qui, nous l'avons vu dans une précédente note (*Gazeta de Matemática*, Lisbonne, Août 1947, n.º 33), peuvent correspondre également à des cas dégénérés de l'équation de Riccati.

Os potenciais escalar e vectorial e os espaços a conexão simples e múltipla

por ***Luís Freire*** *(Recife)*

Espaço de simples conexão *linear* ou simplesmente conexo *linear*: aquele em que qualquer linha fechada de Jordan (simples — sem pontos múltiplos) ou contorno de Jordan que nele se trace, pode, por deformação contínua, e sem dele sair, reduzir-se a um ponto.

Exemplos: os espaços interior e exterior a uma esfera, o espaço interior a um cilindro, a superfície de uma esfera (daí as superfícies simplesmente conexas).

Espaço multiplamente conexo *linear*: aquele em que, dentre as curvas fechadas de Jordan que nele se podem traçar, há as que, por deformação contínua, e sem dele sair, jámais se reduzirão a um ponto.

Exemplos: o espaço *exterior* a um cilindro — as curvas que envolvem o cilindro, estão naquelas condições; os espaços interior e exterior a um toro; a superfície de um toro (daí as superfícies multiplamente conexas).

Nos espaços simplesmente conexos *lineares* é sempre possível fazer passar por um qualquer dos seus contornos de Jordan uma superfície regular bilateral e contínua — diafragma — que neles fique inteiramente contida.

Ao contrário se dá com os espaços multiplamente conexos *lineares*.

Espaço de simples conexão *superficial* ou simplesmente conexo *superficial*: aquele em que qualquer superfície fechada de Jordan que nele se trace, pode, por deformação contínua, e sem dele sair, reduzir-se a um ponto.

Exemplo: o espaço *interior* a uma esfera.

Espaço multiplamente conexo *superficial*: aquele em que, dentre as superfícies fechadas de Jordan que nele se podem traçar, há as que, por deformação contínua, e sem dele saír, jámais se reduzirão a um ponto.

Exemplo: o espaço *exterior* a uma esfera — as superfícies que envolvem a esfera, estão naquelas condições.

Nos espaços simplesmente conexos *superficiais*, o volume delimitado por qualquer de suas superfícies fechadas, está inteiramente contido em tais espaços.

Ao contrário se dá com os espaços multiplamente conexos *superficiais*. O espaço *exterior* a uma esfera é, pois, *simplesmente* conexo *linear* e *multiplamente* conexo *superficial*.

Para os espaços de simples conexão linear, em que reinam campos de vectores $\mathbf{u}$, e para os quais $\nabla\wedge\mathbf{u}=0$, tem-se, aplicando o teorema de Stokes a uma de suas curvas fechadas e à superfície que nela se apoia não deixando o campo:

$$\int_\sigma \nabla\wedge u\times d\sigma=\oint u\times d\lambda=0 ,$$

isto é, $$\int_{\lambda_1} u\times d\lambda-\int_{\lambda_2} u\times d\lambda=0$$

ou $$\int_{\lambda_1} u\times d\lambda=\int_{\lambda_2} u\times d\lambda=f(P_1) ,$$

o que diz: o integral de $u\times d\lambda$ a partir de P_0 é independente do caminho λ que termina em P_1 — ele tem um unico valor.

Assim, $\int_\lambda u\times d\lambda=\varphi$, sendo φ uma função escalar uniforme ou monodroma dos pontos do campo; uma função escalar monodroma de posição, pois.