Remarquons que les conchoïdes du cercle (M) corres-

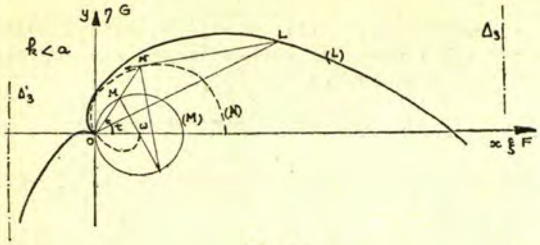

Fig. 3

pondent à la valeur infinie de la constante C_1.

Pour $C_1=a$, nous trouvons $\tau=-a\cos t$; la courbe (N) se réduit à l'origine 0 qui joue le rôle de cercle-point.

Enfin, pour $C_1=0$, la courbe (N) du sixième degré admet pour équation cartésienne la relation :

$$(\xi^2+\eta^2)^4\,(\xi^2+\eta^2+2a\,\xi)+a^2\,\xi^2\,(\xi^2+\eta^2-\frac{a^2}{k^2}\,\xi^2)=0\,.$$

Ainsi, nous voyons que les conchoïdes de cercle et avec elles, la plus simple, la cardioïde, se placent parmi les dégénérescences des courbes integrales de l'équation de Riccati. Elles s'ajoutent aux coniques et cubiques circulaires qui, nous l'avons vu dans une précédente note (*Gazeta de Matemática*, Lisbonne, Août 1947, n.º 33), peuvent correspondre également à des cas dégénérés de l'équation de Riccati.

Os potenciais escalar e vectorial e os espaços a conexão simples e múltipla

por **Luís Freire** (Recife)

Espaço de simples conexão *linear* ou simplesmente conexo *linear*: aquele em que qualquer linha fechada de Jordan (simples — sem pontos múltiplos) ou contorno de Jordan que nele se trace, pode, por deformação contínua, e sem dele sair, reduzir-se a um ponto.

Exemplos: os espaços interior e exterior a uma esfera, o espaço interior a um cilindro, a superfície de uma esfera (daí as superfícies simplesmente conexas).

Espaço multiplamente conexo *linear*: aquele em que, dentre as curvas fechadas de Jordan que nele se podem traçar, há as que, por deformação contínua, e sem dele saír, jámais se reduzirão a um ponto.

Exemplos: o espaço *exterior* a um cilindro — as curvas que envolvem o cilindro, estão naquelas condições; os espaços interior e exterior a um toro; a superfície de um toro (daí as superfícies multiplamente conexas).

Nos espaços simplesmente conexos *lineares* é sempre possível fazer passar por um qualquer dos seus contornos de Jordan uma superfície regular bilateral e contínua — diafragma — que neles fique inteiramente contida.

Ao contrário se dá com os espaços multiplamente conexos *lineares*.

Espaço de simples conexão *superficial* ou simplesmente conexo *superficial*: aquele em que qualquer superfície fechada de Jordan que nele se trace, pode, por deformação contínua, e sem dele sair, reduzir-se a um ponto.

Exemplo: o espaço *interior* a uma esfera.

Espaço multiplamente conexo *superficial*: aquele em que, dentre as superfícies fechadas de Jordan que nele se podem traçar, há as que, por deformação contínua, e sem dele saír, jámais se reduzirão a um ponto.

Exemplo: o espaço *exterior* a uma esfera — as superfícies que envolvem a esfera, estão naquelas condições.

Nos espaços simplesmente conexos *superficiais*, o volume delimitado por qualquer de suas superfícies fechadas, está inteiramente contido em tais espaços.

Ao contrário se dá com os espaços multiplamente conexos *superficiais*. O espaço *exterior* a uma esfera é, pois, *simplesmente* conexo *linear* e *multiplamente* conexo *superficial*.

Para os espaços de simples conexão linear, em que reinam campos de vectores $\mathbf{u}$, e para os quais $\nabla\wedge\mathbf{u}=0$, tem-se, aplicando o teorema de Stokes a uma de suas curvas fechadas e à superfície que nela se apoia não deixando o campo:

$$\int_\sigma \nabla\wedge u\times d\sigma=\oint u\times d\lambda=0\,,$$

isto é,
$$\int_{\lambda_1} u\times d\lambda-\int_{\lambda_2} u\times d\lambda=0$$

ou
$$\int_{\lambda_1} u\times d\lambda=\int_{\lambda_2} u\times d\lambda=f(P_1)\,,$$

o que diz: o integral de $u\times d\lambda$ a partir de P_0 é independente do caminho λ que termina em P_1 — ele tem um unico valor.

Assim, $\int_\lambda u\times d\lambda=\varphi$, sendo φ uma função escalar uniforme ou monodroma dos pontos do campo; uma função escalar monodroma de posição, pois.

Daí $u \times d\lambda = d\varphi = \nabla\varphi \times d\lambda$, portanto, $u = \nabla\varphi$, isto é: Se em um espaço simplesmente conexo se tem, para um campo de vectores u nele contido, $\nabla \wedge u = 0$, o vector u é o gradiente de uma função escalar uniforme ou monodroma de posição.

Como o integral acima é independente do caminho, a esse campo se dá o nome de *aciclico*.

$\int_\lambda u \times d\lambda = \varphi$ se escreve melhor $\int_{P_0(\lambda)}^{P_1} u \times d\lambda = \int_{P_0}^{P_1} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$.

A φ dá-se o nome de *função do campo*, e a $-\varphi$, que se faz igual a V, o de *potencial do campo*.

Quando u é uma força, φ é a *função de forças* simplesmente (função do campo de forças), e V o *potencial de forças*.

A última relação diz, então, que o trabalho da força em um campo aciclico, é independente do caminho percorrido, e igual à diferença da função de forças nos pontos final e inicial ou do potencial nos pontos inicial e final $(\varphi_1 - \varphi_0 = -V_1 - (-V_0) = V_0 - V_1)$.

Quando um vector é o gradiente de uma função escalar de posição, chama-se-lhe de *vector potencial*.

Teorema recíproco: Se $\oint u \times d\lambda = 0$, $u = \nabla\varphi$.

Com efeito, de acôrdo com a hipótese, temos:

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda + \int_{P_2(\lambda_1)}^{P_1} u \times d\lambda = 0, \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda + \int_{P_2(\lambda_2)}^{P_1} u \times d\lambda = 0,$$

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda + \int_{P_2(\lambda_3)}^{P_1} u \times d\lambda = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda =$$

$$= - \int_{P_2(\lambda_1)}^{P_1} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_1)}^{P_2} u \times d\lambda, \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_2)}^{P_2} u \times d\lambda,$$

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_3)}^{P_2} u \times d\lambda. \quad \text{Portanto:} \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda =$$

$$= \int_{P_1(\lambda_1)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_2)}^{P_1} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_3)}^{P_2} u \times d\lambda,$$ isto é, a circuitação de u depende apenas de P_1 e P_2 e não dos λ, desde que as trajectorias estejam contidas integralmente no campo do vector.

Isso corresponde a afirmar que $\int_{P_1(\lambda\ \text{qualquer})}^{P_2} u \times d\lambda = \text{valor}$ único, isto é, $\varphi(P)$. Daí $u \times d\lambda = d\varphi$, sendo φ uma função escalar de P, uniforme. Mas $\nabla\varphi \times d\lambda = d\varphi$, e sendo $u \times d\lambda = d\varphi$, tem-se $u = \nabla\varphi$.

Consideremos agora os campos contidos em espaços multiplamente conexos *lineares*.

Para as curvas fechadas que em tais campos se podem reduzir a um ponto, nas condições já definidas, tem-se ainda a relação $\oint u \times d\lambda = 0$ condicionada a $\nabla \wedge u = 0$.

Para as curvas que a tal não se reduzem, virá, então, desde que a superfície σ não se contém inteiramente no campo considerado:

$$\int_\sigma \nabla \wedge u \times d\sigma = \oint u \times d\lambda \neq 0$$

$\oint u \times d\lambda$ depende, então, do caminho λ. O campo é, pois, *ciclico*.

Mantendo ainda u como gradiente de φ, será φ uma função escalar poliforme ou polidroma.

Assim o potencial do campo será polidrómico.

Portanto, um campo irrotacional pode derivar de um potencial monodrómico ou polidrómico.

Para este último caso não tem sentido a superfície de nível ou equipotencial.

Sejam campos B contidos em espaços de conexão simples *superficial* e tais que $\nabla \times B = 0$.

Portanto, $B = \nabla \wedge A$, sendo A o que se chama o *potencial vector* de B. O teorema de Green dá:

$$\int_\tau \nabla \times B\, d\tau = \int_\sigma B \times d\sigma = \int_\sigma \nabla \wedge A \times d\sigma = \oint A \times d\lambda = 0.$$

No caso em que o campo se contém em espaços de conexão múltipla *superficial*, mantendo-se a mesma condição $\nabla \times B = 0$, e, portanto, $B = \nabla \wedge A$, os integrais acima são ainda nulos para as superfícies do campo que se podem reduzir a um ponto, nas condições já definidas.

Para os que a isso não se reduzem, $\oint A \times d\lambda \neq 0$, pois, o volume τ não está inteiramente contido no campo considerado. No 1.º caso o potencial-vector é monodrómico, e no 2.º é polidrómico.

Observações. Representamos aqui os gradientes, divergencias, e rotacionais, por meio do ∇ (nabla), que, como sabemos, é um operador diferencial dado por $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. $\text{Grad}\,\varphi = \nabla\varphi$, $\text{div}\,u = \nabla \times u$, $\text{rot}\,u = \nabla \wedge u$, os sinais $\times$ e $\wedge$ representando respectivamente os produtos escalar e vectorial de dois vectores.

A linha de Jordan que consideramos é a da última definição de Jordan, isto é, o extremo do paradoxo de Peano.

Uma superfície de Jordan (simples — sem pontos múltiplos) é constituída por um conjunto de pontos omeomorfo a uma superfície esférica.

Ela divide o espaço em duas regiões, como o fazem com o plano as linhas fechadas de Jordan: são as regiões a pontos internos e externos.